

Anna CHARKOWSKA

Instytut Ogrzewnictwa i Wentylacji, Politechnika Warszawska

## MODELE MATEMATYCZNE PROCESU FILTRACJI POWIETRZA

**Streszczenie.** Konieczność skutecznego zatrzymywania submikronowych ziaren, których pojawienie się w środowisku czystym zagraża jakości procesu technologicznego i wytwarzanego produktu, wymaga poszukiwania nowych, niekonwencjonalnych struktur filtracyjnych oraz odpowiednich metod opisu procesu filtracji. w wyniku przeprowadzonej analizy dostępnych modeli matematycznych procesu filtracji stwierdzono nie tylko rozbieżności pomiędzy teorią a eksperymentem, lecz także rozbieżności pomiędzy modelami matematycznymi opracowanymi i proponowanymi przez różnych autorów. w referacie przedstawiono nowy model matematyczny należący do grupy modeli hybrydowych, umożliwiający prostszą i jednocześnie wiarygodną ocenę przewidywanej numerycznej skuteczności filtracji.

## MATHEMATICAL MODELS OF AIR FILTRATION PROCESS

**Summary.** The demands for realisation of the production processes in very clean conditions are more and more often. thus it is necessary to effectively filtrate supply air. new goal, the efficient separation of sub micron particles is conducive to development and utilisation of the new filtration materials. however this actions require new mathematical models of filtration process. analysing the existing mathematical models of air filtration process, we can observe the divergences between theory and experiment and also the differences between models elaborated and proposed by various authors.

The paper presents the new model from the hybrid category affording possibilities for simpler but still credible estimations of numerical filtration efficiency.

### Wstęp

W technice filtracyjnej podstawowym dążeniem jest poszukiwanie materiałów filtracyjnych, które w wiarygodny sposób pozwolą na otrzymanie wymaganej wysokiej czystości powietrza za filtrem. Jest to szczególnie istotne w przypadku pomieszczeń technologicznych np. w przemyśle mikroelektronicznym, gdzie priorytetowym wymaganiem jest zapewnienie ściśle kontrolowanej, bardzo niskiej, określanej w sposób numeryczny, koncentracji submikronowych ziaren w pomieszczeniu. Wymaga to doskonalenia opisu

matematycznego procesu filtracji, umożliwiającego przewidywanie skuteczności oczyszczania powietrza lub ułatwiającego podejmowanie decyzji dotyczących doboru parametrów włóknin. W referacie porównano najbardziej znane modele filtracji oraz zamieszczono własny model procesu.

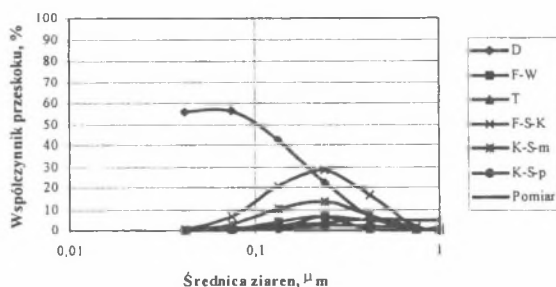
## Modele deterministyczne procesu filtracji

Deterministyczne modele matematyczne filtracji aerozoli w opisie procesu filtracji wykorzystują przybliżone zależności hydrodynamiczne przepływów płynów lepkich, nieściśliwych dla układów o sprecyzowanej geometrii [2]. W modelach równoznaczne z opisem procesu filtracji jest scharakteryzowanie zmian wartości skuteczności filtracji lub współczynnika przeskołu. Podstawą oceny skuteczności filtracji jest opis pola prędkości płynu wokół pojedynczego wyizolowanego włókna o kształcie cylindrycznym ustawionego prostopadle do kierunku przepływu aerozolu. Następnie rozwiązywane są zależności określające zbliżenie cząstki wzdłuż linii prądu, pozwalające ocenić efektywność jej osadzenia na cylindrze pod wpływem różnych mechanizmów filtracyjnych.

