

SYMPOZJON "MODELOWANIE W MECHANICE"
POLSKIE TOWARZYSTWO MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ
Beskid Śląski, 1990

Zdobysław Goraj, Witold Molicki
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Politechnika Warszawska

DRGANIA SAMOWZBUDNE OPONY LOTNICZEJ

Streszczenie. W pracy przedstawiono modele izolowanej opony lotniczej, zwanej dalej pneumatykiem, umożliwiające analizę drgań samowzbudnych. Siły i momenty działające na pneumatyk przyjęto zgodnie z teorią Von Schlippe oraz z tzw. jednopunktowym modelem Pacejki. Wyprowadzono dynamiczne równania ruchu i przeanalizowano warunki wystąpienia drgań harmonicznnych odpowiadających granicznemu przejściu pomiędzy drganiami gasnącymi i narastającymi.

1. Wstęp

Samolot na pasie startowym może w pewnych warunkach wykazywać tendencje do narastających drgań skrętnych przedniego kółka wokół osi goleni przedniego podwozia. Drgania takie mogą utrudniać sterowanie samolotem w czasie rozbiegu lub dobiegu, a w skrajnych przypadkach mogą prowadzić do zjazdu samolotu z pasa startowego, wykonania tzw. cyrkla i w konsekwencji do zniszczenia konstrukcji. Ważnym elementem w analizie tego zjawiska jest izolowana opona lotnicza (pneumatyk). Parametry masowe i kinematyczne pneumatyka decydują o możliwości wystąpienia narastających drgań skrętnych.

W przedstawionej pracy przeanalizowano stan graniczny pomiędzy drganiami gasnącymi i narastającymi. Prędkość odpowiadająca temu stanowi jest prędkością krytyczną drgań samowzbudnych [1].

W publikowanej literaturze [1, 2] przedstawiono metody pozwalające wyznaczyć prędkość krytyczną przy założonej częstotliwości drgań własnych.

W niniejszej pracy, zarówno częstość jak i prędkość krytyczna mogą być wyznaczone łącznie z dwóch warunków - wrunku, iż drgania krytyczne są harmoniczne oraz warunku, że prędkości krytycznej odpowiada rzeczywista częstość drgań własnych. Proponowana metoda jest uogólnieniem metody V-g stosowanej do analizy flateru [3, 4].

2. Modele pneumatyka

Z literatury [5] wiadomo, że niestacjonarne siły i momenty działające na pneumatyk spełniają następujące równania różniczkowe:

$$\alpha \frac{dF}{ds} + F = -C_F C \left(-\frac{dy}{ds} + \frac{a^2}{\alpha+a} \frac{d^2y}{ds^2} + \psi - a \frac{d\psi}{ds} + \frac{d^2\psi}{ds^2} \right), \quad (1)$$

$$\alpha \frac{dM}{ds} + M = C_M C \left(-a \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dy}{ds} - a(\alpha+a) \frac{d^2\psi}{ds^2} + a \frac{d\psi}{ds} - \psi \right), \quad (2)$$

gdzie:

F - siła boczna, M - moment odchyłający, C_F , C_M - sztywność boczna i skrętna, s - droga, a - połowa długości pola kontaktu, α - długość relaksacji, y - przemieszczenie boczne, ψ - skrócenie opony.

Sztywności C_F i C_M są funkcjami jednostkowej sztywności C_0 :

$$C_F = 2 C_0 (\alpha+a)^2; \quad C_M = 2 C_0 a [\alpha(\alpha+a) + a^2/3].$$

Równania (1, 2) opisują tzw. model Von Schlippe.

Jeżeli ograniczymy się do pochodnych pierwszego rzędu w prawych stronach równań (1, 2), to otrzymamy równania różniczkowe opisujące tzw. jednopunktowy model Pacejki [5, 6]

$$\alpha \frac{dF}{ds} + F = -C_F C \left(-\frac{dy}{ds} + \psi - a \frac{d\psi}{ds} \right), \quad (3)$$

$$\alpha \frac{dM}{ds} + M = -C_M C \left(\frac{dy}{ds} - \psi + a \frac{d\psi}{ds} \right). \quad (4)$$

3. Dynamiczne równania ruchu pneumatyka

Dynamiczne równania ruchu pneumatyka mają postać:

$$m\ddot{y} + mV\dot{\psi} = F - c_1 y - k_1 y, \quad (5)$$

$$J\ddot{\psi} = M - c_2 \dot{\psi} - k_2 \psi, \quad (6)$$

gdzie:

m - masa pneumatyka, J - moment bezwładności względem osi leżącej w płaszczyźnie pneumatyka, V - prędkość toczenia, c_1 , c_2 - odpowiednio boczna i skrętna sztywność utwierdzenia, k_1 , k_2 - odpowiednio boczny i skrętny współczynnik tłumienia drgań pneumatyka.

