

Zbigniew CICHOCKI

DRGANIA TORU KOLEJOWEGO WYWOŁANE RUCHEM POJAZDÓW

Streszczenie. W artykule przedstawiono metodę wyznaczania przemieszczeń toru wywołanych przejazdem pociągu. Metoda pozwala uwzględnić nieliniowość charakterystyki podłoża poprzez zastąpienie składnika nieliniowego dodatkowym ruchomym obciążeniem ciągłym. Przedstawiono przykłady badań symulacyjnych wykonanych z wykorzystaniem odpowiednich programów komputerowych.

VIBRATIONS OF THE RAILWAY TRACK CAUSED BY ROLLING VEHICLES

Summary. The paper presents an analyses of a dynamic system composed of a track and a train running along it. Some results of the numerical analysis of dimensionless displacements of the track are shown in the paper.

1. WSTĘP

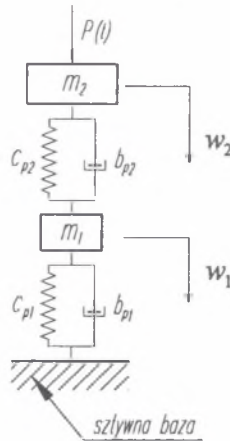
Cechą podstawową transportu szynowego jest gwarancja niezawodnego i regularnego przewozu znacznych mas towarów z dużymi prędkościami. Zapewnienie tej cechy wymaga budowy niezawodnych i trwałych dróg kolejowych. Drogi te narażone są na znaczne obciążenia pochodzące od przejeżdżających pociągów. Liczne zarządy kolejowe prowadzą od lat badania, których celem jest poznanie zjawisk towarzyszących współpracy pojazdów szynowych z torem. Spośród stosowanych metod badawczych bardzo ważną rolę odgrywają metody teoretyczne, które w przeciwieństwie do niebezpiecznych badań poligonowych prowadzonych na liniach kolejowych na rzeczywistych obiektach umożliwiają przeanalizowanie wpływu większej liczby czynników i są dużo tańsze. W artykule przedstawiono metodę wyznaczania sił wzajemnego oddziaływania toru i jadącego po nim pociągu. Metoda ta o tyle zasługuje na uwagę, że znajduje potwierdzenie w wynikach badań uzyskanych na rzeczywistych liniach kolejowych.

2. MODELOWANIE TORU KOLEJOWEGO

W dotychczas spotykanych opracowaniach dotyczących współpracy układu pojazd szynowy - tor spotyka się zasadniczo trzy sposoby modelowania toru:

- modele dyskretne,
- modele ciągłe,
- modele dyskretno - ciągłe.

Przykłady:



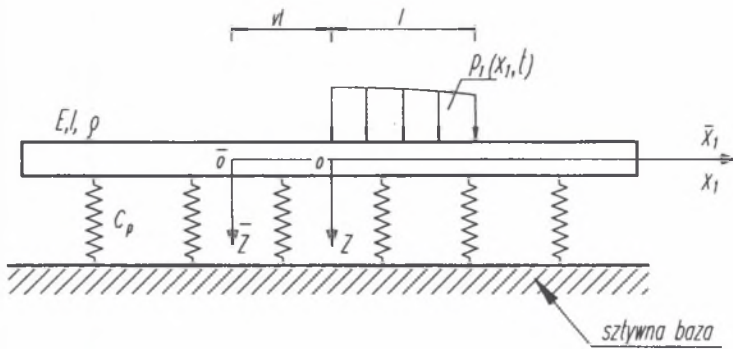
Rys. 1. Dyskretny model toru
Fig. 1. Discret model of track

Rys. 1 przedstawia dyskretny model toru o dwóch stopniach swobody. Do opisu modelu należy podać następujące parametry:

- m_2 - zredukowana masa szyny [kg],
- m_1 - masa podkładki [kg],
- c_{p2} - współczynnik sztywności podkładki podszynowej [N/m],
- b_{p2} - współczynnik tłumienia podkładki podszynowej [Ns/m],
- c_{p1} - współczynnik sztywności podsypki [N/m],
- b_{p1} - współczynnik tłumienia podsypki [Ns/m].