W tabeli 1 przedstawione zostały podstawowe założenia wybranych modeli deterministycznych procesu filtracji powietrza. W celu porównania modeli teoretycznych procesu filtracji z warunkami rzeczywistymi, w przeprowadzonych pomiarach skuteczności (a w konsekwencji – przeskołu) wykorzystano włókninę filtracyjną wykonaną metodą papierniczą z cienkich i ultracienkich włókien szklanych. Podczas pomiarów zastosowano polidispersyjny aerosol chlorku sodu o cząstkach submikronowych. Na rysunku 1 przedstawiono charakterystyki filtracyjne otrzymane na podstawie modeli deterministycznych oraz danych eksperymentalnych dla jednej z przebadanych włóknin. Dla znacznej części przebadanych włóknin stwierdzono, że przebieg krzywych otrzymanych dla modeli: polidispersyjnego Kirsza i Stieczkiny oraz Torgensona jest najbliższy krzywej pomiarowej, ale w większości przypadków otrzymano podczas pomiarów lepsze wskaźniki filtracyjne niż podczas analizy teoretycznej. Mimo to, w przypadku bardziej skomplikowanej struktury materiału filtracyjnego o losowo ułożonych niejednorodnych włóknach oraz podczas przepływu submikronowego aerozolu polidispersyjnego nie można stwierdzić, że uzyskano całkowitą zgodność teorii z eksperymentem.

## Modele hybrydowe procesu filtracji

Innym, oprócz deterministycznego, sposobem opisu procesu filtracji jest stosowanie modelowania hybrydowego, w którym wykorzystuje się opis statystyczny, wiążący podstawową wiedzę o procesie uzyskaną na podstawie modeli fizycznych z danymi zebranymi w wyniku przeprowadzania badań eksperymentalnych. Istniejące modele hybrydowe skuteczności filtracji powietrza potwierdzają zasadność takiego właśnie kierunku poszukiwań sposobu jej opisu (autorami takich modeli byli m.in. Clarenburg [1], Blasewitz [8], M. Nowicki [6], Ptak [7], Wirski [9]). Jednak modele te, chociaż rozwiązują wiele istotnych problemów, mają pewne ograniczenia i dlatego nie mogą być zastosowane w odniesieniu do wykorzystywanych w eksperymencie włókien. Zastrzeżenia te dotyczą m.in. innego rodzaju przepływu czy innego etapu procesu filtracji, innych zakresów wymiarowych średnic pyłu i włókien, innych prędkości filtracji lub wykorzystania aerozolu monodispersyjnego. Mimo tych zastrzeżeń, opierając się na istniejących modelach hybrydowych, można potwierdzić poprawność wyboru zmiennych służących do modelowania procesu filtracji (tabele 2, 3).



Rys. 1. Porównanie charakterystyk filtracyjnych: teoretycznych i rzeczywistej  
Figure 1. Comparison of the filter characteristics: theoretics and real

## Proponowany model matematyczny

Po przeprowadzonych porównaniach stwierdzono rozbieżności pomiędzy teorią a eksperymentem oraz pomiędzy modelami opracowanymi i proponowanymi przez różnych autorów. W tej sytuacji, przy wzrastającym nieuporządkowaniu struktury materiałów filtracyjnych, próby dalszej rozbudowy modeli teoretycznych mogą w efekcie nie przynieść

Porównanie wybranych deterministycznych modeli matematycznych procesu filtracji [2, 6, 3]

