ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MECHANIKA z.99 Nr kol. 1057

SYMPOZJON "MODELOWANIE W MECHANICE"
POLSKIE TOWARZYSTWO MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ
Beskid Śląski, 1990

Wiesław Ostachowicz, Marek Krawczuk
Instytut Maszyn Przepływowych - PAN Gdańsk

ANALIZA DRGAŃ BELKI ZE SZCZELINĄ

Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę wpływu wielkości i położenia szczeliny na amplitudę drgań wymuszonych siłą okresową i częstości drgań własnych belki utwierdzonej. Układ modelowano belkowymi elementami skończonymi o dwóch węzłach iczterech stopniach swobody w węźle. W miejscu szczeliny wprowadzono specjalny element belkowy ze szczeliną. Do obliczania częstości drgań własnych zastosowano metodę Jacobiego, równanie ruchu drgań wymuszonych całkowano metodą Newmarka.

1. Wstęp

Szczeliny w elementach maszyn powstają na skutek różnorodnych przyczyn; mogą być to uszkodzenia mechaniczne, erozja, korozja lub w przypadku elementów eksploatowanych w zakresie ograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej, zmęczenie materiału .

Szczeliny w istotny sposób wpływają na charakterystyki dynamiczne pracujących elementów. W miejscu istnienia szczeliny następuje lokalna zmiana sztywności konstrukcji. Ponieważ sztywność ta zmienia się w obszarze rozpatrywanego elementu konstrukcyjnego, charakterystyki dynamiczne zależne są od umiejscowienia szczeliny, jej rozmiarów a także rozpatrywanej postaci drgań.

Do chwili obecnej powstało kilka modeli służących do analizy drgań układów ze szczelinami [1 - 4]. W prostych przypadkach szczelinę modelowano liniową sztywnością zastępczą [1,2], w bardziej skomplikowanych wykorzystano metodę elementów skończonych [3,4]

W niniejszej pracy przedstawiono analizę drgań belki utwierdzonej ze szczeliną. Określono wpływ wielkości i położenia szczeliny na amplitudę drgań wymuszonych i częstości drgań własnych.

2. Równania ruchu

2.1. Drgania wymuszone

Równania ruchu w przypadku drgań wymuszonych przyjmą powszechnie postać [5]

$$\mathbb{M}\ddot{q} + \mathbb{C}q + \mathbb{K}q = F^{0} \sin \omega t, \tag{1}$$

gdzie: $\mathbb{M}, \mathbb{C}, \mathbb{K}$ – macierze globalne bezwładności tłumienia i sztywności układu [5],

q – wektor przemieszczeń uogólnionych,

F^{0} – amplituda siły wymuszającej,

ω – częstość wymuszeń.

Do rozwiązania równania (1) zastosowano metodę bezpośredniego całkowania (Newmarka).

2.2. Drgania własne

Częstości drgań własnych i postacie tych drgań obliczamy rozwiązując zagadnienie własne

$$(\mathbb{K} - \omega^{2} \mathbb{M}) q^{\circ} = \mathbb{0}. \tag{2}$$

Równanie (2) przedstawiamy w postaci:

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I} \omega^{2}) \mathbf{x}^{0} = \mathbb{0}, \tag{3}$$

gdzie: $\mathbb{A} = \mathbb{M}_{D}^{-1} \cdot \mathbb{K} \cdot \mathbb{M}_{G}^{-1}$

$\mathbb{I}$ – macierz jednostkowa,

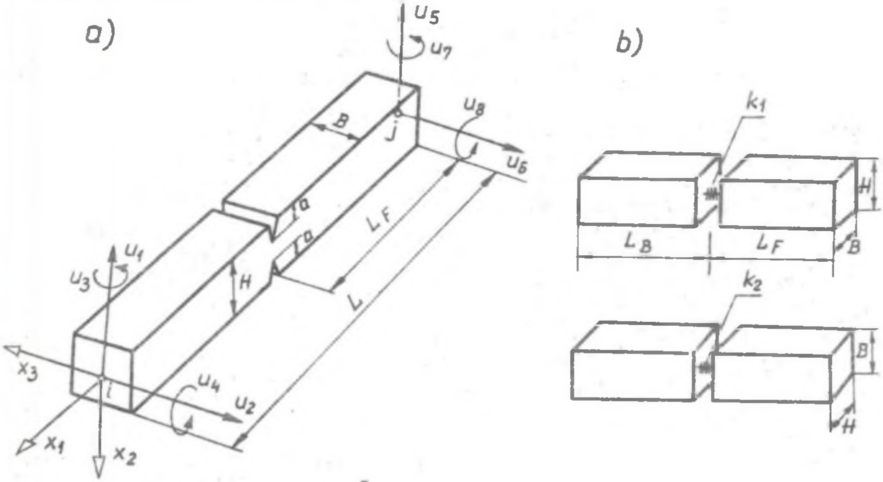
$\mathbf{x}^{0} = \mathbb{M}_{G} \cdot q^{0}$,

$\mathbb{M}_{G}, \mathbb{M}_{D}$ – górna i dolna macierz trójkątna otrzymana z macierzy $\mathbb{M}$.

