ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: MECHANIKA z.99 Nr kol. 1057

SYMPOZJON "MODELOWANIE W MECHANICE"
POLSKIE TOWARZYSTWO MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ
Beskid Śląski, 1990

Лонгин Зория, Николай Яцкилка
Львовский Политехнический Институт

# КРИТИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВАЛОВ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Резюме : Излагается способ приближенного определения критических значений угловых скоростей вращения неоднородных упругих валов, основанным на методе частичной дискретизации. Пасмотрены валы шарнирно опертые и консольные. Даны примеры, иллюстрирующие предлагаемой способ.

## 1. Введение

Для упругих валов вращающихся с некоторой угловой скоростью $\omega$ вокруг неподвижной оси, которая совпадает с недеформированной прямолинейной осью, существвет критическое значения $\omega_{kp}$ [1]. Оии совпадают, как известно, с частотами колебании вала. При этом наибольшее практическое значение имеют частоты. Задача их определения для валов с произвольным распрепеллением параметров является важной, но в то же время может оказыбатюся трудной. Ниже показывается, что к решению указаных задач целесообразно применять метод частичной дискретизации [2-4].

## 2. Коэффицентные влияния и дифферецнальные управления движения

Расматривается упругой вал переменного поперечного сечения, ось которого направлена слева направо по прямой 0x. Пусть в точках $x_i$ вала сосредоточены массы $M_i$ маховиков (в сравнении с ними распределенной массой вала пренепрегаем); при этом выполняются неравенства

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < L; \qquad \text{(L-длина вала)}.$$

Для определения собственных частот поперечных колебании вала составляем около прямолинейного состаяния равновесия в так называемой "обратной форме" [1] :

$$\sum_{j=1}^{n} M_i \beta_{ij} \frac{d^2 y_j}{dt^2} + y_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \quad , n) \tag{1}$$

Здесь $\beta_{ij}$ – соотвествующие коэффициенты влияния. Они определяются из универсального управления упрыгой линии при задачных условях закрепления концевых сочении вала [2].

Расмотрим случаи шарнирных опор и консольного закрепления (левого конца). При этом, считая $x_i =< x_j$, можно сооcтветственно использовать формулы :

$$\beta_{ij} = K(L, x_j)\frac{x_i}{L} + (1 - \frac{x_j}{L}) \left[K(L,0)\frac{x_i}{L} - K(x_i, 0)\right] \tag{2}$$

$$\beta_{ij} = - x_j \dot{K}(x_i, 0) - K(x_i, 0) \tag{3}$$

Одновременно следует учитывать, $\beta_{ji} = \beta_{ij}$ (это равенство, вытекающие из известной теоремы Максвелла о взаимности перемещений, можно доказать непосредственно, использовав формулу, аналогичныю (2) или (3).

В формулах (2,3) $K(x, \alpha)$ – функция Коши, которая определаются так :

$$K(x,\alpha) = \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{f(s)} (x-s)(s-\alpha) ds \tag{4}$$

Здесь $f(x) \equiv EJ(x)$ – жесткость вала при поперечном изгибе $\alpha$ – параметр, точкой на функцей $K$ в формуле (3) обозначена ее частнота по $\alpha$.

Часточное управление, отвечающие системе дифференциальных упавлехий (1), имеет такои вид [2] :

$$1 - a_1 p^2 + a_2 p^4 - \; .....+(-1)^n - a_n p^{2n} = 0 \tag{5}$$

где

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n} M_i \beta_{ii} ; \qquad a_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^{n} M_i \; M_j \begin{vmatrix} \beta_{ii} & \beta_{ij} \\ \beta_{ji} & \beta_{jj} \end{vmatrix} ;$$

$$a_3 = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j>i}^{n-1} \sum_{k>j}^{n} M_i \; M_j \; M_k \begin{vmatrix} \beta_{ii} & \beta_{ii} & \beta_{ii} \\ \beta_{ii} & \beta_{ii} & \beta_{ii} \\ \beta_{ii} & \beta_{ii} & \beta_{ii} \end{vmatrix} ;$$

$$a_n = M_1 M_2 \ldots M_n \begin{vmatrix} \beta_{ii} & \beta_{ii} & \cdot & \beta_{ii} & \beta_{ii} \\ \beta_{ii} & \beta_{ii} & \cdot & \beta_{ii} & \beta_{ii} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{ii} & \beta_{ii} & \cdot & \beta_{ii} & \beta_{ii} \\ \beta_{ii} & \beta_{ii} & \cdot & \beta_{ii} & \beta_{ii} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

P - параметр частоты.

Заметим, что корни $P_i^2$ управления (5) всегда вещестенными и положительными (это вытекает из смысла рассматрибаемой задачи).

## 3. Пример решения задачи для вала шарнирными опорами

Обозначим :

$x_1 = l,\ x_2 = 2l,\ L = 3l,\ f_1 = f_3 = k_1 f,\quad f_2 = k_2 f \quad (f = \text{const}).$

$f_1 f_3$ - изгибхая жесткость при $0 =< x =< l$ и $2l < x =< L$;

$f_2$ - изгибная жесткость при $l < x =< 2l$.

