ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2005
Seria: TRANSPORT z. 58 Nr kol. 1688

Grzegorz SIERPIŃSKI[1]

MODYFIKACJA MODELU WEBSTERA PRZEZ ZASTOSOWANIE MODELU M/G/1

Streszczenie. W artykule omówiono model Webstera (1958). Scharakteryzowano poszczególne składniki formuły Webstera. Dokonano modyfikacji tej formuły przez zastosowanie modelu kolejkowego M/G/1. Przedstawiono również dokładny opis modelu M/G/1. Zaproponowana formuła pozwala wyznaczać straty czasu w przypadku dużego zróżnicowania czasów obsługi (dowolny rozkład czasów obsługi).

WEBSTER'S MODEL REVISION BY USED M/G/1 QUEUEING MODEL

Summary. The article includes a review of the Webster's model (1958). Each element of Webster's formula was described. This formula was modificated by used M/G/1 queueing model. Queueing model M/G/1 was described too. Proposed formula allows to estimate time delay in case of large service times variations (general distribution of service time).

1. WPROWADZENIE

Prawie pół wieku temu Francis Vernon Webster (1958) opracował jeden z pierwszych powszechnie stosowanych modeli ruchu na skrzyżowaniach z sygnalizacją świetlną. Webster jest także twórcą algorytmu optymalizującego długość cyklu dla sygnalizacji stałoczasowych.

Formuła Webstera służąca do wyznaczania średnich strat czasu zawiera elementy modelu deterministycznego, modelu kolejkowego M/D/1 oraz poprawkę uzyskaną na podstawie wyników przeprowadzonych symulacji [10, 11].

W artykule zostanie zaprezentowana modyfikacja modelu Webstera poprzez założenie, iż czas obsługi nie jest stały. Model M/D/1 zastąpiono modelem M/G/1, który charakteryzuje dowolny rozkład czasu obsługi.

Ponieważ zachodzi konflikt terminologii stosowanej przy opisie modeli kolejkowych z określeniami używanymi w metodach obliczania przepustowości, w artykule dodatkowy czas, jaki kierowca musi przeznaczyć na przejazd odcinka drogi obejmującego skrzyżowanie w porównaniu z czasem przejazdu takiego samego obcinka drogi bez skrzyżowania, nazwano stratami czasu (a nie opóźnieniem). W pozostałych przypadkach użyto oznaczeń z teorii kolejek, jak to pokazuje tabl. 1.

[1] Wydział Transportu, Politechnika Śląska, Krasińskiego 8, 40-019 Katowice, grzegorz.sierpinski@polsl.pl

Tablica 1

Ujednolicenie oznaczeń stosowanych w artykule

Teoria kolejek	Znaczenie	Webster
ρ	intensywność ruchu ↔ stopień obciążenia	x
λ	intensywność zgłoszeń ↔ natężenie	q
μ	intensywność obsługi ↔ przepustowość	$\lambda \cdot S = \frac{g}{T_c} \cdot S$

Źródło: opracowanie własne

2. MODEL WEBSTERA

Francis Vernon Webster potraktował opóźnienie jako sumę dwóch składników podstawowych: części stałej (zaczerpniętej z modelu deterministycznego [4, 9]), oraz składnika losowego (w tym przypadku opartego na modelu masowej obsługi M/D/1). Składniki te omówiono w podrozdziałach 2.1 i 2.2. Dodatkowo po przeprowadzeniu szeregu symulacji wielkość wyrażenia pomniejszył o poprawkę. Wzór określający średnie straty czasu na skrzyżowaniach z sygnalizacją świetlną, zwany również formułą Webstera, wygląda następująco (w zapisie teoriokolejkowym):

$$d = \frac{T_c \cdot \left(1 - \frac{g}{T_c}\right)^2}{2 \cdot \left(1 - \frac{g}{T_c} \cdot \rho\right)} + \frac{\rho^2}{2 \cdot \lambda \cdot (1 - \rho)} - 0{,}65 \cdot \left(\frac{T_c}{\lambda^2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \rho^{\left(2 + 5 \cdot \frac{g}{T_c}\right)}, \tag{1}$$

gdzie:

d – średnia strata czasu na pojazd [s/P],
T_c – długość cyklu sygnalizacji [s],
g – efektywny czas zielony [s],
ρ – intensywność ruchu,
λ – intensywność zgłoszeń [P/h],
μ – intensywność obsługi [P/h].