Z równania (3) wyznaczamy częstości drgań własnych i postacie tych drgań (np. metodą Jacobiego [5]).

3. Element belkowy ze szczeliną

Element belkowy ze szczeliną o dwóch węzłach i czterech stopniach swobody w węźle przedstawiono na rys. 1 [6]



Rys. 1a) Element belkowy ze szczeliną,
1b) Sztywności zastępcze w miejscu szczelin; k_1-współczynnik sztywności zginania względem osi x_3, k_2-współczynnik sztywności zginania względem osi x_2

Stosując prawa mechaniki pękania, można obliczyć współczynniki zastępczej sztywności zginania elementu : [1]

w płaszczyźnie $x_1 - x_2$:

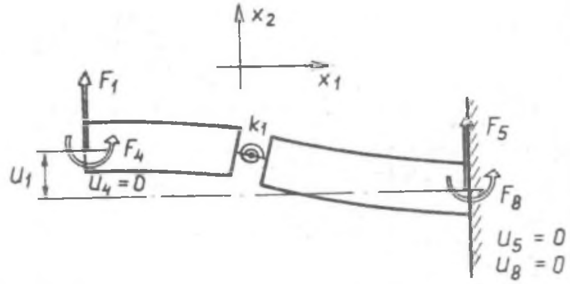
$$\frac{1}{k_1} = \frac{36\pi\gamma^2}{BH^2E}\left(0.5033 - 0.9022\gamma + 3.412\gamma^2 - 3.181\gamma^3 + 5.793\gamma^4\right), \quad (4)$$

w płaszczyźnie $x_2 - x_3$:

$$\frac{1}{k_2} = \frac{36\pi\gamma^2}{B^3E}\left(0.259 - 0.3186\gamma + 0.5052\gamma^2 - 0.2914\gamma^3 + 0.2008\gamma^4\right), \quad (5)$$

gdzie : $\gamma = \frac{2a}{H}$ - wysokość względna szczeliny.

Elementy macierzy sztywności można obliczyć na podstawie twierdzenia Castigliano, zmieniając kolejno unieruchomione stopnie swobody elementu skończonego. Poniżej przedstawiono przykład obliczania wyrazu $K_{1,1}$. Obciążenie elementu przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Zginanie elementu w płaszczyźnie $x_1 - x_2$

Przemieszczenie u_4 obliczamy ze związku:

$$u_4 = \frac{\partial U}{\partial F_4} = \int_0^l \left(\frac{V}{GA}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial F_4}\right)dx + \int_0^l \left(\frac{M}{EJ_3}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial F_4}\right)dx + \left(\frac{M}{k_1}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial F_4}\right)\Big|_{x=l_B} = 0. \quad (6)$$

Zakładając $V = F_1$, $M = F_1x - F_4$ z równania (6) otrzymujemy związek pomiędzy siłami uogólnionymi F_1 i F_4,

$$F_4 = \frac{F_1 \cdot \left(\frac{l^2}{2EJ_3} + \frac{l_B}{k_1}\right)}{\left(\frac{l}{EJ_3} + \frac{1}{k_1}\right)} . \quad (7)$$

Przemieszczenie u_1 obliczamy ze związku:

$$u_1 = \frac{\partial U}{\partial F_1} = \int_0^l \left(\frac{V}{GA}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial F_1}\right)dx + \int_0^l \left(\frac{M}{EJ_3}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial F_1}\right)dx + \left(\frac{M}{k_1}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial F_1}\right)\Big|_{x=l_B} . \quad (8)$$

Sztywność $K_{1,1}$ jest definiowana jako stosunek siły F_1 do przemieszczenia u_1. Podstawiając (7) do (8) otrzymujemy:

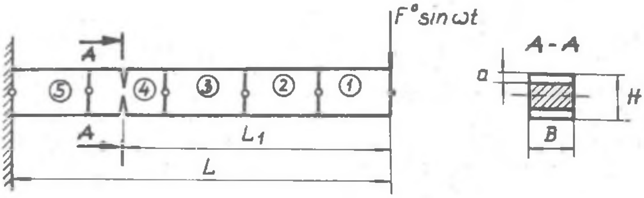
$$K_{1,1} = \frac{\left(\frac{l}{EJ_3} + \frac{1}{k_1}\right)}{\left(\frac{l}{GA} + \frac{l^3}{3EJ_3} + \frac{l_B^2}{k_1}\right)\left(\frac{l}{EJ_3} + \frac{1}{k_1}\right) - \left(\frac{l^2}{2EJ_3} + \frac{l_B}{k_1}\right)^2} \quad (9)$$

gdzie : E – moduł Younga,
G – moduł Kirchoffa,
I_3 – geometryczny moment bezwładności przekroju względem osi x_3