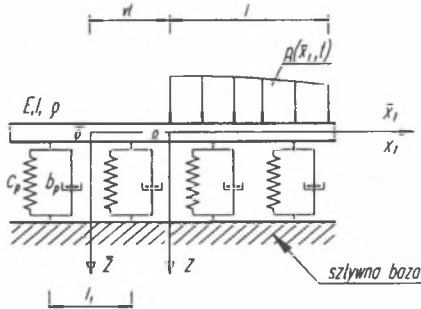
Model matematyczny tego układu jest układem równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach. W modelu przyjmuje się, że wszystkie elementy podatne są liniowe. W rzeczywistości charakterystyki poszczególnych elementów są silnie nieliniowe.

W modelu przedstawionym na rys. 2 mamy do czynienia z układem jednowarstwowym posiadającym oprócz właściwości sprężystych także tłumiące. W modelu tym szynę reprezentuje belka Bernoullego-Eulera lub Timoshenki, a podkładki podszynowe, podkłady, podsypka, podłoże traktowane są jako warstwa sprężysto-tłumiąca. Podłoże takie często nazywane jest podłożem Winklera z tłumieniem.



Rys. 2. Ciągły model toru

Fig. 2. Continuous model of track



Rys. 3. Dyskretno-ciągły model toru

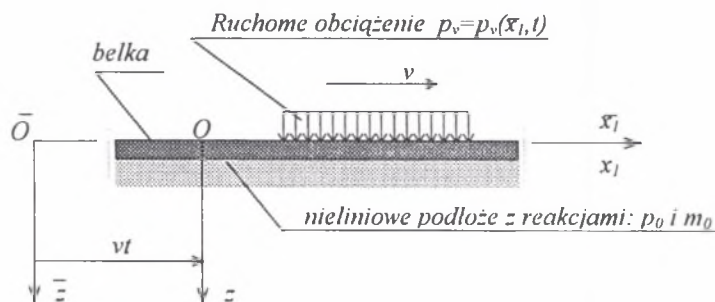
Fig. 3. Discrete-continuous model of track

W powyższym modelu tor został potraktowany jako belka podparta w sposób dyskretny. Belka modelująca szynę w tym modelu może być belką Bernoulliego-Eulera lub Timoshenki. Model Timoshenki, uwzględniający bezwładność obrotową przekroju oraz wpływ naprężeń stycznych, jest modelem ogólniejszym, co może być istotne w przypadku zwiększania prędkości jazdy pociągów. Podtorze wraz z pozostałymi elementami nawierzchni kolejowej jest układem dyskretnym utworzonym przez skupione elementy sprężysto - tłumiące połączone równoległe (ośrodek Kelvina - Voighta).

3. METODA ANALIZY

W ramach badań symulacyjnych wpływu parametrów toru na jego zachowanie podczas różnych przejazdów pojazdów szynowych opracowano odpowiednie programy komputerowe. W artykule przedstawiono przykład wykorzystania tych programów.

Do analizy przyjęto, podobnie jak w pracy [1], układ mechaniczny, który można traktować w szczególności jako model toru i jadącego po nim pociągu. Jest to ciągły układ dynamiczny, w którym po prostoliniowej nieskończenie długiej belce o modelu Timoshenki porusza się ze stałą prędkością niezmiennie w czasie obciążenie - rys. [4].



Rys. 4. Model fizyczny przyjęty do badań symulacyjnych
Fig. 4. Model of physical system assumed in the computer simulation

Zgodnie z [1] ruch belki w układzie ruchomym Ox_1z (związany z ruchomym obciążeniem) opisuje równanie różniczkowe zwyczajne czwartego rzędu, które w formie operatorowej przedstawia się następująco:

$$F[u(x)] + f[u(x)] = g_p[\bar{p}_v(x)]. \quad (1)$$

W równaniu tym $F[u(x)]$ jest składnikiem liniowym, a $f[u(x)]$ składnikiem nieliniowym równania, przy czym:

$$F[u(x)] = (u^{(4)} + e_3 u''' + e_2 u'' + e_1 u' + e_0 u) \cdot D. \quad (2)$$

$$f[u(x)] = \left\{ b_2 \bar{p}_0'' [u(x)] + b_1 \bar{p}_0' [u(x)] + b_0 \bar{p}_0 [u(x)] \right\} \cdot D. \quad (3)$$

$$g_p[\bar{p}_v(x)] = \left[b_2 \bar{p}_v''(x) + b_1 \bar{p}_v'(x) + b_0 \bar{p}_v(x) \right] \cdot D. \quad (4)$$

$$D = (V^2 - V_1^2) \cdot (V^2 - V_2^2).$$

Porównując wyrażenia (3) i (4) możemy zapisać:

$$f[u(x)] = g_p \left\{ \bar{p}_0^* [u(x)] \right\}. \quad (5)$$

Jeżeli wprowadzimy zatem pomocniczą funkcję:

$$\bar{p}_{va}(x) = -\bar{p}_0^* [u(x)], \quad (6)$$

to wyrażenie (5) przyjmie postać:

$$f[u(x)] = -g_p [\bar{p}_{va}(x)]. \quad (7)$$

Wstawiając (6) do (1) otrzymujemy:

$$F[u(x)] - g_p [\bar{p}_{va}(x)] = g_p [\bar{p}_v(x)],$$

a po przekształceniu

$$F[u(x)] = g_p [\bar{p}_v(x) + \bar{p}_{va}(x)]. \quad (8)$$

Patrząc na wyrażenie (7) możemy powiedzieć, że wpływ składnika nieliniowego w równaniu (1) belki możemy uwzględnić, wprowadzając dodatkowe ruchome obciążenie ciągle $\bar{p}_{va}(x)$, w wyniku czego otrzymujemy równanie różniczkowe (8). Równanie to jest równaniem nieliniowym ze względu na $u(x)$, ponieważ zgodnie z wyrażeniem (6) funkcja $u(x)$ występuje ogólnie nieliniowo w $\bar{p}_{va}(x)$. Wyznaczając funkcję $u(x)$ posługujemy się metodą kolejnych przybliżeń:

1^o Zakładamy, że pierwszym przybliżeniem rozwiązania równania różniczkowego nieliniowego (8) jest rozwiązanie jego przybliżenia liniowego $u_0(x)$, czyli:

$$F[u_0(x)] = g_p[\bar{p}_v(x)]. \quad (9)$$

2^o Po wyznaczeniu funkcji $u_0(x)$ przechodzimy do równania nieliniowego (8), w którym za funkcję $\bar{p}_{va}(x)$ na podstawie (6) podstawiamy:

$$\bar{p}_{va1}(x) = -\bar{p}_0^*[u_0(x)]. \quad (10)$$

W rezultacie otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe zastępujące (w pierwszym przybliżeniu) równanie nieliniowe (8):

$$F[u_1(x)] = g_p[\bar{p}_v(x) + \bar{p}_{va1}(x)]. \quad (11)$$

Rozwiązując to równanie wyznaczamy kolejne przybliżenie funkcji $u(x)$, czyli $u_1(x)$. Następnie, podobnie jak za pierwszym razem, korzystając z (6) możemy wyznaczyć kolejne przybliżenie funkcji $\bar{p}_{va}(x)$:

$$\bar{p}_{va2}(x) = -\bar{p}_0^*[u_1(x)]. \quad (12)$$

Pozwala to, podobnie jak w poprzednim kroku, wyznaczyć kolejne przybliżenie funkcji $u(x)$:

$$F[u_2(x)] = g_p[\bar{p}_v(x) + \bar{p}_{va2}(x)]. \quad (13)$$

W ten sposób możemy wyznaczać dalsze wyrazy ciągu kolejnych przybliżeń u_3, \dots, u_k, u_{k+1} funkcji $u(x)$.