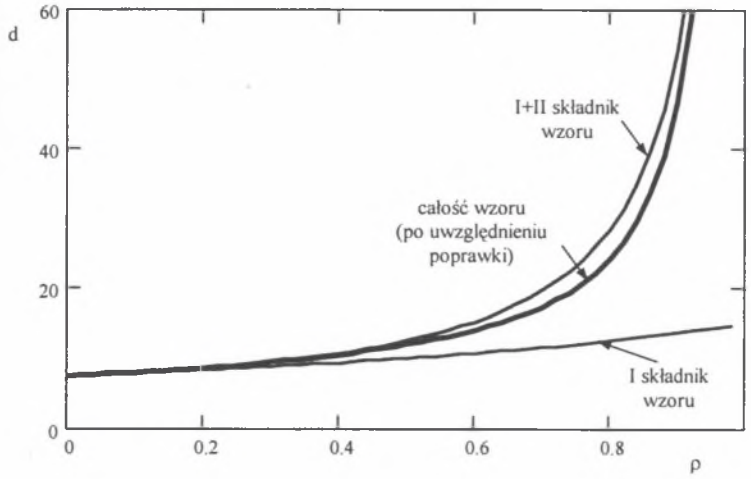
Model Webstera reprezentuje modele tak zwanego stanu ustalonego („steady-state"). Modele te mają zastosowanie, gdy system jest w równowadze, tzn. intensywność ruchu jest mniejsza od jedności (2). Właśnie w takich przypadkach do opisu ruchu na skrzyżowaniach można stosować modele kolejkowe.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1, \tag{2}$$

gdzie:

ρ – intensywność ruchu,
λ – intensywność zgłoszeń,
μ – intensywność obsługi.

Na rysunku 1 przedstawiono krzywe odpowiadające stratom czasu na cykl w zależności od intensywności ruchu. Krzywe reprezentują odpowiednio: straty czasu będące stałą składową formuły Webstera, sumę stałej i losowej składowej, oraz pełną formułę uwzględniającą korektę na podstawie symulacji.



Rys. 1.Model Webstera – ilustracja graficzna poszczególnych składników modelu
Fig. 1. Webster's model – graphic illustration of seperate components

2.1. Model deterministyczny w zapisie teorii kolejek

W modelu deterministycznym zakładano brak losowości. Pojazdy zgłaszają się ze stałą intensywnością. W przypadku użycia sygnalizacji świetlnej na skrzyżowaniu maksymalna długość kolejki Q_{max} występuje w chwili wyświetlenia sygnału zielonego. Pojazdy są obsługiwane ze stałym czasem obsługi (równym odwrotności intensywności obsługi). Rysunek 2 przedstawia schemat zgłoszeń i obsługi, a także wielkość kolejki w poszczególnych chwilach obsługi dla modelu deterministycznego. Po rozładowaniu kolejki oczekujących pojazdów kolejne zgłoszenia obsługiwane są bez czekania, aż do zakończenia nadawania sygnału zielonego.

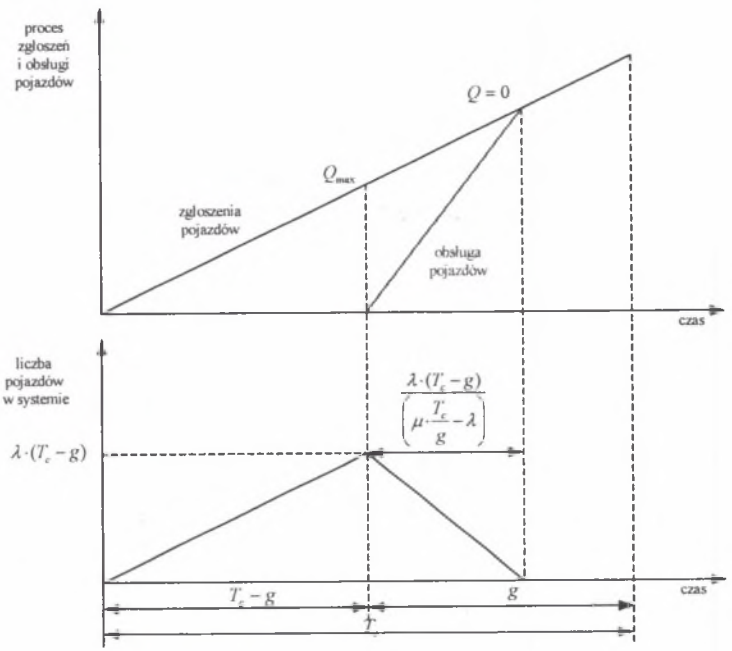
Całkowity czas czekania w cyklu (3) można wyznaczyć przez obliczenie równań prostych i punktu ich przecięcia oraz czasu rozładowania kolejki.

