

Piotr FOLEGA

ZAGADNIENIA MODELOWANIA DYNAMIKI PRZEKŁADNI FALOWEJ

Streszczenie. W pracy wyznaczono wielkość i charakter rozkładu sił działających na wieniec zębaty koła podatnego w strefach zazębienia i opierania na generatorze fali oraz określono dodatkowe wymuszenia spowodowane błędami wykonania i montażu elementów przekładni.

THE PROBLEMS OF THE HARMONIC DRIVE DYNAMICS MODELLING

Summary. In this paper the some aspect of the analysis of dynamics of the flexspline was presented. Problem of kinematic precision and transmitted torque stability is one the main criteria of usability of harmonic drives in automatic control systems. In this paper some dynamic effects encountered in flexible links of harmonic drives under internal action.

1. WPROWADZENIE

Zębatą przekładnię falową (rys. 1) stanowi mechanizm zębaty, który składa się z trzech podstawowych elementów: koła zębatego sztywnego wewnątrz uzębionego, koła podatnego z naciętym wieniec zębata oraz odkształcającego go generatora fali.



Rys. 1. Główne elementy przekładni falowej typu HDUC [1]: 1 - koło sztywne, 2 - koło podatne z dnem, 3 - generator fali

Fig. 1. The elements of harmonic drive of type HDUC [1]: 1 - circular spline, 2 - the cup type of flexspline, 3 - wave generator

W przekładniach falowych sposób przekazywania momentu zewnętrznego poprzez cykliczne deformowanie generatorem fali koła podatnego powoduje powstawanie w tym elemencie złożonego stanu naprężeń. Dlatego najbardziej obciążonym, najsłabszym oraz głównym elementem zębatych przekładni falowych jest ich koło podatne. Od jego konstrukcji oraz cech geometrycznych zależą podstawowe cechy przekładni, które określają jej

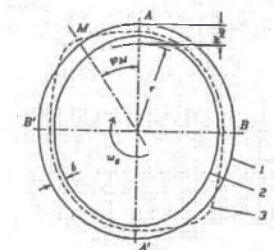
dopuszczalną obciążalność, sprawność, zakres prędkości obrotowych.

Zastosowanie zębatach przekładni falowych w różnych dziedzinach życia jest coraz szersze. Znajdują one obecnie zastosowanie w przemyśle motoryzacyjnym, kosmicznym, lotnictwie, medycynie oraz automatyce i robotyce. W przekładniach wykorzystywanych w układach automatycznej regulacji (roboty przemysłowe) dużego znaczenia nabierają zagadnienia dotyczące ich wysokiej dokładności kinematycznej oraz płynności przekazywania momentu. Do opisanego dynamiki koła podatnego można zastosować nieliniowy model ciągły (duże odkształcenia ścianki koła podatnego), wykorzystując równania geometrycznie nieliniowej teorii sprężystości powłok cienkościennych [2]. W tym celu należy wyodrębnić z przekładni koło podatne opisać równaniami ruchu, przyjmując odpowiednie warunki brzegowe oraz wielkość i charakter rozkładu sił działających na wieniec koła podatnego w strefach zazębienia i opierania na generatorze fali, uwzględniając dodatkowe wymuszenia spowodowane błędami wykonania i montażu elementów przekładni.

Celem pracy jest prawidłowe określenie i wyznaczenie wielkości i charakteru rozkładu wszystkich sił działających na koło podatne dwufalowej przekładni zębataj z mechanicznym generatorem fali. Jako pierwsze zostaną określone obciążenia w strefie zazębienia oraz kontaktu koła podatnego z generatorem fali w funkcji przenoszonego momentu. Następnie zostaną określone dodatkowe siły działające na wieniec koła podatnego spowodowane błędami wykonania oraz montażem głównych elementów przekładni. Następnym etapem pracy będzie stworzenie nieliniowego modelu ciągłego wyodrębnionego z przekładni koła podatnego z wykorzystaniem przyjętych warunków brzegowych oraz wszystkich wyznaczonych sił działających na koło podatne w strefie zazębienia i współpracy z generatorem fali.

