

Andrzej WILK
Tomasz MATYJA
Piotr FOLEGA

ANALIZA WPŁYWU CECH KONSTRUKCYJNYCH KOŁA WEWNĘTRZNIE ZĘBIONEGO I NARZĘDZIA NA NAPRĘŻENIA W PODSTAWIE ZĘBA

Streszczenie. W pracy przedstawiono zastosowanie *Metody Elementów Brzegowych* w numerycznej analizie wytrzymałości zębów kół. W wykonanych obliczeniach przedstawiono wpływ cech konstrukcyjnych koła zębatego oraz cech konstrukcyjnych narzędzia (dłutaka) na wartości naprężeń w stopie zęba koła wewnętrznie zębionego.

THE ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF CONSTRUCTION FEATURES OF AN INTERNAL GEAR AND OF A TOOL ON STRESSES IN THE BASE OF A TOOTH

Summary. In the elaboration there has been presented the use of the Boundary Elements Method in the numerical analysis of the resistance of the wheels' gears. In the made calculation there has been presented the influence of the construction features of gear wheel and construction features of the tool (gear-shaper cutter) on the values of stresses in the base of an internal gear tooth.

1. Wprowadzenie

Dążenie do zmniejszenia wymiarów przekładni zębatych, a także wzrost obciążeń roboczych wpływają na zwiększenie sił działających na zęby. Potrzeba spełnienia wysokich wymagań stawianych przekładniom zębatym powoduje, że prowadzi się ciągle badania w celu zwiększenia ich wytrzymałości.

Ważnym zagadnieniem dotyczącym obliczeń wytrzymałościowych kół zębatych jest ocena wpływu cech konstrukcyjnych koła zębatego oraz narzędzia na wartości naprężeń w stopie zęba koła zębatego.

Jedną z najprostszych metod obliczeniowych pozwalających na określenie naprężeń w podstawie zęba koła zębatego jest metoda łamanych przekrojów [1]. Metoda ta za pomocą elementarnych sposobów znanych z wytrzymałości materiałów daje jakościowo dobry obraz sta-

nu naprężenia w podstawie zęba, uwzględniając naprężenia wywołane momentem gnącym, siłą ścinającą oraz siłą ściskającą. Jednakże wyniki obliczeń tą metodą nie są wystarczająco dokładne z uwagi na zbyt uproszczony model obliczeniowy zęba.

Drugą z najbardziej rozpowszechnionych i zaakceptowanych metod służących do określania naprężeń w podstawie zęba jest metoda odwzorowań wiernokątnych (*MOW*). Oparta jest ona na odwzorowaniach wiernokątnych pozwalających wykorzystać znane rozwiązania dla półprzestrzeni sprężystej. Metoda ta została rozwinięta i przystosowana do obliczeń numerycznych przez *L. Müllera* [2]. Jedną z głównych zalet *MOW* jest fakt, że otrzymuje się zadowalające wartości naprężeń w podstawie zęba przy założeniu kilku punktów na zarysie stopy zęba. Zaleta ta okupiona jest jednak koniecznością rozwiązywania układu nieliniowych równań algebraicznych, co stwarza problemy natury numerycznej. Do głównych wad *MOW* należy jednak przede wszystkim brak uniwersalności. Zastosowanie *MOW* do obliczeń naprężeń w kołach wewnątrznie uzębionych napotyka na znaczne trudności [3].

Metodami zapewniającymi obecnie największą dokładność uzyskanych wyników naprężeń w podstawie zęba oraz uniwersalność zastosowania w zębach o dowolnej geometrii kół wewnątrznie i zewnątrznie uzębionych są numeryczne metody analizy stanu naprężenia. Należą do nich *Metoda Elementów Brzegowych (MEB)* oraz *Metoda Elementów Skończonych (MES)*.

