

SYMPOZJON "MODELOWANIE W MECHANICE"

POLSKIE TOWARZYSTWO MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

Beskid Śląski, 1990

Tomasz Goetzendorf-Grabowski, Józef Pietrucha  
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej  
Politechnika Warszawska

MODELOWANIE OPŁYWU NADDŹWIĘKOWEGO NA POTRZEBY OBLICZEN  
PODSTAWOWYCH CHARAKTERYSTYK AERODYNAMICZNYCH SAMOŁOTU

Streszczenie. W wyniku modelowania fizycznego uzyskano model matematyczny opływu naddźwiękowego całego samolotu w postaci liniowego równania różniczkowego cząstkowego dla potencjału prędkości zaburzeń. Równanie to przedstawiono za pomocą pewnego zagadnienia całkowego wygodnego do obliczeń numerycznych. Porównano wyniki obliczeń z wynikami innych metod teoretycznych i doświadczalnych. Stwierdzono dobrą zgodność.

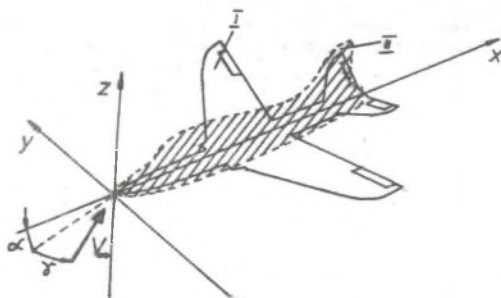
### 1. Wstęp

Na ogół sądzi się, że do opisu opływu ciał najlepszy, bo najpełniejszy jest model płynu lepkiego. Mając zestaw odpowiednich metod numerycznych oraz dysponując dostatecznie potężnym sprzętem obliczeniowym moglibyśmy wyznaczyć opływ wokół dowolnego ciała. Takie podejście jest jednak zbyt kosztowne. Dlatego jesteśmy zmuszeni do stosowania modeli uproszczonych. Tym niemniej stosowanie tych modeli daje często niezłe wyniki. Okazuje się, że dla dużych liczb Reynoldsa, odpowiadających realnym warunkom lotu statków powietrznych, kiedy decydując z punktu widzenia podstawowych charakterystyk aerodynamicznych są siły

bezwładności, nie ma konieczności stosowania złożonego modelu opływu lepkiego. W praktyce projektowania aerodynamicznego istotne jest opracowanie i wdrożenie metod uwzględniających opływ brył o skomplikowanych kształtach. W związku z tym rośnie rola rozwoju metod rozwiązywania zadań opływu w ramach modeli przybliżonych. Celem referatu jest przedstawienie konkretnej metody wyznaczania współczynników siły nośnej i momentu pochylającego całego samolotu, będącej nowym jakościowo podejściem w stosunku do metody przedstawionej w pracy [1].

## 2. Model fizyczny

Na ogół założenia dotyczą zarówno opływu, jak i opływającego obiektu. W niniejszej pracy założenia upraszczające dotyczą głównie opływu. Dzielimy je na dwie grupy. Pierwsza zawiera założenia mające na celu otrzymanie prostego modelu matematycznego: brak lepkości i przewodzenia ciepła, zachodzi równowaga termodynamiczna, zaniedbanie sił masowych. Do grupy drugiej zaliczamy założenia umożliwiające obróbkę modelu matematycznego: bezwirowość (istnienie potencjału predkości), mały kąt natarcia, spełnienie warunku Kutty-Zukowskiego, słabe fale uderzeniowe, stacjonarność opływu, zaburzenia są małe. Opływany obiekt zastępujemy jego rzutem na odpowiednią płaszczyznę (rys.1).



Rys. 1. Płaszczyzny rzutowania

- I - rzut dla obliczeń charakterystyk zależnych od kąta natarcia  $\alpha$ ,
- II - rzut dla obliczeń charakterystyk zależnych od kąta ślizgu  $\gamma$ ,

3. Model matematyczny

Na podstawie założeń z pierwszej grupy możemy otrzymać następujący układ równań:

- równanie ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

- równanie Eulera

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \text{ grad}) \mathbf{V} = - \frac{1}{\rho} \text{ grad } p, \quad (2)$$

- równanie stanu

$$p = p_{\infty} \left( \frac{\rho}{\rho_{\infty}} \right)^{\kappa}, \quad (3)$$

gdzie:  $\rho = \rho(x, y, z)$  - pole gęstości powietrza

$\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z)$  - pole prędkości

$p = p(x, y, z)$  - pole ciśnienia

$\kappa$  - wykładnik izentropii.

Dzięki założeniom z grupy drugiej możemy otrzymać równanie:

$$\beta^2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (4)$$

gdzie  $\beta = \sqrt{Ma^2 - 1}$  - współczynnik Prandtla-Glauerta,  
 $\phi$  - potencjał prędkości zaburzeń.