Obliczenia zmierzające do wyznaczenia funkcji $u(x)$ można uprościć korzystając z następujących zależności:

$$\begin{cases} F(u_1) = g_p(\bar{p}_v + \bar{p}_{va1}) \\ F(u_0) = g_p(\bar{p}_v) \end{cases}$$

Po odjęciu ich stronami i wprowadzeniu oznaczenia $\Delta u_1 = u_1 - u_0$ otrzymujemy:

$$F(\Delta u_1) = g_p(\bar{p}_{va1}),$$

oraz podobnie w następnym przybliżeniu

$$F(\Delta u_k) = g_p(\bar{p}_{vak})$$

gdzie $\Delta u_k = u_k - u_0$. W rezultacie obliczanie funkcji $u_0(x)$ pochodzącej od obciążenia $\bar{p}_v(x)$ wykonywane jest tylko jeden raz.

Za pomocą odpowiedniego kryterium sprawdzamy, czy różnica pomiędzy kolejnymi przybliżeniami funkcji $u(x)$, tzn. $(u_{k+1} - u_k)$ jest dostatecznie mała. Pojawiające się w ciągu kolejnych przybliżeń funkcji $u(x)$ wyrażenia $\bar{p}_{va1}(x), \bar{p}_{va2}(x) \dots \bar{p}_{vak}(x)$ możemy traktować jako dodatkowe ruchome obciążenia. W ten sposób rzeczywisty układ nieliniowy możemy zastąpić układem liniowym, w którym oprócz obciążeń rzeczywistych działają obciążenia dodatkowe. W przypadku zbieżności ciągu $u_k(x)$ ten zastępczy układ liniowy pod wpływem obciążeń rzeczywistych (działających na układ nieliniowy) i ostatniego z ciągu obliczanych obciążeń do-

datkowych zachowuje się tak samo jak układ nieliniowy. Dodatkowe obciążenia, które możemy również nazwać obliczeniowymi, przybierają postać obciążeń ciągłych o dowolnych zwykłe kształtach.

Poniżej przedstawiono przykłady kształtów obciążeń dodatkowych, jakie można spotkać przy analizie przypadku prostych obciążeń toru dla pierwszego przybliżenia, czyli $\bar{p}_{val}(x)$.

Przyjęto, że zewnętrzne obciążenie reakcyjne siłowe p_0 jako zależne od przemieszczeń wywołanych drganiami toru wyraża się następującym wzorem:

$$p_0 = c_p w + b_p \frac{\partial w}{\partial t} + p_0^*,$$

gdzie:

w - ugięcie toru,

c_p - stała sprężystości składowej liniowej charakterystyki podłoża odniesiona do jednostki długości toru,

b_p - stała tłumienia składowej liniowej charakterystyki podłoża odniesiona do jednostki długości toru,

p_0^* - oznacza składnik nieliniowy.

Po wprowadzeniu nowych, bezwymiarowych zmiennych u i x otrzymujemy wzór na bezwymiarowe obciążenie reakcyjne siłowe \bar{p}_0 :

$$\bar{p}_0 = u + (-2bV)u' + \bar{p}_0^*[u(x)].$$

Obciążenie to ma dwa składniki:

$$\bar{p}_0 = \bar{p}_{0e} + \bar{p}_{0d}$$

gdzie:

\bar{p}_{0e} - sprężysta bezwymiarowa reakcja podłoża,

\bar{p}_{0d} - tłumiąca bezwymiarowa reakcja podłoża.

Podobnie składnik nieliniowy \bar{p}_0^* można rozłożyć następująco:

$$\bar{p}_0^* = \bar{p}_{en} + \bar{p}_{dn}$$

gdzie:

\bar{p}_{en} - składnik sprężysty nieliniowy,

\bar{p}_{dn} - składnik tłumiący nieliniowy.

Łącząc powyższe zależności otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{0e} &= u + \bar{p}_{en} \\ \bar{p}_{0d} &= (-2bV)u' + \bar{p}_{dn} \end{aligned}$$