W niniejszej pracy podjęto próbę zastosowania *Metody Elementów Brzegowych* w obliczeniach wytrzymałościowych kół zębatych. W tym celu opracowano programy komputerowe służące do analizy stanu naprężenia i przemieszczeń zębów kół zębatych. W pracy wykonano szereg obliczeń wartości naprężeń w stopach zębów kół wewnątrznie uzębionych. Obliczenia te dotyczą w szczególności następujących zagadnień :

- wpływu parametrów konstrukcyjnych nacinanego koła zębatego na wartości naprężeń w stopie zęba,
- wpływu parametrów konstrukcyjnych narzędzia (dłutaka) na wartości naprężeń w stopie zęba.

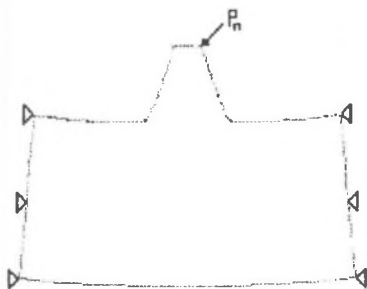
2. Zastosowanie MEB do wyznaczania naprężeń w podstawie zębów kół wewnątrznie uzębionych

Metoda Elementów Brzegowych [3], [4], [5] jest metodą przybliżoną, mającą za podstawę analitycznie sformułowanie zadania brzegowego w postaci układu brzegowych równań całkowych, umożliwia ich przybliżone rozwiązanie przez dyskretyzację brzegu ciała elementami

brzegowymi oraz aproksymację funkcji brzegowych za pomocą funkcji interpolacyjnych. W wyniku takiej procedury otrzymuje się układ równań algebraicznych, w którym niewiadome występują tylko na brzegu ciała.

Koła wewnętrznie uzębione wykonuje się za pomocą dłutaka. O kształcie zęba, a zwłaszcza jego stopy, decydują parametry nacinanego koła (liczba zębów, współczynnik przesunięcia zarysu) oraz parametry samego dłutaka (liczba zębów dłutaka, współczynnik korekcji zębów dłutaka, wysokość głowy dłutaka, kąt zarysu, promień zaokrąglenia głowy dłutaka). Wszystkie te parametry mają bardzo istotny wpływ na kształt stopy zęba, a tym samym na wartości naprężeń tam występujących.

Zastosowanie *MEB* do efektywnych i dokładnych obliczeń wytrzymałościowych zębów wymaga wcześniejszego przyjęcia modelu fizycznego i matematycznego zęba. Model fizyczny obejmuje nie tylko własności fizyczne tworzywa, z którego wykonany jest ząb, ale także sposób obciążenia i podparcia.



Rys. 1. Sposób obciążenia i podparcia zęba wykorzystywany w obliczeniach *MEB*

Fig. 1. The way of ballasting and supporting of a tooth used in the BEM calculations

Te ostatnie czynniki decydują ostatecznie o prawidłowym sformułowaniu zadania brzegowego, które należy rozwiązać za pomocą *MEB*. Wykonane obliczenia dotyczą zębów stałowych obciążonych jednostkową siłą skupioną w górnej części zarysu oraz podpartych w sposób przedstawiony na rys. 1.

W programie komputerowym do obliczeń współrzędnych punktów zarysu zębów wykorzystano algorytm *Mullera* [2]. Wszystkie wymiary zębów zostały odniesione do modułu, co pozwoliło uzyskać parametry geometryczne zarysu zęba oraz wyniki obliczeń w wielkościach bezwymiarowych.

W obliczeniach rozpatrywano wyodrębniony z koła zębatego pojedynczy ząb pomijając wpływ sąsiednich zębów. Ze względu na minimalny wpływ na wartości naprężeń w stopie zęba przyjęto we wszystkich obliczeniach głębokość utwierdzenia równą 5.