Используя формулы (2) и (4), находим

$$K(l,0) = \frac{l^3}{6k_1 f}; \quad K(3l,0) = \frac{l^3}{3f}\left[\frac{7}{k_1} + \frac{13}{2k_2}\right];$$

$$K(3l,l) = \frac{2l^3}{3f}\left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right]; \quad K(3l,2l) = \frac{l^3}{6k_1 f} \qquad (7)$$

$$\beta_{11} = \beta_{22} = \frac{l^3}{54k_1 f}\left[\frac{10}{k_1} + \frac{14}{k_2}\right];$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \frac{l^3}{54k_1 f}\left[\frac{8}{k_1} + \frac{13}{k_2}\right] \qquad (8)$$

Следовательно,

$$a_1 = (M_1 + M_2)\ \beta_{11}; \qquad a_2 = M_1 M_2\ (\beta_{11}^2 - \beta_{12}^2)$$

При этом дискриминант часточного управления (бинвадратного) приводится к такому виду

$$D = \beta_{11}^2 (M_1 - M_2)^2 + 4\ M_1 M_2\ \beta_{12}^2 \qquad (10)$$

Очевидно, $D>0$ и $a_2>0$; поэтому корни всегда положителны и вещественны. Они определяются формулой :

$$P_{1,2}^2 = \frac{1}{2a_2}\left[a_1 \mp \sqrt{D}\right] \qquad (11)$$

Заметим, что при $M_1=M_2=M$ эти формулы квадратов частот становятся особенно простыми :

$$P_1^2 = \frac{1}{M\ (\beta_{11}+\beta_{22})}\ ;\ P_2^2 = \frac{1}{M\ (\beta_{11}-\beta_{12})} \qquad (12)$$

Учитывается (8), отсюда получаем критические значения угловой скорости рассмотренного ступенчатого вала с двумя одиноковыми маховинками :

$$\omega_1^2 = \frac{6EJ}{Ml^3\left[\frac{2}{k_1}+\frac{3}{k_2}\right]};\qquad \omega_2^2 = \frac{54EJ}{Ml^3\left[\frac{2}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right]}; \qquad (13)$$

Расмотрим некоторые частные случаи.

а)

$$K_1 = K_2 = 1;\qquad \omega_1^2 = \frac{6}{5}\frac{EJ}{Ml^3};\qquad \omega_2^2 = 18\frac{EJ}{Ml^3} \qquad (14)$$

Отсюда, учитывая, что $l = \frac{1}{3}L$, проходим к известным значениям [5] :

$$\omega_1 = 5.69\ A;\qquad \omega_2 = 22.04\ A;\qquad A = \sqrt{\frac{EJ}{ML^3}} \qquad (15)$$

б) поступая аналогично, составляем таблицу. В ней параметр $\varepsilon$ ыдовлеттваряет неревенству $0<\varepsilon<<1$.

| $K_1$ | $K_2$ | $\omega_1/A$ | $\omega_2/A$ | $\omega_2/\omega_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\infty$ | 9.00 | 27.00 | 3.00 |
| $\infty$ | 1 | 7.35 | 38.18 | 5.19 |
| 1 | $\varepsilon\to0$ | $7.35\varepsilon$ | $38.18\varepsilon$ | 5.19 |
| $\varepsilon\to0$ | 1 | $9.00\varepsilon$ | $27.00\varepsilon$ | 3.00 |

Как видно, изменением жеткости участков вала можно сильно вливать на критическое значения угловых скорости.

Аналолично можно решать более сложные задачи, в частности, при других граничных условиях. Отметим также, что если вал хе несет маховинков, то для применения метода следует произвести дискретизацию распределенной массы (то же самое при необходимости ее учета в задачах для валов с маховинками) [2,4].

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Бабаков И.М.:Теория колебании. -М.:Наука, 1968.

[2] Зорин Л.М.:Применение фундаментальных решень в задачах статики и динамики упругих систем с переменным распределением параметров. Львов, ЛПИ, 1988.

[3] Расчеты и испытания на прочность. Методические рекомендации МР 213-87.

[4] Зорин Л.М.:Метод частичных дискретизации в задачах упругих систем с переменным распределением параметров. Всесоюзная конференция по дифференционым управлениям. -М.:1987.

[5] Яблонский А.А., Норейко С.С.:Курс теории колебаний.-М.:"Высша школа", 1975.

## PRĘDKOŚCI KRYTYCZNE WAŁÓW WIRUJĄCYCH O ZMIENNYM PRZEKROJU

### Streszczenie

W przedstawiono sposób obliczania przybliżonych wartości krytycznych prędkości kątowych dla sprężystych niejednorodnych wałów wirujących, bazujący na metodzie dyskretyzacji częściowej. Rozpatrzono wały podparte przegubowo oraz wspornikowe. Podano przykłady ilustrujące zaproponowany sposób.

## CRITICAL SPEEDS OF ROTATING SHAFTS WITH VARIABLE CROSS-SECTION

### Summary

The paper presents the way of obtaining approximate critical values fo angular speeds of rotating heterogenous elastic shafts which is based on the method of partial discretization. Hingled and cantilever shafts are regarded in the paper. The method is illustated by examples.