Na rysunkach 5 - 8 przyjęto następujące oznaczenia:

peB[u] $\Leftrightarrow \bar{p}_{0e}$,

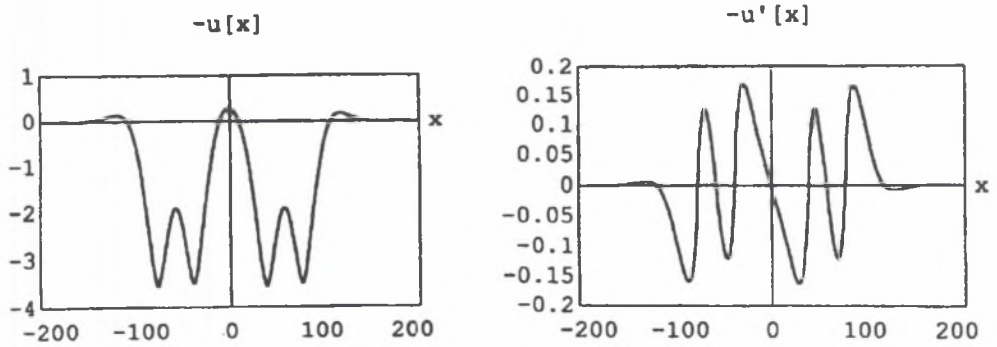
pdB[u'] $\Leftrightarrow \bar{p}_{0d}$,

pdB[u']/(2 bma vd) - bezwymiarowa charakterystyka tłumienia podłoża w przybliżeniu odpowiadająca charakterystyce tarcia suchego,

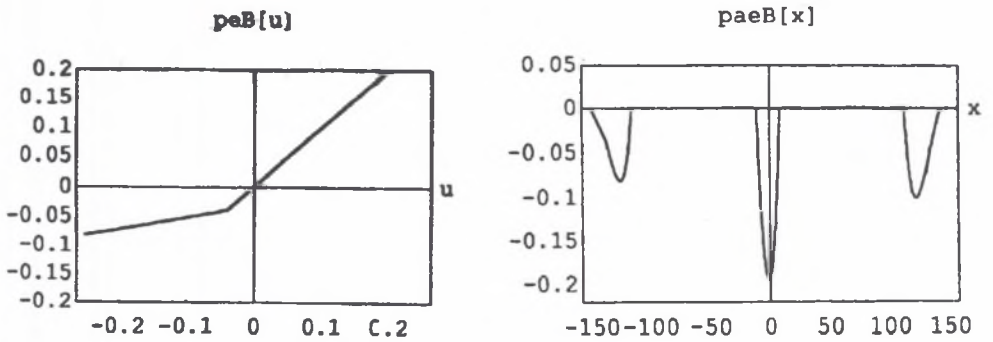
paeB[x] - dodatkowe ruchome obciążenie obliczeniowe w pierwszym przybliżeniu, pochodzące od nieliniowej charakterystyki sprężystości,

padB[x] - dodatkowe ruchome obciążenie obliczeniowe w pierwszym przybliżeniu, pochodzące od nieliniowej charakterystyki tłumienia,

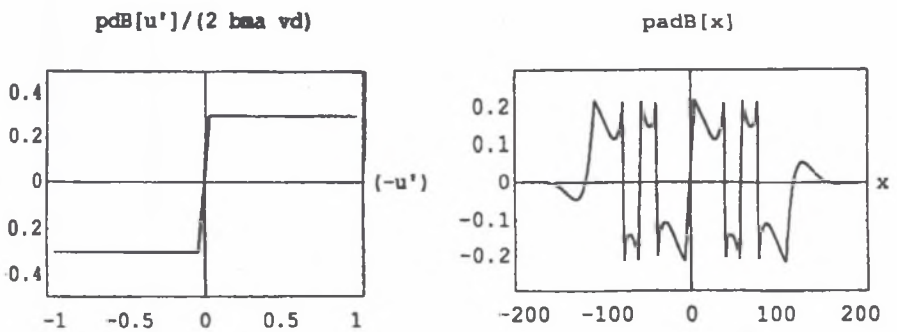
paB[x] = paeB[x] + padB[x] $\Leftrightarrow \bar{p}_{val}(x)$ - pierwsze przybliżenie dodatkowych ruchomych obciążeń ciągłych (obliczeniowych).