$$W = \tfrac{1}{2}\cdot\lambda\cdot(T_c - g)\left[(T_c - g) + \frac{\lambda\cdot(T_c - g)}{\mu\cdot\frac{T_c}{g} - \lambda}\right] = \frac{\lambda\cdot\mu\cdot\frac{T_c}{g}\cdot(T_c - g)^2}{2\cdot(\mu\cdot\frac{T_c}{g} - \lambda)} \tag{3}$$

Wtedy średni czas czekania na pojazd to:

$$\overline{W} = \frac{\lambda \cdot \mu \cdot \frac{T_c}{g} \cdot (T_c - g)^2}{2 \cdot \left(\mu \cdot \frac{T_c}{g} - \lambda \right)} \cdot \frac{1}{\lambda \cdot T_c} = \frac{\mu \cdot \frac{T_c}{g} \cdot (T_c - g)^2}{2 \cdot T_c \cdot \left(\mu \cdot \frac{T_c}{g} - \lambda \right)} = \frac{T_c \cdot \left(1 - \frac{g}{T_c} \right)^2}{2 \cdot \left(1 - \frac{g}{T_c} \cdot \rho \right)} \tag{4}$$

Jak widać, średni czas czekania z modelu deterministycznego stanowi pierwszy składnik wzoru Webstera (1).



Rys. 2.Model deterministyczny
Fig. 2. Deterministic model

2.2. Model M/D/1

W modelu kolejkowym M/D/1:

- liczba zgłoszeń, jakie przybywają do układu obsługi w czasie t, jest zgodna z rozkładem Poissona o parametrze λ, postaci:

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0,1,2,\ldots ; \tag{5}$$

- odstępy czasu między kolejnymi zgłoszeniami są zgodne z rozkładem wykładniczym o parametrze λ (rozumianym jako wartość oczekiwana), który określa funkcja gęstości postaci:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \tag{6}$$

i dystrybuancie rozkładu równej:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \tag{7}$$

- czas obsługi jest stały;
- pojedynczy kanał obsługi.

Podstawowe mierniki wydajności i efektywności dla modelu kolejkowego M/D/1 mają postać:

- średnia liczba klientów w systemie – L

$$L = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2 \cdot \mu \cdot (\mu - \lambda)} = \rho + \frac{\rho^2}{2 \cdot (1 - \rho)}; \tag{8}$$

- średnia liczba klientów w kolejce - L_q

$$L_q = \frac{\lambda^2}{2 \cdot \mu \cdot (\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{2 \cdot (1 - \rho)}; \tag{9}$$

- średni czas oczekiwania w systemie – W

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda}{2 \cdot \mu \cdot (\mu - \lambda)} = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{2 \cdot \mu \cdot (1 - \rho)}; \tag{10}$$

- średni czas oczekiwania w kolejce - W_q

$$W_q = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu \cdot (\mu - \lambda)} = \frac{\rho}{2 \cdot \mu \cdot (1 - \rho)} = \frac{\rho^2}{2 \cdot \lambda \cdot (1 - \rho)} \tag{11}$$

Drugi składnik wzoru Webstera (1) stanowi „dodatek" z uwagi na losową naturę przybyć. Jest to tzw. „losowe opóźnienie" uwzględniające rozkład Poissona zgłoszeń pojazdów oraz stałą przepustowość. Webster zastosował tutaj wyrażenie stanowiące średni czas oczekiwania w kolejce z modelu M/D/1 (11).