Przyjęto następującą umowę dotyczącą znaków podstawowych cech geometrycznych kół zębatych :

- 1) koła zewnętrznie uzębione mają liczbę zębów dodatnią ,
- 2) koła wewnętrznie uzębione mają liczbę zębów ujemną ,
- 3) współczynnik przesunięcia zarysu (zęby korygowane) jest dodatni, gdy narzędzie odsuwane jest od materiału bez względu na to, czy jest to koło zewnętrznie, czy wewnętrznie uzębione,
- 4) współczynnik przesunięcia zarysu (zęby korygowane) jest ujemny, gdy narzędzie wsuwane jest w głąb materiału bez względu na rodzaj ząbienia.

2.1. Wpływ cech konstrukcyjnych koła zębatego na naprężenia w stopie zęba koła wewnętrznie uzębionego

Celem przeprowadzonych obliczeń było ustalenie wpływu na wartości naprężeń po rozciąganej stronie zęba cech konstrukcyjnych nacinanego koła, takich jak liczba zębów oraz współczynnik przesunięcia zarysu przy stałych parametrach dółtaka.

Obliczenia wykonano przy założeniu dółtaka średnio zużytego o następujących parametrach [6],[7] :

- | | |
|--------------------------------------|----------------------|
| - liczba zębów | $z_0 = 25,$ |
| - współczynnik przesunięcia zarysu | $x_0 = 0,$ |
| - wysokość głowy dółtaka | $h_{\infty} = 1.3,$ |
| - kąt zarysu dółtaka | $\alpha_{ON} = 20,$ |
| - promień zaokrąglenia głowy dółtaka | $\rho_{\infty} = 0,$ |

dla przedziału liczby zębów koła $z \in \{-35, -40, -50, -60, -75, -100, -125, -150, -175, -200, -225, -250\}$ oraz przy założeniu następujących wartości współczynnika przesunięcia zarysu koła $x \in \{0.5, 0, -0.5, -1, -1.5, -2\}$. Wyniki przeprowadzonych obliczeń zilustrowano w postaci krzywych przedstawiających zależność naprężeń w stopie zęba w funkcji liczby zębów koła „z” dla stałych wartości współczynnika przesunięcia zarysu koła „x” ($Y_e = f(z)$ dla $x = const$).

Naprężenia podano w jednostkach bezwymiarowych :

$$Y_e = \sigma_{max} \cdot \frac{b \cdot m}{P_n}, \quad (1)$$

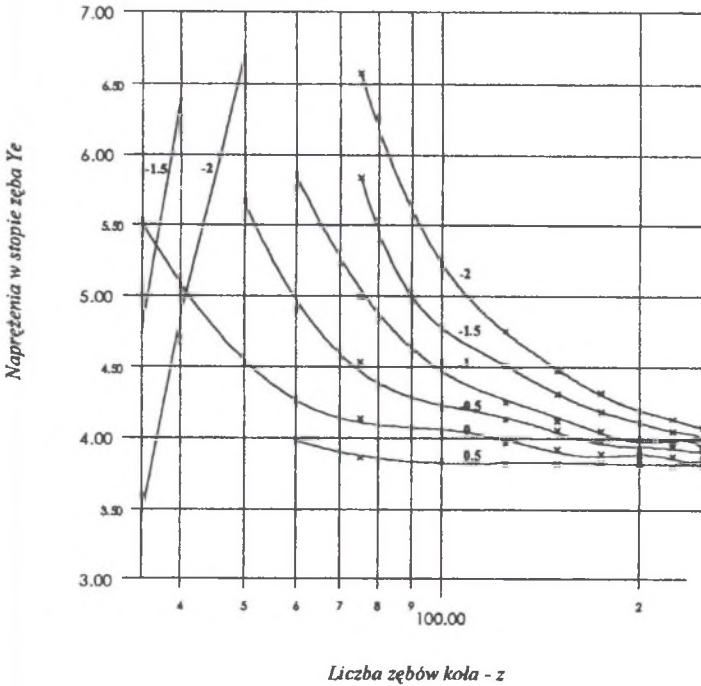
gdzie:

- σ_{max} - maksymalna wartość naprężenia na brzegu zęba ,
- b - szerokość koła zębatego ,

m - moduł zęba ,

P_n - wartość siły międzyzębnej.