4. Przykład obliczeń

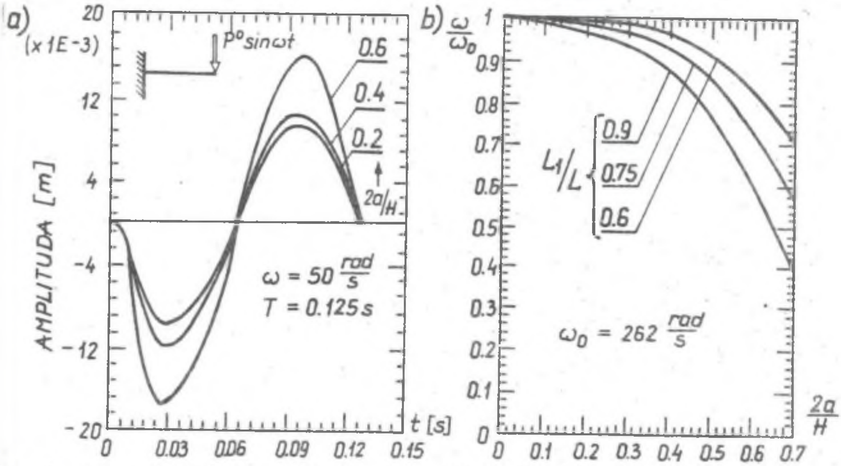
Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla układu przedstawionego na rys.3. Do obliczeń przyjęto następujące dane :

$\rho = 7860\ kg/m^3$	$L = 1.0\ m$
$E = 2.1 \cdot 10^{11}\ N/m$	$L_1/L = 0.6;\ 0.75;\ 0.9$
$G = 8.15 \cdot 10^{10}\ N/m$	$B \times H = 0.05 \cdot 0.05\ m$
$\nu = 0.3$	$F^{\circ} = 2000\ N$
	$\omega = 50\ rad/s$



Rys. 3. Model obliczeniowy

Belkę modelowano pięcioma elementami skończonymi, przy czym jeden z elementów zawierał szczelinę. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Wpływ wielkości szczeliny : a) amplituda drgań wymuszonych
b) częstość drgań własnych

5. Wnioski

Analiza wyników obliczeń prowadzi do następujących wniosków :

1. Częstości i amplitudy drgań zależą od dwóch parametrów, położenia szczeliny (L_1/L) oraz jej wielkości ($2a/H$).
2. Na podstawie analizy zmian częstości drgań własnych możliwa jest identyfikacja położenia szczeliny i jej wymiarów.

W celu weryfikacji opisanego w pracy modelu konieczne jest przeprowadzenie badań doświadczalnych.

LITERATURA

[1] Ju.F.D.,Akgun M., Paez T.L., Wong E.T.: Diagnosis of fracture damage in simple structures. Burean of Engineering Research Report No.CE-62(82) AFOSR-993-1, University of New Mexico, Albuquerque, NM. (1982).

[2] Anifantis N., Dimarogonas A.: Stability of colums with a single crack subjected to follower and vertical loads. An International Journal Solids Structures (1983) Vol. 19, No.4, pp. 281 - 291.

[3] Gounaris G., Dimarogonas A.: A finite element of a cracked prismatic beam for structural analysis. An International Journal Computers and Structures, (1988), Vol. 28. No.3, pp. 309 - 313.

[4] Dirr B.O, Schmalhorst B.K.: Crack depth analysis of a rotating shaft by vibration measurement. ASME Design Technology Conferences (1987), pp. 607 - 614.

[5] Zienkiewicz O.C.: Metoda Elementów Skończonych, Warszawa 1972, "Arkady".

[6] Haisty B.S, Springer W.T.: A general beam for use in damage assessment of complex structures. ASME Journal of Vibration Aconstics, Stress, and Reliability in Design (1988) Vol. 110, pp, 389 - 394,

АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С ТРЕЩИНОЙ

Резюме

В работе показано анализ влияния положения и величины трещины на частоту и амплитуду колебаний балки. Балки моделировано балковыми конечными элементами с трещинами. Частоту колебаний рассчитано при помощи методы Якобего, уравнение движения решено методой Нюмарка.

VIBRATION ANALYSIS OF A CRACKED BEAM

Summary

The paper presents the effect of the location and magnitude of a crack on the values of amplitude of forced vibration and free vibration frequencies. The beam is modeled by a beam finite elements with crack. Free vibration frequencies were calculated by Jacobi method, eguation of motion was integrated using Newmark method.