Cechy charakterystyczne modelu	Model Daviesa	Model Friedlandera-Whitbyego	Model Torgensona	Model Fuksa-Stieczkiny-Kirsza	Model Kirsza-Stieczkiny (monodispersyjny)	Model Kirsza-Stieczkiny (polidispersyjny)
Wzajemny układ włókien	równoległy	równoległy	równoległy	równoległy	wachlarzowy	wachlarzowy
Przepływ aerozolu w stosunku do powierzchni materiału	prostopadły	prostopadły	prostopadły	prostopadły	prostopadły	prostopadły
Aerozol monodispersyjny o średnicy ziaren $< 1 \mu\text{m}$	✓	✓	✓	✓	✓	polidysper. $< 1 \mu\text{m}$
Grubość włókien					cienkie i ultracienkie	cienkie i ultracienkie
<u>Uwzględnione mechanizmy filtracyjne:</u>						
• Dyfuzja molekularna	✓	✓	✓	✓	✓	✓
• Bezpośrednie zaczepienie	✓	✓	✓	✓	✓	✓
• Osadzanie bezwładnościowe	✓	✓		✓		
• Łączne występowanie zaczepienia i osadzania			✓			
• Łączne występowania dyfuzji i zaczepienia				✓	✓	✓
<u>Uwzględnione liczby podobieństwa:</u>						
• Bezpośredniego zaczepienia R	✓	✓	✓	✓	✓	✓
• Pecleta Pe	✓	✓	✓	✓	✓	✓
• Stokesa Stk	✓	✓	✓	✓		
• Reynoldsa Re			✓			
• Knudsena Kn					✓	✓
<u>Spełnienie założeń modeli teoretycznych:</u>						
• Osadzanie ziaren na czystym włóknie	✓	✓	✓	✓	✓	✓
• Trwale osadzania się ziaren na włóknie	✓	✓	✓	✓	✓	✓
• Idealne wymieszania się aerozolu za każdym szeregiem włókien	✓	✓	✓	✓	nie tak istotne, jak w innych modelach	nie tak istotne, jak w innych modelach
• Idealna gładkość stykających się powierzchni	✓	✓	✓	✓	✓	✓
<u>Uwzględnione zjawiska:</u>						
• Filtracja ustalona	✓	✓	✓	✓	✓	✓
• Obszar selektywności filtra					✓	✓
• Wpływ gęstości upakowania materiału $\alpha$ na osadzanie dyfuzyjne	✓	✓	✓	✓	nie ma znaczenia	nie ma znaczenia
• Poślizg cząstek gazu na powierzchni włókien					✓	✓
• Niejednorodność włókien					✓	✓
• Polidispersyjność włókien						✓
• Zmienność miejscowej gęstości materiału	—	—	—	—	—	—

prawidłowego rozwiązania. Prowadzi to do konieczności poszukiwania innego sposobu opisu procesu filtracyjnego, wykorzystującego nie tylko wiedzę o samym zjawisku, ale rozszerzającego podejście do rozpatrywanego problemu modelowania o wykorzystanie danych pomiarowych i ich analizę statystyczną. Zdecydowano się na zastosowanie jednej z metod modelowania hybrydowego (regresja liniowa wieloparametrowa), co pozwoliło na sformułowanie zależności matematycznej umożliwiającej przewidywanie numerycznej skuteczności filtracji powietrza (lub przeskoku) w zależności od wartości, jaką przyjmują pozostałe charakterystyczne parametry. Selekcji zmiennych dokonano na podstawie analizy niektórych istniejących hybrydowych i deterministycznych modeli filtracji. Parametry uwzględnione w modelach przedstawiono w tabelach 2 i 3.

Tabela 2

Parametry stosowane w modelach hybrydowych [1, 8, 6, 7, 9]

Parametr	Oznaczenie	Autor modelu
Średnica ziaren pyłu	$d_p$	Nowicki M, Ptak
Gęstość pyłu	$\rho_p$	Ptak
Średnica włókna	$d_w$	Clarenburg, Nowicki M., Ptak, Wirski
Długość wszystkich włókien	$L_C$	Clarenburg
Grubość materiału	$H$	Blasewitz, Nowicki M., Ptak, Wirski
Gęstość upakowania włókniny	$\alpha$	Blasewitz, Clarenburg, Nowicki M, Ptak, Wirski
Prędkość filtracji	$u$	Blasewitz, Ptak, Wirski

Po przeanalizowaniu ww. modeli, uznano podany w tabeli 4 wybór zmiennych za podstawę do przeprowadzenia opisu procesu filtracji. Zmienne charakteryzują zarówno materiał filtracyjny, jak i wielkości oraz ilości ziaren zatrzymanych oraz przepuszczonych podczas procesu filtracji.