2. ROZKŁAD SIŁ W ZAZĘBIENIU ORAZ W STREFIE KONTAKTU Z GENERATOREM

Problem prawidłowego rozkładu obciążeń w zazębieniu i strefie kontaktu z generatorem w funkcji przenoszonego momentu przez przekładnię nie został do chwili obecnej w pełni teoretycznie rozwiązany. W pracy [3] stwierdzono, że koło podatne pod wpływem obciążenia od sił w zazębieniu oraz generatora fali ulega wyboczeniu (rys. 2) względem dużej osi generatora AA' w strefach AB i A'B pod tym samym kątem φ_M . Kształt wyboczonego koła przedstawia krzywa 3 na rysunku 1. Krzywa 1 obrazuje eliptyczne odkształcenie koła podatnego współpracującego z generatorem fali (krzywa 2).

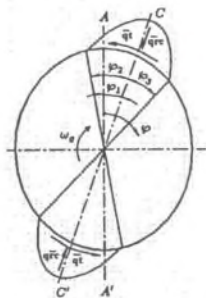


Rys. 2. Wyboczenie koła podatnego pod wpływem obciążenia [3]

Fig. 2. The buckling of the flexspline under the loading [3]

W opracowaniu do określenia rozkładu obciążeń w obu rozpatrywanych strefach zostaną wykorzystane wyniki badań doświadczalnych podane w [4] oraz zależności będące próbą aproksymacji tych wyników podane w [5]. Przedstawione poniżej zależności w odróżnieniu od prac [4,5] dotyczą koła podatnego odkształcanego mechanicznym generatorem z zarysem krzywkowym, przy założeniu ewolwentowego zarysu zębów o nominalnym kącie zarysu $\alpha = 20^\circ$ oraz stosunku deformacji promieniowej w_0 do modułu mieszczącego się w przedziale $w_0/m = 0.9 \div 1.2$.

Na podstawie wyników badań doświadczalnych, obciążenia działające na koło podatne można aproksymować w sposób przedstawiony na rys. 3.



Rys. 3. Rozkład obciążenia działającego na koło podatne [4]

Fig. 3. The distribution loading of the flexspline [4]

Na rysunku 3 kąty φ_2 oraz φ_3 określają wielkość strefy obciążenia, a kąt φ_1 położenie tej strefy względem dużej osi generatora AA'. Na podstawie doświadczeń stwierdzono, że kąty określające wielkość strefy obciążenia wynoszą odpowiednio: $\varphi_1 = -\pi/12$, $\varphi_2 = \varphi_3 = \pi/8$ [3]. Strefa obciążenia, w przypadku gdy kąty φ_2 i φ_3 są sobie równe, ograniczona jest przedziałem $(\varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1 + \varphi_2)$. Obciążenie promieniowe $\bar{q}_r$ oraz styczne $\bar{q}_t$ występujące w zazębieniu, w strefie działania sił międzyzębnych, pochodzące od przenoszonego momentu przez przekładnię, można opisać następującymi zależnościami

$$\bar{q}_t = \bar{q}_{t\max} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{2 \cdot \varphi_2} \cdot (\varphi - \varphi_1) \right] \quad (1)$$

$$\bar{q}_r = \bar{q}_{t\max} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \left[\frac{\pi}{2 \cdot \varphi_2} \cdot (\varphi - \varphi_1) \right] \quad (2)$$

Obciążenie promieniowe $\bar{q}_r$ można wyznaczyć również na podstawie wzoru

$$\bar{q}_r = \bar{q}_t \cdot \operatorname{tg} \alpha_t \quad (3)$$

gdzie:

α_t - nominalny kąt zarysu na średnicy toczonej,

$\bar{q}_{t\max}$ - maksymalne obciążenie styczne.

