ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MECHANIKA z.99 Nr kol. 1057

SYMPOZJON "MODELOWANIE W MECHANICE"
POLSKIE TOWARZYSTWO MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ
Beskid Śląski, 1990

Zdzisław Gosiewski
Wydział Mechaniczny
Wyższa Szkoła Inżynierska w Koszalinie

MODEL WIRNIKA JAKO OBIEKT STEROWANIA

Streszczenie. W referacie przedstawiono metodę redukcji modelu wirnika giętkiego pod kątem potrzeb sterowania. Korzystając z metody perturbacji ogólny model wirnika przekształcono do postaci quasi-modalnej. Postacie drgań podzielono na postacie sterowane i niesterowane. Wprowadzając mały parametr dokonano redukcji modelu.

1. Wstęp

Rozwój konstrucji łożysk elektromagnetycznych [1] oraz automatyki cyfrowej [2] umożliwia sterowanie nawet tak szybkimi procesami, jakimi są drgania wirników giętkich. Ze względu na szybkość tych procesów konieczne jest maksymalne skrócenie czasu obliczania prawa sterowania przez regulator cyfrowy. Jedną z dróg prowadzących do tego celu jest redukcja modelu wirnika. W pracach [3,4,5] przedstawiono metodę redukcji modelu ciągłego i zaprojektowano sterowanie dla przypadku, gdy postacie drgań są całkowicie rozsprzęgalne. Obecnie dokona się takiej redukcji dla ogólnego dyskretnego modelu wirnika.

2. Quasi-modalny model wirnika

Zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi w [6,7] ogólny model liniowy wirnika ma postać:

$$M^S\ddot{q}_o + (D^S + D^{SS})\dot{q}_o + (K^S + K^{SS})q_o = F_q w + B_q u, \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{M}^S$, $\mathbf{D}^S$, $\mathbf{K}^S$ są symetrycznymi macierzami odpowiednio: masową, tłumienia i sprężystości. $\mathbf{D}^{SS}$ jest macierzą skośnie symetryczną, tzw. "giroskopową", a $\mathbf{K}^{SS}$ jest macierzą skośnie symetryczną, niezachowawczą, tzw. "obiegową" (circulatory [8]), gdyż jest związana z siłami prostopadłymi do kierunku ugięcia wału wirnika. Wszystkie wyżej wymienione macierze mają wymiar [LxL]. Wektory $\mathbf{q}_o$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}$ są odpowiednio wektorami:współrzędnych uogólnionych, wymuszeń i sterowań. $\mathbf{F}_q$ jest macierzą wymuszeń, a $\mathbf{B}_q$ jest macierzą sterowań.

Rozwiązanie problemu własnego układu (1) jest kłopotliwe, ponieważ macierz układu jest niesymetryczna. Dlatego do rozwiązania problemu własnego układu (1) stosuje się często metodę perturbacji [8,9]. W metodzie tej, w pierwszym przybliżeniu rozwiązuje się problem własny układu giroskopowego:

$$\mathbf{M}^S\ddot{\mathbf{q}}_o + \mathbf{D}^{SS}\dot{\mathbf{q}}_o + \mathbf{K}^S\mathbf{q}_o = \mathbf{0}, \tag{2}$$

a następnie rekurencyjnie rozwiązuje się problem własny pełnego modelu (1).

Jeżeli macierze $\mathbf{M}^S$, $\mathbf{D}^{SS}$, $\mathbf{K}^S$ są macierzami dodatnio określonymi, to wartości własne układu (2) są czysto urojone, parami sprzężone: $\lambda_i = i\omega_i$, a prawostronne i lewostronne wektory własne są zespolone, parami sprzężone i są sobie równe [9,10]. Dlatego rozwiązanie problemu własnego takiego zachowawczego układu giroskopowego sprowadza się do rozwiązania równania:

$$(\mathbf{K}^S - \omega_i^2\mathbf{M}^S + \omega_i i\mathbf{D}^{SS})\mathbf{U}_i = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Wprowadzając część rzeczywistą i część urojoną wektora własnego $\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_i^R + i\mathbf{U}_i^I$ możemy uniknąć rozwiązywania problemu własnego w dziedzinie liczb zespolonych i zastąpić równaniem problemu własnego z rzeczywistą macierzą symetryczną:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^S-\omega_i^2\mathbf{M}^S & -\omega_i\mathbf{D}^{SS} \\ \omega_i\mathbf{D}^{SS} & \mathbf{K}^S-\omega_i^2\mathbf{M}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_i^R \\ \mathbf{U}_i^I \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{4}$$

Ze względu na symetrię macierzy rozwiązanie powyższego problemu jest stosunkowo proste nawet dla układów o dużej wartości wymiaru L.

Naprężenia wstępne, siły odśrodkowe nieskompensowane przez siły sprężystości lub inne tego typu obciążenia mogą prowadzić czasami do sytuacji, kiedy macierz $\mathbf{K}^S$ jest ujemnie określona. Wówczas obok wartości własnych czysto urojonych mogą pojawić się rzeczywiste wartości własne. W tym przypadku nie można posługiwać się równaniem (4), lecz można zastosować do rozwiązania problemu własnego metodę przedstawioną w [9].