W wyniku analizy metodą krokowej regresji liniowej wielorakiej otrzymano zależność (1):

$$\eta = 100 - k = -15.11d_w - 1227.10 \cdot \ln(\rho_w) - 19.76d_p + 291.21M_p + 9590.90 \quad (1)$$

Współczynnik regresji wielokrotnej dla tego równania wynosił:  $R=0.91$ .

Tabela 3

Parametry stosowane w modelach deterministycznych [2, 4, 5, 8]

Parametr	Oznaczenie	Autor modelu
Średnica pyłu	$d_p$	Davies, Friedlander-Whitby, Torgenson, Fuks i in., Kirsz i in.
Średnica włókna	$d_w$	Davies, Friedlander-Whitby, Torgenson, Fuks i in., Kirsz i in.
Gęstość włókien	$\rho_w$	Friedlander-Whitby
Rozproszenie średnic włókien	$\delta$	Kirsz i in.
Grubość materiału	H	Davies, Friedlander-Whitby, Torgenson, Fuks i in., Kirsz i in.
Gęstość upakowania włókniny	$\alpha$	Davies, Friedlander-Whitby, Torgenson, Fuks i in., Kirsz i in.
Masa powierzchniowa włókniny	$M_p$	Friedlander-Whitby
Współczynnik niejednorodności włókniny	$\varepsilon$	Fuks i in., Kirsz i in.
Strata ciśnienia	$\Delta p$	Davies, Friedlander-Whitby, Torgenson, Fuks i in., Kirsz i in.
Prędkość filtracji	u	Davies, Friedlander-Whitby, Torgenson, Fuks i in., Kirsz i in.

Tabela 4

Parametry zastosowane podczas opisu procesu filtracji [3]

Parametr	Oznaczenie	Jednostka
Przedziałowa numeryczna skuteczność filtracji (lub współczynnik przeskoku)	$\eta$ (lub k)	%
Średnica włókien szklanych	$d_w$	$\mu\text{m}$
Gęstość włókien	$\rho_w$	$\text{kg/m}^3$
Średnica ziaren	$d_p$	$\mu\text{m}$
Masa powierzchniowa włókniny	$M_p$	$\text{kg/m}^2$

Otrzymane równanie opisuje przedziałową numeryczną skuteczność filtracji włóknistych materiałów filtracyjnych o wysoce nieuporządkowanej strukturze, wykonanych metodą papierniczą z mikrowłókien szklanych przy prędkości napływu powietrza wynoszącej 3 cm/s podczas procesu filtracji ustalonej.

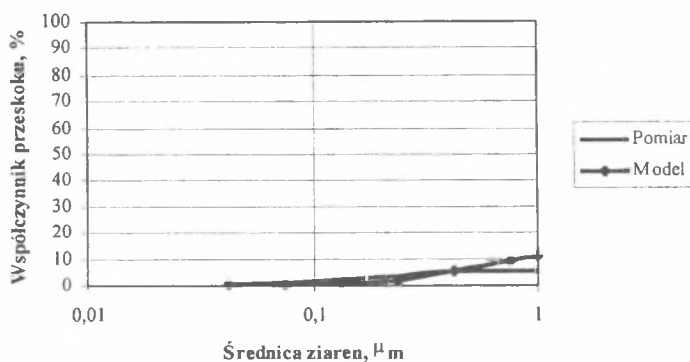
Zakres stosowalności równania podano w tabeli 5.