4. Warunki wystąpienia drgań samowzbudnych

Drgania harmoniczne są stanem granicznym pomiędzy drganiami gasnącymi i narastającymi. Założymy rozwiązanie w postaci:

$$y = y_0 e^{i\omega t}; \quad \psi = \psi_0 e^{i\omega t}, \quad (7)$$

skąd:

$$\dot{y} = i\omega y; \quad \ddot{y} = -\omega^2 y; \quad \dot{\psi} = i\omega \psi; \quad \ddot{\psi} = -\omega^2 \psi.$$

Częstość zredukowana definiuje się jako: $\omega_s = \omega/V$, skąd otrzymamy:

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{V} \frac{d}{dt} = \frac{\omega_s}{\omega} i \omega = i \omega_s, \quad \frac{d^2}{ds^2} = \frac{1}{V^2} \frac{d^2}{dt^2} = \frac{\omega_s^2}{\omega^2} (-\omega^2) = -\omega_s^2.$$

Z równań (1-4) przy uwzględnieniu zależności otrzymamy:

$$A X = 0, \quad (8)$$

gdzie:

$$X = \text{col } \{y, \psi, F, M\};$$

$$A = \begin{bmatrix} -m\omega^2 + k_1 i\omega + c_1 & i\omega^2 m/\omega & -1 & 0 \\ 0 & -J\omega^2 + k_2 i\omega + c_2 & 0 & -1 \\ w_{31} & w_{32} & -(1+i\alpha\omega) & 0 \\ w_{41} & w_{42} & 0 & -(1+i\alpha\omega) \end{bmatrix} \quad (9)$$

przy czym

$$w_{31} = -C_F \omega \left(\frac{a^2 \omega}{a + \alpha} + 1 \right); \quad w_{32} = C_M \omega (a\omega + 1),$$

$$w_{41} = C_F (1 - a^2 \omega^2); \quad w_{42} = C_M [a(\alpha + a)\omega^2 - 1 + a i \omega].$$

Warunkiem istnienia rozwiązania układu 8) jest, aby wyznacznik macierzy (9) był równy zero. Warunek ten prowadzi do równania:

$$A\omega^4 + B\omega^3 + C\omega^2 + D\omega + E = 0, \quad (10)$$

gdzie:

$$A = -d^2 J m, \quad B = d^2 i (k_2 m + j k_1), \quad D = -d i (k_2 w_{31} - k_1 + d c_2 k_1),$$

$$C = -d (m w_{42} - b w_{41} - m c_2 d - J w_{31} - d k_1 k_2),$$

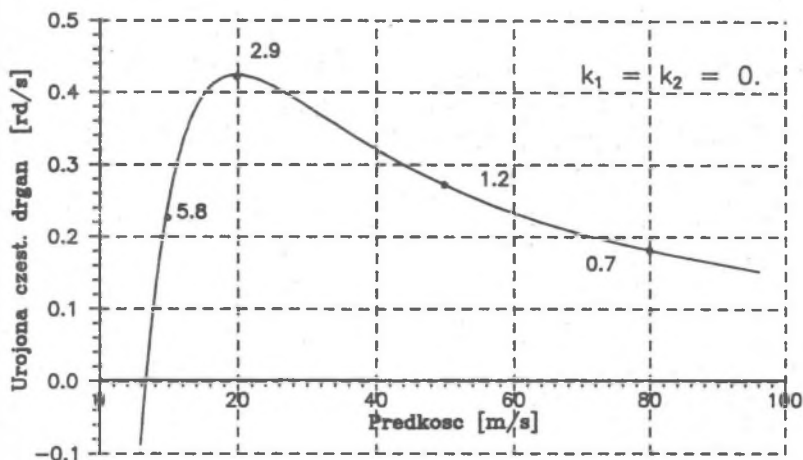
przy czym $d = 1 + i \alpha \omega$.

5. Wyznaczanie prędkości krytycznej drgań samowzbudnych

Obliczenia wykonano dla opony lotniczej o parametrach:

$a = 0.03$ [m], $\alpha = 0.25$ [m], $C_F = 110000$. [N/m²], $J = 0.28$ [kgm²], $m = 18$ [kg], $k_1 = k_2 = c_1 = c_2 = 0$.

Ponieważ dla prędkości krytycznej część urojona częstości drgań jest równa zero, więc prędkość krytyczną znaleziono jako punkt przecięcia krzywej częstości zespolonej drgań z osią rzeczywistą $\text{Re}(\omega)$. Obliczona prędkość krytyczna (Rys.1) wynosi 8.66 [m/s].



Rys.1. Urojona częstość drgań w funkcji prędkości kołowania

6. Wpływ modelu pneumatyka na prędkość krytyczną

Stacjonarne modele pneumatyków jako nie uwzględniające wpływu częstości zredukowanej drgań na siły i momenty, nie prowadzą do obliczenia prędkości krytycznej [7]. Ponadto niektóre modele niestacjonarne również nie doprowadzają nas do znalezienia prędkości krytycznej. Takim modelem jest na przykład model jednopunktowy Pacejki (3, 4), dla którego częstość zespolona drgań wynosi:

$$\omega^2 = \frac{m C_M (2 - \omega^2 \alpha a) + \omega^2 \alpha J C_F + i \omega [J C_F - m C_M (a + 2a)]}{J m (1 + \omega^2 \alpha^2)}$$

Z powyższego wzoru wynika, że częstość drgań może być rzeczywista tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$$J C_F - m C_M (a + 2a) = 0. \quad (11)$$

Warunek (11) nie zależy od częstości zredukowanej, a więc i od prędkości. Oznacza to, że prędkość krytyczna nie istnieje. Osobną uwagę należy się modelom uproszczonym wynikającym z modelu (8).