Kształty tych krzywych przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Naprężenia w kole wewnętrznie uzębionym $Y_e = f(z)$ dla $x = const$

Fig. 2. Stresses in the internal gear $Y_e = f(z)$ for $x = const$

Rys. 2 przedstawiający krzywe ilustrujące zależność naprężeń w funkcji liczby zębów koła $Y_e = f(z)$ dla $x = const$ odpowiada wynikom, które uzyskano za pomocą MES [8].

Analizując krzywe przedstawione na rys. 2, można stwierdzić następujące cechy kół wewnętrznie uzębionych:

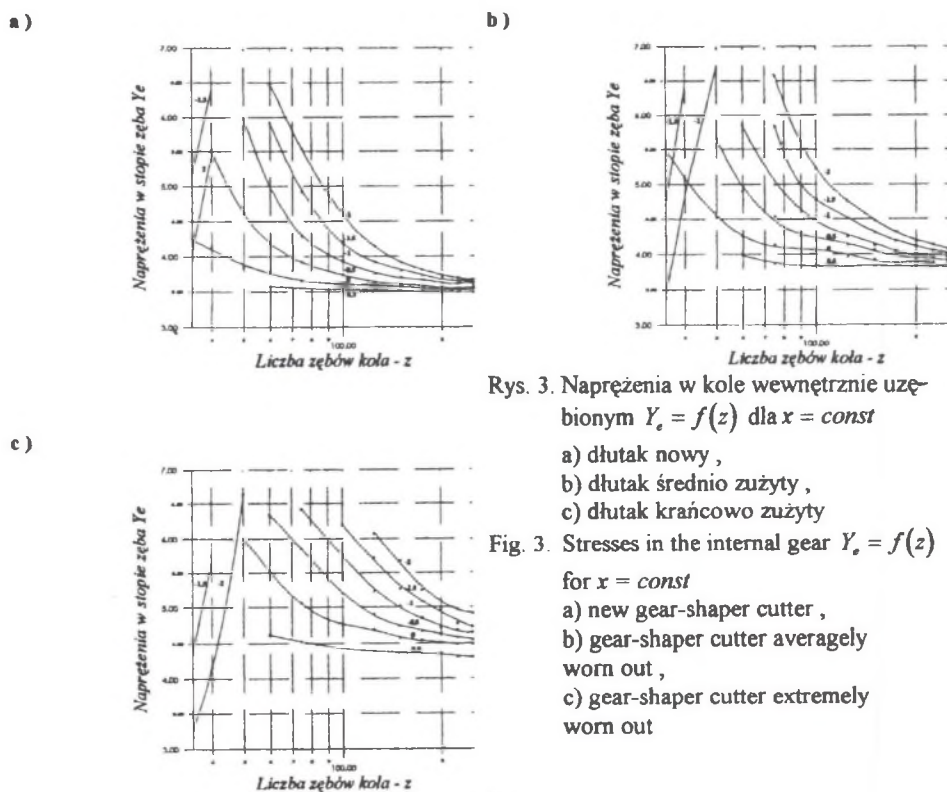
- przy założeniu danej liczby zębów w dętaku z_0 , istnieje taki zakres liczby zębów w kole wewnętrznie uzębionym oraz zakres wartości współczynnika korekcji koła, przy których promień zaokrąglenia stopy zęba zbliża się do zera, a wartości naprężeń silnie wzrastają,
- w przypadku małej liczby zębów koła stosowanie ujemnych wartości współczynnika

przesunięcia zarysu jest korzystne (mniejsze wartości naprężeń), natomiast dla większych wartości liczby zębów koła stosowanie ujemnych wartości współczynnika korekcji prowadzi do wzrostu wartości naprężeń.