Dodanie stronami wyrażeń skalarnych:

$$U_i^*(\lambda_j^2 M^S + \lambda_j D^{SS} + K^S)U_j = 0,$$
$$-U_i^*(\lambda_i^2 M^S + \lambda_i D^{SS} + K^S)U_j = 0,$$

daje analog dobrze znanej zasady biortogonalności:

$$U_i^*[(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)M^S + (\lambda_j - \lambda_i)D^{SS}]U_j = 0, \quad \text{dla } i \neq j, \tag{5}$$

gdzie U_i^* jest wektorem transponowanym i sprzężonym do wektora U_i.
Dodanie stronami innych wyrażeń skalarnych:

$$U_i^*(M^S + D^{SS}/\lambda_j + K^S/\lambda_j^2)U_j = 0,$$
$$-U_i^*(M^S + D^{SS}/\lambda_i + K^S/\lambda_i^2)U_j = 0$$

daje inną postać zasady biortogonalności:

$$U_i^*[(1/\lambda_j - 1/\lambda_i)D^{SS} + (1/\lambda_j^2 - 1/\lambda_i^2)K^S]U_j = 0 \quad \text{dla } i \neq j. \tag{6}$$

Korzystając ze związków (5) i (6) znormalizujemy wektory własne:

$$U_i^*[M^S + D^{SS}/(\lambda_j + \lambda_i)]U_j = \delta_{ij}, \tag{7a}$$
$$U_i^*[D^{SS}\lambda_i\lambda_j/(\lambda_j + \lambda_i) + K^S]U_j = -\lambda_i^2\delta_{ij}, \tag{7b}$$

gdzie δ_{ij} jest deltą Kroneckera. Ze znormalizowanych wektorów własnych U_i konstruujemy macierz modalną U.

Dokonując następującej transformacji współrzędnych $q = Up$ w równaniach (1) oraz mnożąc te równania lewostronnie przez macierz U^*, która jest transponowana i sprzężona względem macierzy U, otrzymamy następujące równanie ruchu układu:

$$\ddot{p} + D_*^S\dot{p} + K_*^{SS}p + Lp = F_*w + B_*u, \tag{8}$$

gdzie: $D_*^S = U^*D^SU$, $K_*^{SS} = U^*K^{SS}U$, $L = \mathrm{diag}[-\lambda_i^2]$, $F_* = U^*F_q$, $B_* = U^*B_q$.

Dla przypadku gdy $\lambda_i = i\omega_i$ oraz macierze K_*^{SS} i D_*^S są blokowo-diagonalne, to (8) jest macierzową postacią układu równań z [3], który przedstawia postacie całkowicie rozsprzężone. Obecnie osłabimy to ostatnie założenie przyjmując, że macierze D_*^S i K_*^{SS} nie są diagonalne. Równania (8) przepiszemy w postaci:

$$\ddot{p} + D\dot{p} + Kp = Bu + Fw, \tag{9}$$

gdzie: $\mathbf{D}=\mathbf{D}_*^s$, $\mathbf{K}=\mathbf{K}_*^{ss}+\mathbf{L}$, $\mathbf{B}=\mathbf{B}_*$, $\mathbf{F}=\mathbf{F}_*$. Macierze $\mathbf{D}$ i $\mathbf{K}$ nie są teraz macierzami blokowo-diagonalnymi, chociaż równania ruchu są quasi-modalne, gdyż dominujący udział w każdym z równań ma jedna postać drgań.

3. Redukcja modelu wirnika

Zwykle p pierwszych postaci drgań decyduje o stabilności i poziomie amplitud drgań wirnka. Tymi postaciami będziemy sterować. Pozostałe f=L-p są postaciami niesterowanymi. Częstość własna $\omega_{pk}=\omega_{pp}$, związana z najwyższą z postaci sterowanych, będzie mniejsza od częstości własnych ω_{fk} związanych z postaciami niesterowanymi. Wprowadzimy mały parametr $\tau_k=\omega_{pp}/\omega_{fk}$. Można zauważyć, że im wyższa postać drgań, tym mniejszą wartość ma parametr τ_k związany z tą postacią. Uwzględniając podział na postacie sterowane i niesterowane równanie ruchu zapiszemy w następującym kształcie:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}}_p \\ \ddot{\mathbf{p}}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_3 & \mathbf{D}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_p \\ \dot{\mathbf{p}}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2/\tau^2 \\ \mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_4/\tau^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_p \\ \mathbf{p}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{dp} \\ \mathbf{B}_{df} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{dp} \\ \mathbf{F}_{df} \end{bmatrix} \mathbf{w}. \tag{10}$$