Równanie (4) stanowi już wygodny model matematyczny opływu nadźwiękowego na potrzeby obliczeń charakterystyk aerodynamicznych. Uzupełniamy je niezbędnymi warunkami brzegowymi;

na powierzchni nośnej,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -V_{\infty} \alpha$$

na krawędzi spływu,

$$\Delta \phi(x, y) = 0$$

w śladzie wirowym,

$$\partial \phi(x, y) / \partial x = 0$$

poza powierzchnia nośna i śladem wirowym  $\phi(x, y) = 0$ .

4. Metoda PUDEŁEK MACHA

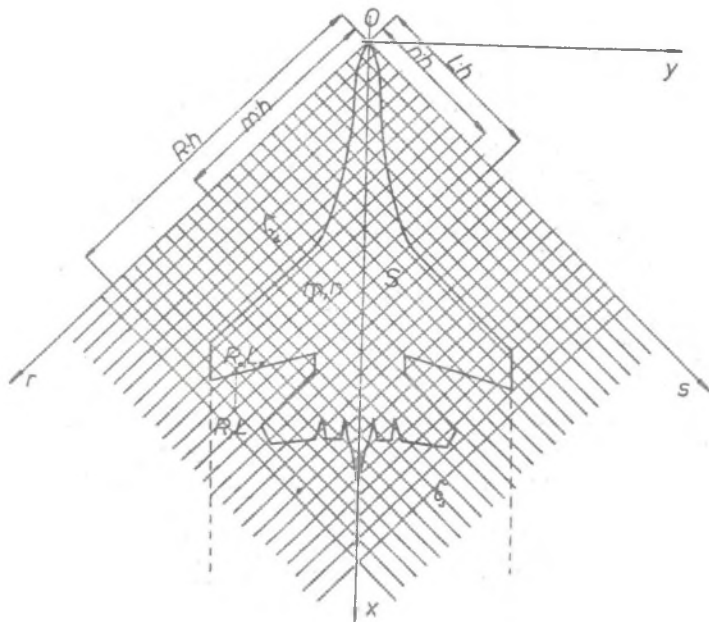
Rozwiązanie równania (4) ma postać [2]:

$$\phi(x, y, z) = - \frac{1}{\pi} \iint \frac{w(\xi, \eta) d\xi d\eta}{S(x, y, z) R}, \quad (5)$$

gdzie:  $w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0}$ ,  $R = \sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 [(y-\eta)^2 - z^2]}$

Wyznaczenie potencjału prędkości sprowadza się zatem do obliczenia całki powierzchniowej. W tym celu wprowadzamy nowy układ współrzędnych związany z liniami Macha (Rys.2) :

$$r = (x - \beta y) / \beta, \quad s = (x + \beta y) / \beta. \quad (6)$$



Rys. 2. Podział na "PUDEŁKA MACHA"

Równanie (5) w nowych współrzędnych przybiera postać:

$$\phi(r, s) = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{w(r', s') dr' ds'}{R^2}, \quad (7)$$

gdzie  $R^2 = \sqrt{(r-r')(s-s')}$ .  
 Dokonujemy podziału obszaru ograniczonego stożkiem Macha (układ  $rOs$  na Rys.2) i odwrotnym stożkiem Macha poprowadzonym tak, aby cały opływany obiekt został w nim zawarty. Elementy powstałe w wyniku podziału nazywamy "pudełkami Macha" (ang. MACH BOX). Po tej operacji oraz dokonaniu niezbędnych przekształceń [3] wyrażenie (7) przybiera postać bezwymiarową:

$$\phi(Lh, Rh) = -\frac{2h}{\pi} \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^R w(nh, mh) \text{BNMLR}, \quad (8)$$

gdzie  $\text{BNMLR} = 1 / [(\sqrt{L-n+1} + \sqrt{L-n})(\sqrt{R-m+1} + \sqrt{R-m})]$ .

Pozostałe oznaczenia są pokazane na rys.2. Niewiadoma pozostaje funkcja  $w(nh, mh)$ , którą wyznaczamy na podstawie warunków brzegowych. I tak:

- dla obszaru powierzchni nośnej - oznaczonej S na rys.2

$$w_{\text{II}}(nh, mh) = -a \quad ;$$

- dla obszaru poza powierzchnią nośną i śladem wirowym, czyli tzw. diafragmy - oznaczonej  $\delta_d$

$$w_{dl}(Lh, Rh) = - \sum_{n=1}^{L-1} \sum_{m=1}^{n-1} w(nh, mh) \text{ BNL} \quad (9)$$

$$w_{dr}(Lh, Rh) = - \sum_{m=1}^{L-1} w(nh, mh) \text{ BMR}$$

gdzie  $\text{BNL} = 1/(\sqrt{L-n+1} + \sqrt{L-n})$ ,  $\text{BMR} = 1/(\sqrt{R-m+1} + \sqrt{R-m})$ , indeksy l i r oznaczają odpowiednio diafragmę na lewo i na prawo od osi OX;

- dla śladu wirowego - oznaczonego  $\delta_w$

$$w_w(Lh, Rh) = - \frac{2h}{\Pi} \varphi(L_*h, R_*h) - \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^n w(nh, mh) \text{ BNMLR}, \quad (10)$$

gdzie symbol  $\Sigma'$  oznacza sumowanie po wszystkich elementach, ale bez elementu  $(Lh, Rh)$ , natomiast  $(L_*h, R_*h)$  - "pudełko" znajdujące się na krawędzi spływu takie, że  $L-R = L_*-R_*$ .