2.2. Wpływ cech konstrukcyjnych narzędzia na wartości naprężeń

2.2.1. Wpływ współczynnika przesunięcia zarysu dółtaka

O kształcie zęba, a zwłaszcza jego stopy, decydują nie tylko parametry nacinanego koła (liczba zębów, współczynnik przesunięcia zarysu), ale także parametry dółtaka, które zmieniają się podczas ostrzenia narzędzia [8].



Dlatego interesujące jest, jaki wpływ na wartości naprężeń w stopie zęba ma stopień zużycia dłutaka wyrażający się stale malejącą wartością współczynnika korekcji narzędzia oznaczonego symbolem x_0 . Z tego powodu obliczenia przeprowadzono w dwóch krańcowych stanach stopnia zużycia dłutaka oraz przy założeniu jego stanu pośredniego, czyli przy założeniach :

- dłutaka nowego ($x_0 > 0$),
- dłutaka średnio zużytego ($x_0 = 0$),
- dłutaka krańcowo zużytego ($x_0 < 0$).

Obliczenia wykonano przy założeniu dłutaka o następujących parametrach [6],[7]:

- liczba zębów $z_0 = 25$,
- współczynnik przesunięcia zarysu $x_0 = 0.132$, $x_0 = 0$, $x_0 = -0.190$,
- wysokość głowy dłutaka $h_{ao} = 1.3$,
- kąt zarysu dłutaka $\alpha_{ON} = 20$,
- promień zaokrąglenia głowy dłutaka $\rho_{ao} = 0$.

Wyniki przedstawiono w postaci graficznej na rys. 3.

Analizując krzywe przedstawione w postaci zależności naprężeń w stopie zębów w funkcji liczby zębów koła na rys. 3 można stwierdzić następujące prawidłowości występujące w kołach wewnętrznie uzębionych :

- w przypadku dużej liczby zębów koła ($z \in -250 \div -60$) wartości naprężeń dla dłutaka nowego są najmniejsze, ze wzrostem stopnia zużycia dłutaka podczas ostrzenia narzędzia wzrastają naprężenia występujące w stopie zęba po jego rozciąganej stronie, w miejscu gdzie najczęściej występuje inicjacja pęknięcia zmęczeniowego. Inaczej jest w przypadku małej liczby zębów koła, dla której można stwierdzić stopniowy spadek wartości naprężeń ze wzrostem zużycia dłutaka.

2.2.2. Wpływ kąta zarysu dłutaka

Duży wpływ na wartości naprężeń w stopie zęba koła wewnętrznie uzębionego ma kąt zarysu narzędzia. Obliczenia wykonano dla trzech wartości tego kąta : $\alpha_{ON} = 25^\circ$, $\alpha_{ON} = 20^\circ$, $\alpha_{ON} = 15^\circ$.