3. MODEL M/G/1

Model kolejkowy M/G/1 charakteryzuje – podobnie jak w przypadku M/D/1 – poissonowski proces zgłoszeń (5), wykładnicze odstępy między zgłoszeniami (6), oraz jeden kanał obsługi; natomiast czasy obsługi posiadają dowolny rozkład. Rozkład czasów obsługi jest określany za pomocą dwóch wielkości:

- wartość oczekiwana (średnia) – m

$$m = E(X) = \sum x_i \cdot P(x_i); \tag{12}$$

- wariancja – σ^2

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum x_i^2 \cdot P(x_i) - m^2 \tag{13}$$

M/G/1 należy do systemów niemarkowskich, co utrudnia analizę modelu. Łańcuch Markowa – najogólniej definiując – jest to łańcuch jednorodny, w którym prawdopodobieństwa przejść $p_{ij}(t,s)$ nie zależą od t, lecz jedynie od przyrostu czasu s [3, 5]. To zbiór wartości losowych, w którym prawdopodobiństwo, iż następną wielkością będzie x_{n+1}, zależy jedynie od aktualnej wielkości x_n i nie zależy od stanów poprzednich. Do badania procesów niemarkowskich stosuje się głównie aproksymację przez model markowski. Jedną z takich metod jest tzw. metoda wbudowanych łańcuchów Markowa [6, 12].

W tym celu należy obserwować zachowanie systemu w wybranych dyskretnych momentach – w chwilach, gdy kolejne pojazdy opuszczają system. Są to momenty zakończenia obsługi. Niech l_k stanowi liczbę pojazdów w systemie w chwili zakończenia obsługi przez k-ty pojazd, a x_k niech oznacza liczbę pojazdów, jakie przybyły w czasie trwania obsługi pojazdu k-tego. Można zauważyć dwa przypadki (14):

- w chwili zakończenia obsługi poprzedniego pojazdu $k-1$ kolejka była zerowa (brak oczekujących pojazdów) – $l_{k-1} = 0$;
- w chwili zakończenia obsługi poprzedniego pojazdu $k-1$ istniała kolejka - $l_{k-1} > 0$;

$$l_k = \begin{cases} x_k & ;\ l_{k-1} = 0 \\ l_{k-1} + x_k - 1 & ;\ l_{k-1} > 0 \end{cases} \tag{14}$$

Zapis (14) można zastąpić wzorem (15) definiując dodatkową zmienną losową U, która przyjmuje wartość 0, gdy $l_{k-1} = 0$, a w przypadku gdy $l_{k-1} > 0$, U = 1.

$$l_k = l_{k-1} - U(l_{k-1}) + x_k \tag{15}$$

Przedstawiony proces występujący w systemie M/G/1 nie jest procesem Markowa – niewykładnicze czasy obsługi. Natomiast sekwencja wartości l_k jest już procesem Markowa. Łańcuch utworzony w ten sposób nazywa się wbudowanym łańcuchem Markowa.

Teraz wykonując szereg przekształceń (najpierw podniesienie obu stron równania (15) do kwadratu, następnie zastąpienie wartości rzeczywistych wartościami średnimi):

$$l_k^2 = \left(l_{k-1} - U(l_{k-1}) + x_k\right)^2$$

$$l_k^2 = l_{k-1}^2 + 2 \cdot l_{k-1} \cdot x_k - 2 \cdot l_{k-1} \cdot U(l_{k-1}) + x_k^2 - 2 \cdot x_k \cdot U(l_{k-1}) + \left(U(l_{k-1})\right)^2$$

$$L_k^2 = L_{k-1}^2 + 2 \cdot L_{k-1} \cdot X_k - 2 \cdot L_{k-1} \cdot U(L_{k-1}) + X_k^2 - 2 \cdot X_k \cdot U(L_{k-1}) + \left(U(L_{k-1})\right)^2$$

oraz przyjmując występowanie równowagi statystycznej, czyli:

$$L_k = L_{k-1} \ ; \ L_k^2 = L_{k-1}^2$$

i dodatkowo

$$U(L_{k-1}) = \left(U(L_{k-1})\right)^2 \ ; \ X_k = U(L_{k-1}) \ ; \ L_{k-1} \cdot U(L_{k-1}) = L_{k-1}$$

otrzymuje się:

$$0 = 2 \cdot L_{k-1} \cdot X_k - 2 \cdot L_{k-1} + X_k^2 - 2 \cdot X_k \cdot U(L_{k-1}) + U(L_{k-1})$$

$$0 = 2 \cdot L_{k-1} \cdot X_k - 2 \cdot L_{k-1} + X_k^2 - 2 \cdot X_k \cdot X_k + X_k$$