Tabela 5

Graniczne wartości zmiennych niezależnych zawartych w równaniu regresji

Wielkość	Jednostka	Wartość minimalna	Wartość maksymalna
$d_w$	$\mu\text{m}$	1.1420	4.1070
$\rho_w$	$\text{kg}/\text{m}^3$	2250.0	2290.0
$d_p$	$\mu\text{m}$	0.0316	1.0
$M_p$	$\text{kg}/\text{m}^2$	0.0562	0.0877

Na rysunku 2 przedstawiono porównanie charakterystyki filtracyjnej rzeczywistej i teoretycznej otrzymanej zgodnie z zaproponowaną zależnością dla włókniny, która była podstawą do wykonania rysunku 1.



Rys. 2. Porównanie charakterystyki filtracyjnej rzeczywistej i teoretycznej otrzymanej na podstawie zaproponowanego modelu

Fig. 2. Comparison of the filter characteristics: real and theoretic obtained on the basis of the proposed model

## Podsumowanie

Uwaga wielu naukowców skierowana była w kierunku poszukiwania metod analitycznego opisu procesu zatrzymywania ziaren o określonej średnicy. Nie jest to zadanie proste w przypadku występowania wielu współzależnych mechanizmów fizycznych, decydujących o skuteczności procesu filtracji. W sytuacji gdy przenikające ziarna w sposób trudny do przewidzenia wchodzą w kontakt z mikroelementami tworzącymi złożone struktury filtracyjne, trudno o jednoznaczność opisu.

W literaturze spotkać można szereg matematycznych modeli, w różny sposób opisujących właściwości różnorodnych struktur materiałów filtracyjnych. Materiały te, wytwarzane jako tkaniny, dzianiny, włókniny, papiery i bibuły, charakteryzują się bardzo zróżnicowaną budową: od prostej w postaci równoległe do siebie usytuowanych włókien wątku i osnowy do wysoce skomplikowanej, w wyniku nieuporządkowanego losowego ich ułożenia. Obserwowana w ostatnich czasach tendencja do wykorzystywania do oczyszczania powietrza z zanieczyszczeń submikronowych materiałów wykonywanych metodą papierniczą, wymaga rozwiązania pojawiających się nowych problemów, związanych już nie tylko z wpływem wielkości średnic, lecz także z układem włókien i kanałów (porów) w warstwie papierowej.

Większość deterministycznych modeli procesu filtracji wykorzystuje w opisie matematycznym zjawisko opływu strumieniem powietrza wokół równoległe ułożonych elementów. Model przybliżający w swoich założeniach filtr "teoretyczny", do nowoczesnych złożonych materiałów (model wachlarzowy) stanowi bardzo interesujące przybliżenie, nie dając jednak pewności, że równie dobrze będzie służył wnioskowaniu w odniesieniu do papierów (czy raczej włóknin wytwarzanych metodą papierniczą), z powodu przypadkowości w układzie włókien i związanej z tym niepowtarzalności struktury oraz niewątpliwie występującej jej miejscowej (lokalnej) niejednorodności.

Natomiast dostępne modele hybrydowe nie obejmują zagadnień związanych z filtracją submikronowych ziaren przez skomplikowane strukturalnie włókniny.

Rosnąca odpowiedzialność realizatorów, coraz większy margines niepewności w ocenie numerycznych wielkości przedziałowej skuteczności filtracji oraz wyraźne przesuwanie się obszaru rozważań w kierunku frakcji submikronowych wskazują na konieczność formułowania nowych, uogólnionych podstaw opisu złożonych struktur filtracyjnych oraz weryfikacji stosowanych dotychczas metod ich doboru.

W świetle tych uwag, należy stwierdzić, że przedstawiony w referacie model uogólniający proces filtracji wysokoskutecznej przez zróżnicowane strukturalnie włókniny wykonane metodą papierniczą umożliwi obliczenie skuteczności w sposób znacznie prostszy i jednocześnie wiarygodny (o czym świadczy wysoka wartość współczynnika korelacji).