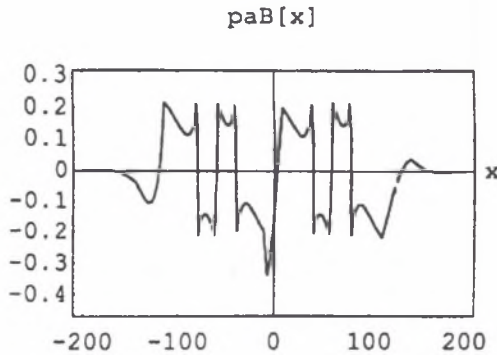
Rys. 5. Bezwymiarowe ugięcie toru $u(x)$ i jego pochodna $u'(x)$
 Fig. 5. Dimensionless track deflection $u(x)$ and its differential coefficient $u'(x)$



Rys. 6. Nieliniowa sprężystość i odpowiadające jej dodatkowe ruchome obciążenie
 Fig. 6. Nonlinear elasticity and related moving load



Rys. 7. Charakterystyka tłumienia i odpowiadające jej dodatkowe obciążenie
 Fig. 7. Characteristic of attenuation and related moving load



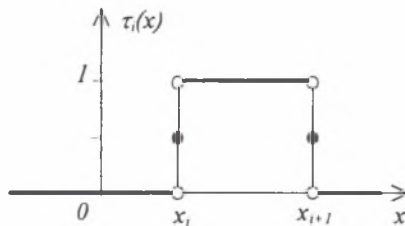
Rys. 8. Sumaryczne, dodatkowe, ruchome obciążenia
 Fig. 8. Total additional moving load

Sposób analitycznego uwzględnienia obciążeń ciągłych o dowolnym kształcie, opisany w pracy [2], polega na wykorzystaniu teorii funkcji sklepanych i przybliżeniu tych obciążeń funkcjami sklepanymi do stopnia 3 włącznie. To przybliżenie uzyskuje się przez podział przedziału, w którym występuje obciążenie $\langle x_{aq}, x_{bq} \rangle$, na l_q segmentów o różnych zazwyczaj długościach. Funkcję sklepaną w przedziale $\langle x_{aq}, x_{bq} \rangle$ opisuje wzór:

$$p_v(x) = \sum_{i=1}^{l_q} \left[\sum_{k=0}^s \bar{q}_{ik} (x - x_i)^k \right] \tau_i(x), \quad (14)$$

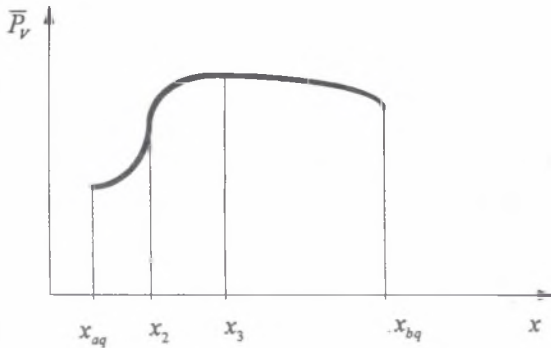
w którym $s = 0, 1, 2, 3$.

Wyrażenie $\tau_i(x)$ przyjmuje wartość 0.5 w punktach $x = x_i$ i $x = x_{i+1}$, wartość 1 w przedziale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ oraz 0 poza tym przedziałem. Funkcja ta ma na celu „wycięcie” z wielomianu interesującego nas segmentu. Wykres tej funkcji przedstawia rys. 9.



Rys. 9. Wykres funkcji $\tau_i(x)$
 Fig. 9. Graph of function $\tau_i(x)$

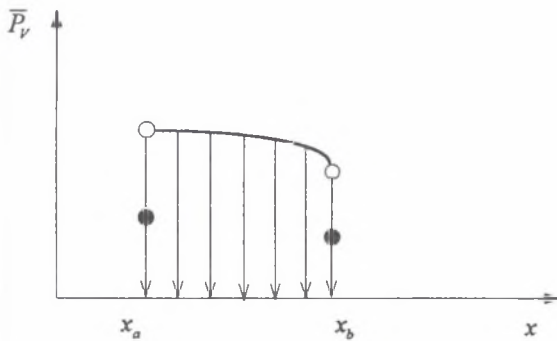
Wzór (14) przedstawia sumę przylegających do siebie segmentów, z których każdy jest opisany przez inny wielomian stopnia s w jego wnętrzu. Poza wnętrzem segmentu wielomian ten jest wyzerowany za pomocą funkcji $\tau_i(x)$. Na końcach segmentu pomnożony jest przez 0,5. Sytuację tę przedstawia następujący rysunek.