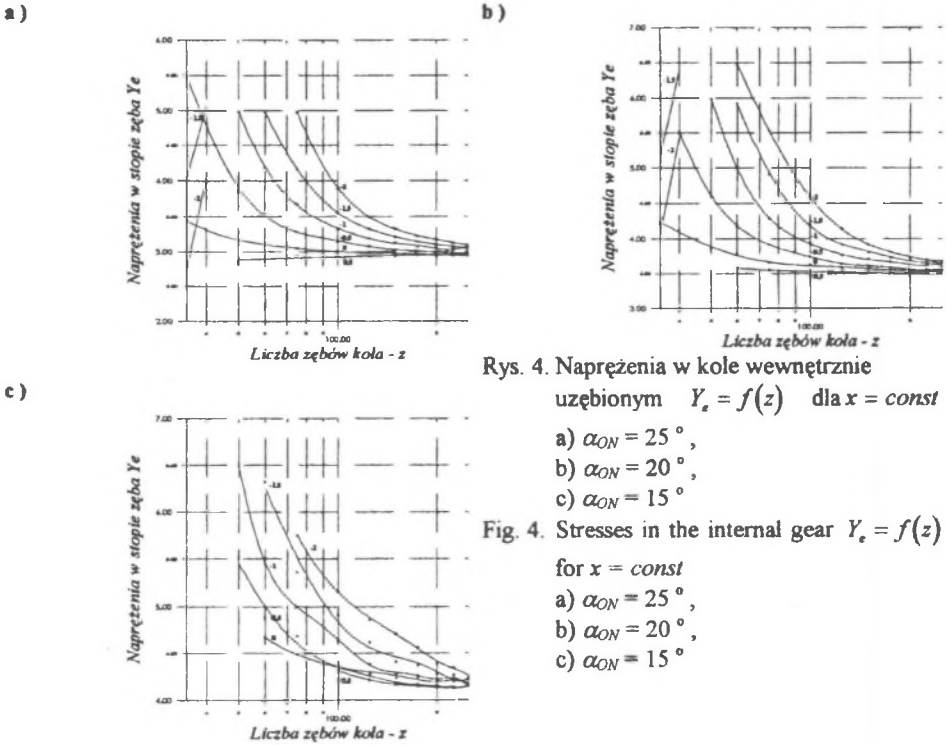
Obliczenia przeprowadzono przy założeniu :

dłutaka nowego o następujących parametrach [6],[7] :

- liczba zębów $z_0 = 25$,

- współczynnik przesunięcia zarysu $x_0 = 0.132$,
- wysokość głowy dętaka $h_{ao} = 1.3$,
- kąt zarysu dętaka $\alpha_{ON} = 25^\circ, \alpha_{ON} = 20^\circ, \alpha_{ON} = 15^\circ$,
- promień zaokrąglenia głowy dętaka $\rho_{ao} = 0$.

Wyniki przedstawiono w postaci graficznej na rys. 4.



Rys. 4. Napężenia w kole wewnątrznie uzębionym $Y_e = f(z)$ dla $x = const$

- a) $\alpha_{ON} = 25^\circ$,
- b) $\alpha_{ON} = 20^\circ$,
- c) $\alpha_{ON} = 15^\circ$

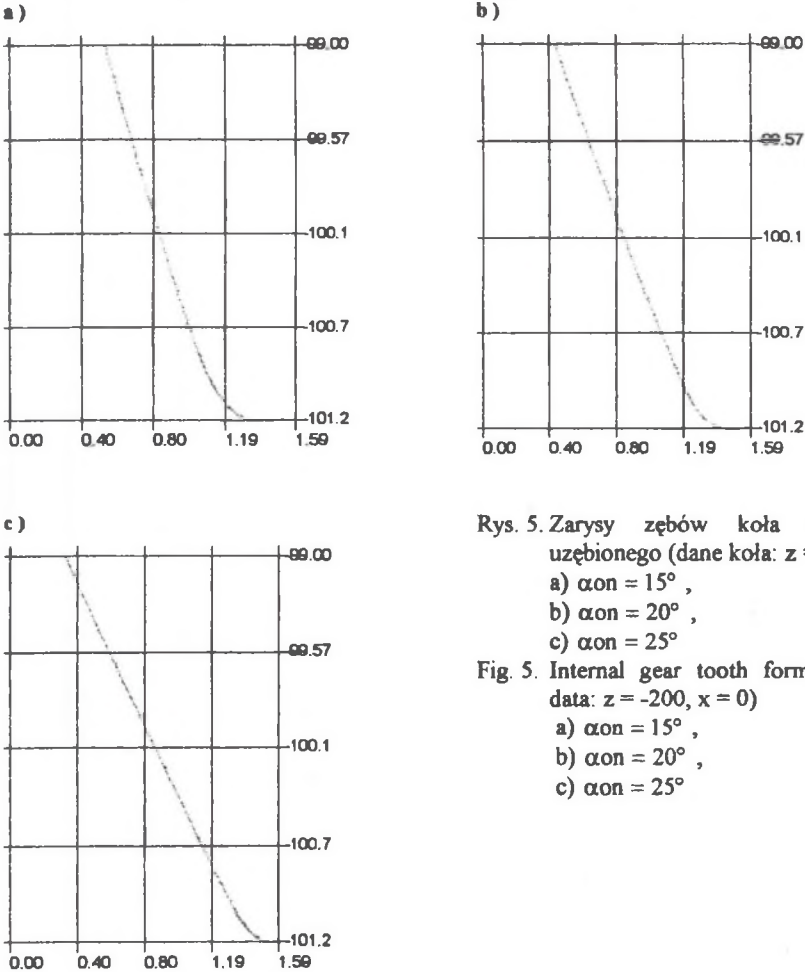
Fig. 4. Stresses in the internal gear $Y_e = f(z)$