Wartość X^2 w tym modelu przyjmuje postać [6, 12]:

$$X^2 = \int_0^\infty \left(\lambda \cdot t + \lambda^2 \cdot t^2\right) dF_T(t) = \lambda \cdot \int_0^\infty t \, dF_T(t) + \lambda^2 \cdot \int_0^\infty t^2 \, dF_T(t) =$$
$$= \lambda \cdot \bar{t} + \lambda^2 \cdot \overline{t^2} = \rho + \lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2$$

Następnie uogólniając $L_{k-1} = L$, a także przyrównując X do intensywności ruchu ρ

$$0 = 2 \cdot L \cdot \rho - 2 \cdot L + \rho + \lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2 - 2 \cdot \rho^2 + \rho$$

otrzymuje się wzór będący formułą Pollaczka-Khintchina [5]:

$$L = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma^2}{2 \cdot (1 - \rho)} \tag{16}$$

Stosując formułę (16) oraz wykorzystując wzory Little'a (17)

$$L = \lambda \cdot W; \qquad L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}; \qquad L_q = \lambda \cdot W_q; \qquad W = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{17}$$

można uzyskać poszczególne mierniki wydajności i efektywności dla modelu kolejkowego M/G/1:

- średnia liczba klientów w systemie – L

$$L = \rho + \frac{\lambda^2 \cdot (\mu^{-2} + \sigma^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} = \rho + \frac{\rho^2 \cdot (1 + \sigma^2 \cdot \mu^2)}{2 \cdot (1 - \rho)}; \tag{18}$$

- średnia liczba klientów w kolejce - L_q

$$L_q = \frac{\lambda^2 \cdot (\mu^{-2} + \sigma^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{\rho^2 \cdot (1 + \sigma^2 \cdot \mu^2)}{2 \cdot (1 - \rho)}; \tag{19}$$

- średni czas oczekiwania w systemie – W

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda \cdot (\mu^{-2} + \sigma^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho^2 \cdot (1 + \sigma^2 \cdot \mu^2)}{2 \cdot \lambda \cdot (1 - \rho)}; \tag{20}$$

- średni czas oczekiwania w kolejce - W_q

$$W_q = \frac{\lambda \cdot (\mu^{-2} + \sigma^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{\rho^2 \cdot (1 + \sigma^2 \cdot \mu^2)}{2 \cdot \lambda \cdot (1 - \rho)}. \tag{21}$$

4. ZMODYFIKOWANY MODEL STRAT CZASU

Webster zakładał, iż czasy obsługi są stałe. Jest to założenie zbyt uogólniające. W przypadku przejazdów jadących na wprost oraz dla relacji bezkolizyjnego skrętu w prawo i w lewo różnice w czasach obsługi na danym wlocie są niewielkie, spowodowane głównie:

- rodzajem pojazdu;
- stanem technicznym pojazdu;
- umiejętnościami i zachowaniami kierowcy.

Natomiast w przypadku relacji kolizyjnego skrętu w lewo do czasu obsługi należy doliczyć dodatkową „kolizyjną" stratę czasu [7, 8]. Pojazd, po otrzymaniu sygnału zezwalającego, wjeżdża na skrzyżowanie (rozpoczyna się obsługa tego pojazdu przez skrzyżowanie). Jeżeli jest to pojazd z relacji podporządkowanej, musi on oczekiwać na powstanie luki w potoku nadrzędnym, a dopiero po jej znalezieniu, bądź gdy potok nadrzędny zostaje „wstrzymany", pojazd może zjechać ze skrzyżowania (koniec czasu obsługi).

Zmodyfikowany model został zbudowany z dwóch składników:

- pierwszy składnik to: średni czas czekania z modelu deterministycznego (4), wykorzystany w modelu Webstera;
- drugi składnik to: średni czas oczekiwania w kolejce z modelu kolejkowego M/G/1.