Rys. 10. Wykres funkcji sklejanej stopnia s w przedziale $\langle x_{aq}, x_{bq} \rangle$

Fig. 10. Graph of spline function of s degree in section $\langle x_{aq}, x_{bq} \rangle$

Taka funkcja sklejana (3 stopnia) musi być klasy C_2 , tzn. jest ciągła ze swoją pierwszą i drugą pochodną. Nakłada to na współczynniki q_k , ze wzoru (3) pewne ograniczenia.



Rys. 11. Fragment obciążenia toru opisany jednym segmentem funkcji sklejanej
 Fig. 11. Fragment of track load circumscribed by one segment of spline function

W pierwszej kolejności poszukujemy rozwiązania od jednego segmentu funkcji sklejanej. Rozwiązanie dla całego przedziału jest superpozycją rozwiązań od poszczególnych segmentów. Dla jednego segmentu mamy:

$$\bar{p}_v(x) = \bar{p}_{vo}(x) \cdot \tau(x),$$

w którym
$$\bar{p}_{vo} = \sum_{k=0}^3 \bar{q}_k (x - x_a)^k.$$

Rozwiązaniem ogólnym równania:

$$F[u(x)] = g_p[\bar{p}_v(x)],$$

od jednego segmentu jest funkcja:

$$u(x) = b_0 g_u^{(0)}(x) + b_1 g_u^{(1)}(x) = b_2 g_u^{(2)}(x).$$

Za pomocą programu MATHEMATICA i szeregu dodatkowych przekształceń dochodzimy do wzoru końcowego odnoszącego się do jednego segmentu. Wzór ten przedstawiamy w następującej formie:

$$g_u^{(0)}(x) = \left[\begin{aligned} & \bar{q}_0 h^{(-1)}(x - x_a) + \bar{q}_1 h^{(-2)}(x - x_a) + \\ & + 2\bar{q}_2 h^{(-3)}(x - x_a) + 6\bar{q}_3 h^{(-4)}(x - x_a) \end{aligned} \right] + \\ + \left[6\bar{q}_{3N} h^{(-4)}(x - x_b) - 6\bar{q}_3 h^{(-4)}(x - x_a) \right] - \\ - \left[\begin{aligned} & \bar{q}_{0N} h^{(-1)}(x - x_b) + \bar{q}_{1N} h^{(-2)}(x - x_b) + \\ & + 2\bar{q}_{2N} h^{(-3)}(x - x_b) + 6\bar{q}_{3N} h^{(-4)}(x - x_b) \end{aligned} \right]$$

$\bar{q}_{0N}, \bar{q}_{1N}, \bar{q}_{2N}, \bar{q}_{3N}$ – dotyczą następnego segmentu.

Rozwiązanie belki polega na superpozycji rozwiązań od poszczególnych segmentów funkcji sklejanej.

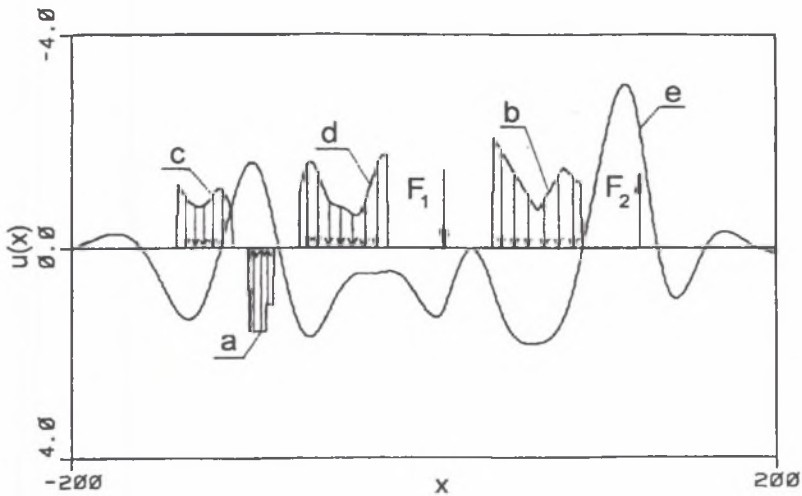
Rezultat tej superpozycji dla obciążenia złożonego ze wszystkich l_q segmentów przedstawia poniższy wzór:

$$g_u^{(k)}(x) = \left[\begin{aligned} & \bar{q}_{01} h^{(-1+k)}(x - x_{aq}) + \bar{q}_{11} h^{(-2+k)}(x - x_{aq}) + \\ & + 2\bar{q}_{21} h^{(-3+k)}(x - x_{aq}) + \\ & + 6\bar{q}_{31} h^{(-4+k)}(x - x_{aq}) \end{aligned} \right] + \\ + 6 \sum_{i=2}^n (\bar{q}_{3i} - \bar{q}_{3i-1}) h^{(-4+k)}(x - x_i) - \\ - \left[\begin{aligned} & \bar{q}_{0N} h^{(-1+k)}(x - x_{bq}) + \bar{q}_{1N} h^{(-2+k)}(x - x_{bq}) + \\ & + 2\bar{q}_{2N} h^{(-3+k)}(x - x_{bq}) + \\ & + 6\bar{q}_{3N} h^{(-4+k)}(x - x_{bq}) \end{aligned} \right]$$

4. PRZYKŁAD ROZWIĄZANIA

Poniższy przykład jest ilustracją zastosowania opisanej metody do poszukiwania ugięć toru wywołanych ruchomymi obciążeniami: siłami skupionymi i obciążeniami ciągłymi o dowolnym kształcie. Na wykresie poszczególne krzywe oznaczają:

- obciążenie opisane funkcją sklejaną stopnia 0,
- obciążenie opisane funkcją sklejaną stopnia 1,
- obciążenie opisane funkcją sklejaną stopnia 2,
- obciążenie opisane funkcją sklejaną stopnia 3,
- bezwymiarowe ugięcie toru.



Rys. 12. Bezwymiarowe ugięcie toru wywołane zespołem ruchomych obciążeń
 Fig. 12. Dimensionless displacements of track caused by complex moving loads

5. UWAGI KOŃCOWE

Opisano metodę pozwalającą na wyznaczanie ugięcia toru, w przypadku liniowym, poddanego działaniu ruchomych obciążeń ciągłych o dowolnym kształcie. Jednocześnie pokazano, że układ nieliniowy można rozpatrywać jako układ liniowy, w którym składnik nieliniowy zastępują dodatkowe ruchome obciążenia o dowolnych zazwyczaj kształtach. Uzyskano tym samym skuteczną metodę umożliwiającą badanie zachowania układu pojazd szynowy - tor z uwzględnieniem nieliniowości podłoża. Opracowanie możliwej do zastosowania w praktyce metody badania wpływu nieliniowej charakterystyki podłoża na zachowanie się toru wywołane przejazdami szybkich pojazdów szynowych umożliwia między innymi określanie kryteriów bezpieczeństwa ruchu oraz prognozowanie degradacji toru i taboru.

LITERATURA

1. Grzyb A.: Podstawy teoretyczne analizy nieliniowego układu dynamicznego pojazd-tor. Dynamika pojazdów szynowych i optymalizacja ich podukładów. Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, Zeszyt nr 10, Kraków 1996, s. 47-60.
2. Cichocki Z., Grzyb A.: Analiza drgań belki Timoshenki przy ruchomych obciążeniach ciągłych o dowolnym kształcie. Polskie Towarzystwo Symulacji Komputerowej, Instytut Automatykacji Systemów Dowodzenia WAT, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Instytut Informatyki Politechniki Białostockiej. Symulacja w Badaniach i Rozwoju. Jelenia Góra 1997 (w druku).

Abstract

The paper presents an analyses of a dynamic system composed of a track and a train running along it. Described method of computation of the track deformation permits to take into account nonlinear characteristic of foundation by replacement the nonlinear component by additional distributed load. Some results of the numerical analysis of dimensionless displacements of the track are shown in the paper (fig. 12).