for $x = const$

- a) $\alpha_{ON} = 25^\circ$,
- b) $\alpha_{ON} = 20^\circ$,
- c) $\alpha_{ON} = 15^\circ$

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić następującą prawidłowość dotyczącą wpływu kąta zarysu narzędzia na wartości naprężeń w stopie zęba :

- przy kącie zarysu dłutaka wynoszącym 25° wartości obliczonych naprężeń są najmniejsze. Natomiast dla $\alpha_{ON} = 20^\circ$ oraz $\alpha_{ON} = 15^\circ$ wartości otrzymanych naprężeń odpowiednio się zwiększają. Na zmniejszenie naprężeń w podstawie zęba ze wzrostem kąta zarysu narzędzia decydujący wpływ ma zwiększenie grubości zęba u podstawy zgodnie z rys. 5.



Rys. 5. Zarysy zębów koła wewnątrznie uzębionego (dane koła: $z = -200$, $x = 0$)

- a) $\alpha_{on} = 15^\circ$,
- b) $\alpha_{on} = 20^\circ$,
- c) $\alpha_{on} = 25^\circ$

Fig. 5. Internal gear tooth form (the gear's data: $z = -200$, $x = 0$)

- a) $\alpha_{on} = 15^\circ$,
- b) $\alpha_{on} = 20^\circ$,
- c) $\alpha_{on} = 25^\circ$

3. Uwagi końcowe i wnioski

W pracy przedstawiono obliczenia wytrzymałościowe kół zębatych z wykorzystaniem *Metody Elementów Brzegowych*. Otrzymane wyniki dotyczące naprężeń w podstawie zębów kół wewnątrznie uzębionych stawiają tę metodę na równi z innymi, wykorzystywanymi obecnie

metodami analizy stanu naprężenia w tych kołach. Zastosowanie *Metody Elementów Brzegowych* w obliczeniach wytrzymałościowych zębów kół zębatych umożliwia nie tylko ich numeryczną analizę wytrzymałości, ale także analizę wrażliwości oraz optymalizację kształtu zarysu podstawy zęba. Wyniki obliczeń numerycznych, a także badania doświadczalne wskazują, że na brzegu podstawy zęba występuje koncentracja naprężeń. Istotną rolę odgrywa tutaj promień karbu u podstawy zęba, który zależy od kształtu krzywej przejściowej.

W przeprowadzonej analizie numerycznej dotyczącej kół wewnętrznie uzębionych przedstawiono wpływ parametrów nacinanego koła zębatego oraz parametrów narzędzia (dłutaka) na wartości naprężeń w stopie zęba po jego rozciąganej stronie. Wszystkie wyniki zilustrowano w postaci graficznej, w formie wykresów. Wnioski, jakie wynikają z ich analizy, są następujące :

1. W przypadku małej liczby zębów koła stosowanie ujemnych wartości współczynnika przesunięcia zarysu koła jest korzystne, natomiast dla większych wartości liczby zębów koła szkodliwe.