Jeżeli podstawimy $\langle y \rangle = \langle F \rangle = 0$, to otrzymamy równania:

$$J \ddot{\psi} = M - c_2 \dot{\psi} - k_2 \psi, \quad (6)$$

$$\alpha \frac{dM}{ds} + M = C_M (-a(\alpha+a) \frac{d^2 \psi}{ds^2} + \frac{d\psi}{ds} - \psi). \quad (12)$$

Obliczona z (6, 12) częstość drgań własnych (przy $c_2 = k_2 = 0$) wynosi:

$$\omega = \sqrt{\frac{C_M [1 - \omega_*^2 (\alpha + 2a)] + i C_M \omega_* (\alpha + a) (\alpha \omega_*^2 - 1)}{M - \frac{C_M^2 \omega_*^2}{\alpha^2}}}, \quad (13)$$

skąd otrzymujemy, że $\text{Re}(\omega) > 0$ gdy $\omega_* > 7.93$ oraz że $\text{Im}(\omega) = 0$, gdy $\omega_* = 11.5$ [1/m]. Warunki te są sprzeczne, co oznacza, że prędkość krytyczna nie istnieje.

Jeżeli zablokujemy skręcanie $\langle \omega \rangle$ oraz nie uwzględnimy momentu $\langle M \rangle$, to otrzymamy równania różniczkowe o postaci:

$$m \ddot{y} = F - c_1 \dot{y} - k_1 y, \quad (14)$$

$$\alpha \frac{dF}{ds} + F = -C_F \left(-\frac{dy}{ds} + \frac{a^2}{\alpha+a} \frac{d^2 y}{ds^2} \right). \quad (15)$$

Obliczona z (14, 15) częstość drgań własnych (przy $c_1 = k_1 = 0$) wynosi:

$$\omega = \sqrt{\frac{C_F \omega_* [\omega_*^2 (\alpha^2 + a^2 + 2a\alpha) + i(\alpha+a - a^2 \omega_*^2 \alpha)]}{m(1 + \alpha^2 \omega_*^2)(\alpha + a)}}, \quad (16)$$

skąd otrzymujemy, że $\text{Re}(\omega)$ jest zawsze większe od zera, zaś $\text{Im}(\omega) = 0$, gdy

$$\omega_* = \sqrt{\frac{\alpha + a}{\alpha a^2}},$$

co dla zadanych parametrów daje $\omega_* = 35.27$ [1/m], $\omega = 61.9$ [rd/s] oraz $V_{KR} = 1.76$ [m]. Jest to prędkość krytyczna prawie trzykrotnie zaniżona w stosunku do prędkości obliczonej z pełnego modelu Von Schlippe.

7. Wnioski

Drgania samowzbudne pneumatyka mogą "ujawnić się" tylko przy zastosowaniu niektórych odpowiednio rozbudowanych niestacjonarnych modeli matematycznych. Takim modelem może być model Von Schlippe, nie jest nim natomiast model jednopunktowy Pacejki.

LITERATURA

- [1] Goraj Z., Molicki W., Paturski B.: Modele matematyczne pojazdów na pneumatykach, uwzględnające efekty niestacjonarne. Materiały XXIV Sympozjon "Modelowanie w mechanice", Gliwice - Wisła 1986.
- [2] Goraj Z.: Selfexcited Vibrations of the Tire, Vehicle System Dynamics, Vol. 11, 5-6 Dec. 1982, pp. 345-362.
- [3] Goraj Z., Molicki W., Pietrucha J.: Wpływ sztywnych stopni swobody samolotu na flutter skrzydła. Materiały XXVII Sympozjon "Modelowanie w Mechanice", Gliwice-Wisła 1989.
- [4] Scanlan R., Rosenbaum R.: Drgania i flutter samolotów. PWN 1964.
- [5] Pacejka H.B.: Analysis of the Dynamic Response of a Rolling String - Type Tire Model to Lateral Wheel-Plane Vibrations, Vehicle System Dynamics, 1, 1972, pp. 37-66.
- [6] Pacejka H.B.: The Wheel Shimmy Phenomenon, Doctoral Thesis, Delft Univ. of Tech., 1966.
- [7] Rocard Y.: Dynamic Instability, Crosby Lockwood and Son, London 1957.

МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИИ АВИАЦИОННОЙ ШИНЫ

Резюме

В работе представлено различные модели применяемые при моделировании автоколебания шин. Сформулированы необходимые условия для выступления автоколебания и вычислено критические скорости автоколебания для различных моделей.

SELFEXCITED VIBRATION OF AN AIRCRAFT TIRE

Summary

Paper presents some models of an isolated aircraft tire useful for selfexcited vibration analysis. Necessary conditions for selfexcited vibration to arise are presented. The paper includes some numerical results obtained for real desings, which are discussed in details.