UWAGA: Jeżeli dla  $m=1$  i  $n=1$  "pudełko" nie należy do powierzchni nośnej, to  $w(nh, mh)=0$ ; w przeciwnym przypadku  $w(nh, mh)=-\alpha$ .

#### 5. Wyznaczenie współczynników aerodynamicznych

Zgodnie z przyjętą konwencją oznaczeń współczynniki siły nośnej i momentu pochylającego są wyrażone wzorami:

$$C_z = \frac{P_z}{q S}, \quad C_m = \frac{M_y}{q S c_a}, \quad (11)$$

gdzie  $P_z = \iint_S \Delta p(x, y) dx dy$ ,  $M_y = \iint_S \Delta p(x, y) x dx dy$ ,

$q$  - ciśnienie dynamiczne,  $S$  - powierzchnia odniesienia,

$c_a$  - średnia ciężka aerodynamiczna.

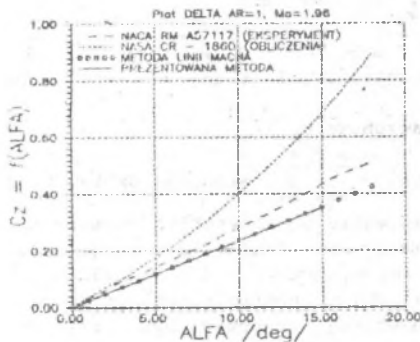
Wyrażenie  $\Delta p$  oznacza różnicę ciśnień między górną i dolną powierzchnią skrzydła, czyli  $\Delta p = p_l - p_u$ . Dla płaskiej płytki ciśnienia te mają tę samą wartość bezwzględną, a zatem  $\Delta p = 2p$ . Ciśnienie  $p$  możemy wyznaczyć ze wzoru  $C_p = (p - p_\infty)/q$ .

Dla przepływu ustalonego mamy:

$$C_p = - \frac{2}{V_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (12)$$

skąd widać wyraźnie, że wyznaczenie  $C_z$  i  $C_m$  polega na uzyskaniu potencjału prędkości zaburzeń, co zostało podane w rozdz.4.

## 6. Podsumowanie



Rys. 3. Wyniki przykładowych obliczeń

Podana metoda daje dobre wyniki. Jest bardziej uniwersalna niż cytowana metoda [1] LINII MACHA, czas obliczeń jest jednak nieporównywalnie dłuższy. Przykładowe wyniki podano w formie wykresu na rys.3. Zamieszczono również porównanie z wynikami innych prac [4] i [5].

## LITERATURA

- [1] Goetzendorf-Grabowski T., Pietrucha J.: Przybliżone wyznaczenie charakterystyk aerodynamicznych skrzydeł o obrysie trapezowym w zakresie naddźwiękowym (praca przyjęta do druku w "Mechanice Teoretycznej i Stosowanej" w 1989r.).
- [2] Красильникова Е.А.: Тонкое крыло в сжимаемом потоке, Москва-Наука 1986.
- [3] Белоцерковский С.М., Кудряева Н.А., Попыталов С.А., Табачников Б.Г.: Исследование сверхзвуковой аэродинамики самолетов на ЕВМ, Москва-Наука 1983.
- [4] Nenni J.P., Chee Tung: A Second-Order Slender wing Theory for Wings with Leading-Edge Separation in Supersonic Flow, NASA CR-1860, 1971.
- [5] Hill W.A. Jr.: Experimental Lift of Low-Aspect-Ratio Triangular Wings at Large Angles of Attack and Supersonic Speeds, NACA RM A57117, 1957.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
ОСНОВНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК САМОЛЕТА

## Резюме

В результате физического моделирования получено математическую модель сверхзвукового течения в форме линейного дифференциального уравнения в частных производных для потенциала возмущенной скорости. Это уравнение представлено с помощью некоторой интегральной проблемы, удобной для численных расчетов. Сравнено результаты расчетов с другими теоретическими и экспериментальными методами. Подтверждено хорошее согласие.

MODELLING OF THE SUPERSONIC FLOW FOR CALCULATION OF  
PRINCIPLE AIRPLANE'S AERODYNAMIC CHARACTERISTICS

## Summary

As a result of physical modelling the mathematical model of supersonic flow around whole airplane has been obtained. This model has a form linear partial differential equation for disturbed velocity potential. This equation, by means of some integral problem, convenient for numerical calculation has been presented. Results of calculations are compare with another numerical and theoretical method's results. Good compliance has been confirmed.