Wprowadzając wektory współrzędnych stanu i wektor wyjść: $\mathbf{x}_p=[\mathbf{p}_p^T,\dot{\mathbf{p}}_p^T]^T$, $\mathbf{x}_f=[(1/\tau^2)\mathbf{p}_f^T,(1/\tau)\dot{\mathbf{p}}_f^T]^T$, $\mathbf{y}_s=[\mathbf{y}^T,\dot{\mathbf{y}}^T]^T$, opiszemy równania ruchu i równanie pomiaru we współrzędnych przestrzeni stanu:

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_p + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_f + \mathbf{B}_p\mathbf{u} + \mathbf{F}_p\mathbf{w}, \tag{11a}$$
$$\tau\dot{\mathbf{x}}_f = \mathbf{A}_3\mathbf{x}_p + \mathbf{A}_4\mathbf{x}_f + \mathbf{B}_f\mathbf{u} + \mathbf{F}_f\mathbf{w}, \tag{11b}$$
$$\mathbf{y}_s = \mathbf{C}_p\mathbf{x}_p + \tau\mathbf{C}_f\mathbf{x}_f, \tag{11c}$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_p \\ -\mathbf{K}_1 & -\mathbf{D}_1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathbf{K}_2 & -\tau\mathbf{D}_2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathbf{K}_3 & -\mathbf{D}_3 \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_4=\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_f \\ -\mathbf{K}_4 & -\tau\mathbf{D}_4 \end{bmatrix},$$

a konstrukcja pozostałych macierzy i równania pomiaru podana jest w pracach [3,7].

Dla bardzo małego τ z równania (11b) otrzymamy:

$$\mathbf{x}_f = -\mathbf{A}_4^{-1}(\mathbf{A}_3\mathbf{x}_p + \mathbf{B}_f\mathbf{u} + \mathbf{F}_f\mathbf{w}). \tag{12}$$

Podstawimy powyższe wyrażenie do równania (11a). Pomijając w równaniu (11c) człon z małym parametrem otrzymamy równania zredukowanego modelu obiektu:

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_{po}\bar{u} + F_{po}w, \tag{13a}$$

$$y_p = C_p x_p, \tag{13b}$$

gdzie: $A_p = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$, $B_{po} = B_p - A_2 A_4^{-1} B_f$, $F_{po} = F_p - A_2 A_4^{-1} F_f$.

Przedstawione w pracach [3,4,5] metody konstruowania układu sterowania, dla zredukowanego modelu obiektu z całkowicie rozsprzężonymi postaciami drgań, można z równym skutkiem zastosować dla zredukowanego modelu obiektu (13), w którym nie ma całkowitego rozsprzężenia postaci. Tym samym opisane w wyżej podanych pracach metody mogą być wykorzystane w układach aktywnego sterowania drganiami dowolnego wirnika, którego dynamika daje się opisać modelem liniowym.

LITERATURA

[1] Magnetic Bearing. Ed. G.Schweitzer. Springer-Verlag, Berlin 1988.

[2] Orłowski H.: Komputerowe układy automatyki. WNT, Warszawa 1987.

[3] Gosiewski Z.: Rotor Vibration Control, Part I and II. Proc. "Rotating Machinery Dynamics" of 11th ASME Conf. Vibrations and Noise, Boston 1987.

[4] Gosiewski Z.: Digital Control of Rotor Vibrations. Proc. 2nd Symp. Transport Phenomena, and Dynamics in Rotating Machinery, Honolulu 1988.

[5] Gosiewski Z.: A Method of Rotor Vibration Control via Micro-Processor. Proc. "Rotating Machinery Dynamics" of 12th ASME Conf. Vibrations and Noise, Montreal 1989.

[6] Adams M.L.: Insights into Linearized Rotor Dynamics - Part 2. J. Sound and Vibration, 112(1), 1987, s.97-110.

[7] Gosiewski Z.: Aktywne sterowanie drganiami wirników. Wydawnictwa WSI Koszalin, 1989.

[8] Meirovitch L., Ryland G.: A Perturbation Technique for Gyroscopic Systems with Small Internal and External Damping. J. Sound and Vibration, 100(3), 1985, s.393-408.

[9] Hasslinger H.L.: A general perturbation theory for large discrete linear dynamical systems. Ingenieur-Archiv, 57, 1987, s.61-72.

[10] Meirovitch L.: A New Method of Solution of the Eigenvalue Problem for Gyroscopic Systems. AIAA Journal, 12(10), 1974, 1337-1342.

МОДЕЛЬ РОТОРА КАК ОБЪЕКТ РЕГУЛИПОВКИ

Резюме

В работе рассматривается метод редукции модели гибкого ротора. Используя метод пертурбации преобразовано общую модель ротора б гласи-модальний вид. Виды колебаний разделено на регулируемыйе и нерегулирумые. Вводя некоторый маленький параметр произведено редукцию модели.

ROTOR MODEL AS CONTROL PLANT

Summary

A method of the reduction of flexible rotor model for the control purposes is presented in the paper. By using the perturbation method the global rotor model is coverted into a quasi-modal form. Vibration modes are divided into controlled and noncontrolled ones. The introduction of small parameter allows the rotor model to be reduced.