2. Przy stałej liczbie zębów w dłutaku, istnieje taki zakres liczby zębów w kole wewnętrznie uzębionym oraz zakres wartości współczynnika korekcji koła, przy których promień zaokrąglenia stopy zęba maleje do zera, a wartości naprężeń silnie wzrastają.

3. W przypadku dużej liczby zębów koła ($z \in -250 \div -60$) naprężenia dla dłutaka nowego (o dodatniej wartości współczynnika przesunięcia zarysu) są najmniejsze; ze wzrostem zużycia dłutaka wzrastają wartości naprężeń w stopie zęba.

4. Wzrost wartości kąta zarysu narzędzia powoduje spadek wartości naprężeń w stopie zęba ze względu na zwiększenie grubości zęba u podstawy.

Literatura

1. Müller L.: *Przekładnie zębate - projektowanie*. WNT, Warszawa 1979.
2. Müller L.: *Obliczanie naprężeń w podstawie zęba*. ZN Pol. Śl. seria Transport , z. 8. Gliwice 1988.
3. Burczyński T. , Mrówczyńska B.: *MEB w analizie wytrzymałościowej zębów kół zębatych*. ZN Pol. Śl. seria Transport , z. 9. Gliwice 1989.
4. Burczyński T.: *MEB w wybranych zagadnieniach analizy i optymalizacji układów odkształcalnych*. ZN Pol. Śl. seria Mechanika , z. 97. Gliwice 1989.
5. Brebbia C.A. , Dominquez J.: *Boundary Elements - An Introductory Course*.

Computational Mechanics Publications , Southampton and Boston 1989.

6. Müller L.: *Przekładnie zębate - dynamika*. WNT, Warszawa 1986.
7. Norma GOST 9323 - 60.
8. Müller L.: *Napężenia w podstawie zęba koła wewnątrznie uzębionego*. ZN Pol. Śl. seria Transport , z. 10. Gliwice 1990.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jerzy Osiński

Wpłynęło do Redakcji: 10.11.1995 r.

Abstract

In the elaboration there have been determined the stresses in the base of an internal gears teeth by means of the Boundary Elements Method. In the performed numerical analysis there has been examined the influence of the construction features of gear wheel and of the tool on the values of stresses in the base of an internal gear tooth on its stretched side, where most often there occurs the initiation of fatigue break. The calculation model showing the way of ballasting and supporting the tooth used in the calculations is presented in the *Fig. 1*. Results of the calculations performed have been displayed in the form of charts presenting the relationship of dimensionless stresses in the base of the tooth Y_s in the function of the number of wheel's teeth at the assumption of constant values of the addendum modification coefficient of a gear wheel ($Y_s = f(z)$ for $x = const.$). The achieved results are convergent with the results of the Finished Elements Method calculations [8]. In the *Fig. 2* there has been presented the influence of the construction features of gear wheel on the values of stresses in the base of a tooth. In the case of small number of teeth of a wheel, using negative values of the factor of addendum modification coefficient of a gear wheel is profitable, but for bigger values of the number of wheel's teeth it is harmful. There exists such a range of the number of teeth in an internal gear and the range of values of a wheel correction coefficient at which the radius of rounding of the tooth's base decreases to zero and the values of stresses increase strongly. The influence of the addendum modification coefficient of a gear-shaper cutter on the values of stresses has been illustrated in the *Fig. 3*. In case of big number of wheel's teeth $(z \in -250 \div -60)$

the stresses for a new gear-shaper cutter (with the positive value of the addendum modification coefficient) are the smallest and for the gear-shaper cutter that is averagely or extremely used they gradually increase. In the *Fig. 4* there has been presented the influence of the angle of a tool's profile on the stresses in the base of the gear wheel's tooth. The increase of the value of the angle of a tool's profile causes the decrease of values of stresses in the tooth's base. Influence of the angle of a tool's α_{0V} profile on the shape of a tooth has been presented in the *Fig. 5*.