Otrzymana zależność nie wyczerpuje wszystkich problemów związanych z projektowaniem i wytwarzaniem materiałów filtracyjnych. Jednak ponieważ dotychczas brakowało rozważań dotyczących modelowania procesu filtracji ziaren submikronowych przez włókniny filtracyjne wykonane metodą papierniczą i występującej w takich warunkach



oceny numerycznej przedziałowej skuteczności, jest pewnym uzupełnieniem wiedzy dotyczącej modelowania i przebiegu procesów filtracji.

## LITERATURA

1. Brown R.C., Air Filtration, An Integrated Approach to the Theory and Applications of Fibrous Filters, Pergamon Press, Printed in Great Britain by BPPC Wheatons Ltd. Exeter 1993.
2. Charkowska A., Nowicki J.: Analiza możliwości wykorzystania modeli matematycznych do opisu procesu filtracji wysokodispersyjnych aerozoli w złożach z włókien szklanych, w: Materiały Konferencyjne Konferencji Naukowo-Technicznej "Indywidualne środki ochrony przed skażeniem", Warszawa, 21-22.10.1992, s. 199-213.
3. Charkowska A.: Probabilistyczna ocena numerycznej skuteczności filtracji aerozolu w materiałach mikrowłóknistych o słabo zdeterminowanej strukturze, Praca doktorska, Wydział Inżynierii Środowiska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1997.
4. Kirsz A.A., Stieczkina I.B.: The Theory of Aerosol Filtration with Fibrous Filters, w: Aerosol Science, Ed.: D.T.Shaw, Wiley, New York 1978, s. 165-256.
5. Lücke T.: Filtrationseigenschaften inhomogener Filtermedien für die Schwebstofffiltration, Dr.-Ing. Dissertation, Technischen Universität, Dresden 1994.
6. Nowicki M.: Proces filtracji aerozolu w filtrach włóknistych z poliakrylonitrylu, Praca doktorska, Zakład Ochrony Atmosfery Instytutu Inżynierii Środowiska Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1972.
7. Ptak T.: Proces filtracji aerozolu i optymalizacja włókninowego złoża filtracyjnego w obszarze przepływów przejściowych, Praca doktorska, Wydział Inżynierii Sanitarnej i Wodnej Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1982.
8. Użow W.N., Miagkow B.I.: Oczystka promyślnych gazów filtrami, Chimia, Moskwa 1970.
9. Wirski W.: Wpływ parametrów włóknistej warstwy filtracyjnej na skuteczność odpylania, Praca doktorska, Wydział Chemii Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1969.

**Abstract**

The present state of the theory of aerosol filtration does not permit to design correctly the real filtration structures owing to often-occurring divergences between theory and experiment and also the differences between mathematical models elaborated and proposed by various authors. The elaboration of a satisfying theoretical model, even for an unary material and for a determined filtration, meets serious difficulties. This is the result of the fact that real fibrous filtration materials and conditions of aerosol flow differ from assumed theoretical foundations of mathematical models and do not comply with simplifications assumed for them.

We can expect from the mathematical models which conduct to the determination of the numerical fractional filtration efficiency that they will ensure a reliable assessment of the computed quantity and not so troublesome calculation procedure. The deterministic models used to date, in which the particular filtration mechanisms are considered in detail, describe the air filtration process in a very complicated manner, which does not encourage making use of them. They require not only the knowledge of the parameters and the properties of the material and dust, but also of many similarity numbers and parameters, which characterize the air. At the same time many of them cannot provide a sufficiently precise basis for the quantitative assessment of the filtration efficiency. On the other hand the available hybrid models do not comprise the problems connected with the filtration of the submicron size particles through the structurally- complicated non-wovens.

These problems forced to search for the method for a description of the filtration process other than the deterministic one, in which not only the knowledge of the phenomenon alone will be used, but which will extend also the approach to the problem of modeling by using the measurement data and their statistical analysis.

The formula proposed in this paper describing the air filtration process created on a base on the multiply regression model can be a base to optimisation the parameters of the filtering unwoven materials structures leading to designing filters with the highest filtration efficiency without the necessity to look deeper in the complicated nature of the filtration mechanisms taking place during the air cleaning.