Nowy model ma postać:

$$d = \frac{T_c \cdot \left(1 - \frac{g}{T_c}\right)^2}{2 \cdot \left(1 - \frac{g}{T_c} \cdot \rho\right)} + \frac{\rho^2 \cdot (1 + \sigma^2 \cdot \mu^2)}{2 \cdot \lambda \cdot (1 - \rho)} \tag{22}$$

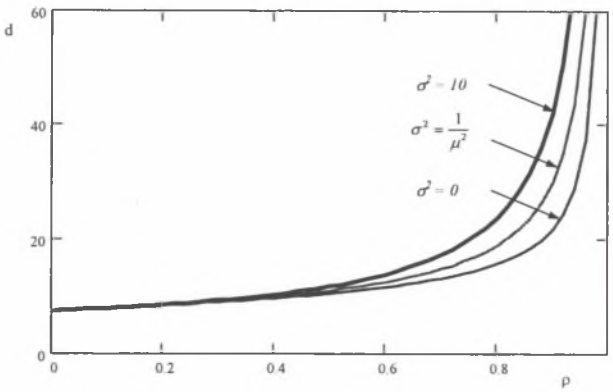
Przy zastosowaniu takiego modelu można uwzględnić wahania czasów obsługi – poprzez wariancję czasów obsługi – σ^2. Na rysunku 3 przedstawiono zastawienie trzech krzywych strat czasu – wyrażonych za pomocą nowego modelu – odpowiadających kolejno przypadkom:

- gdy $\sigma^2 = 0$, co oznacza model M/D/1;
- gdy $\sigma^2 = \frac{1}{\mu^2}$, co oznacza model M/M/1;
- gdy $\sigma^2 = 10$, dla przykładowego empirycznego przypadku (duża wariancja wynika z dużego zróżnicowania czasów obsługi dla pojazdów skręcających w lewo).

5. PODSUMOWANIE

Zastosowanie zmodyfikowanego modelu strat czasu umożliwia uogólnienie procesu obsługi do rozkładu dowolnego. Takie podejście ma uzasadnienie w przypadkach znacznego zróżnicowania czasów obsługi na danym skrzyżowaniu z sygnalizacją świetlną.

Zaproponowany model wymaga weryfikacji na podstawie wyników obserwacji wykonanych na rzeczywistych skrzyżowaniach. W dalszych badaniach rozważane jest użycie w modelu zlepionych procesów kolejek zaproponowanych przez prof. Wocha [12].



Rys. 3.Zmodyfikowany model – straty czasu dla trzech wartości wariancji σ^2
Fig. 3. Modified model – time delay for three values of variance σ^2

Literatura

1. Adan I., Resing J.: Queueing Theory. Eindhoven University of Technology, 2001.
2. Datka S., Suchorzewski W., Tracz M.: Inżynieria ruchu. WKiŁ, Warszawa 1999.
3. Filipowicz B.: Modele stochastyczne w badaniach operacyjnych. Analiza i synteza systemów obsługi i sieci kolejkowych. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996.
4. Gartner N., Messer C. J., Rathi A. K.: Traffic Flow Theory A State-of-the-Art Raport. Transportation Research Board, http://wwwcta.ornl.gov/cta/research/trb/tft.html
5. Kleinrock L.: Queueing Systems. Volume I: Theory. A Wiley-Interscience Publication. Canada 1975.
6. Rajski J., Tyszer J.: Modelowanie i symulacja cyfrowa. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1986.
7. Sierpiński G.: Obsługa pojazdów na skrzyżowaniach z sygnalizacją świetlną. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Transport, z 56, Gliwice 2004, ss. 347 – 352.
8. Sierpiński G.: Opóźnienie „kolizyjne" na skrzyżowaniach z sygnalizacją świetlną – pojazdy skręcające w lewo. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Transport, z 57, Gliwice 2005, ss. 365 – 370.
9. Sierpiński G.: Klasyfikacja modeli opóźnień pojazdów na skrzyżowaniach z sygnalizacją świetlną. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Transport, z 57, Gliwice 2005, ss. 357 – 363.
10. Webster F. V.: Traffic signal settings. Road Research Paper No. 39, Her Majesty's Stationary Office, London 1958.
11. Webster F. V., Cobbe B. M.: Traffic Signals. Road Research Paper No. 56, Her Majesty's Stationary Office, London 1966.
12. Woch J.: Teoria potoków ruchu (w druku).