Wielkość maksymalna obciążenia $\bar{q}_{t\max}$ jest związana z momentem przenoszonym przez przekładnię M_2 wzorem

$$M_2 = 4 \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \varphi_2} b_w \cdot \left(\frac{d_{01}}{2} \right)^2 \cdot \bar{q}_{t \max} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{2 \cdot \varphi_2} \cdot (\varphi - \varphi_1) \right] d\varphi \quad (4)$$

gdzie:

b_w - szerokość wieńca zębatego,

d_{01} - średnica podziałowa wieńca zębatego,

z którego po przekształceniach otrzymuje się

$$\bar{q}_{t \max} = \frac{\pi \cdot M_2}{2 \cdot \varphi_2 \cdot d_{01}^2 \cdot b_w} \quad (5)$$

W obliczeniach należy przyjąć stałą wartość obciążenia promieniowego $\bar{q}_r$ oraz stycznego $\bar{q}_t$ na szerokości wieńca zębatego.

Obciążenie promieniowe w zazębieniu $\bar{q}_r$ jest przeciwnie zwrócone do reakcji promieniowej generatora $\bar{q}_{rg}$ oraz jest przez nią równoważone. Moment, jaki tworzy obciążenie styczne w zazębieniu $\bar{q}_t$, równoważony jest momentem M_2 na wale wyjściowym. Obciążenie $\bar{q}_t$ może spowodować, po przekroczeniu wartości granicznej, zmianę formy koła podatnego (wyboczenie). Spowodowane jest to jego nierównomiernym rozłożeniem na obwodzie koła. Zjawisku temu przeciwdziała normalna reakcja generatora $\bar{q}_{rg}$. Zgodnie z [5]

$$\bar{q}_{rg} = \int \bar{q}_t d\varphi \quad (6)$$

Rozkładając następnie $\bar{q}_t$ określone wzorem (1) w szereg otrzymamy

$$\bar{q}_t = \bar{q}_{t0} + \sum_{k=2,4,6,\dots} \bar{q}_{tk} \cdot \cos[k \cdot (\varphi - \varphi_1)] \quad (7)$$

W celu wyznaczenia $\bar{q}_{t0}$ należy zależność (7) scałkować w granicach od $\varphi = \varphi_1$ do $\varphi = \varphi_1 + 2\pi$, natomiast by określić $\bar{q}_{tk}$, musimy wyrażenie (7) pomnożyć przez $\cos[k \cdot (\varphi - \varphi_1)]$, a następnie scałkować w granicach jak wyżej. Po tych operacjach otrzymamy następujące wyrażenia

$$\bar{q}_{t0} = \frac{4 \cdot \varphi_2}{\pi^2} \cdot \bar{q}_{t \max} \quad (8)$$

$$\bar{q}_{tk} = \frac{2}{\pi} \cdot \bar{q}_{t \max} \cdot \left[\frac{\sin(a - k)\varphi_2}{a - k} - \frac{\sin(a + k)\varphi_2}{a + k} \right] \quad (9)$$

gdzie: $a = \frac{\pi}{2 \cdot \varphi_2}$.

Zmianę kształtu koła podatnego powoduje składowa $\bar{q}_{tk}$ obciążenia stycznego. Dlatego przy określaniu normalnej reakcji generatora $\bar{q}_{rg}$ (wzór 6) należy brać pod uwagę tylko $\bar{q}_{tk}$. Stąd promieniową reakcję generatora możemy określić z zależności

$$\bar{q}_{rg} = \int \sum_{k=2,4,6,\dots} \bar{q}_{tk} \cdot \cos[k \cdot (\varphi - \varphi_1)] d\varphi = \sum_{k=2,4,6,\dots} \frac{\bar{q}_{tk}}{k} \cdot \sin[k \cdot (\varphi - \varphi_1)] + C \quad (10)$$

gdzie:

$$C = - \sum_{k=2,4,6,\dots} \frac{\bar{q}_{tk}}{k} \cdot \sin[k \cdot (\gamma - \varphi_1)] \quad (11)$$

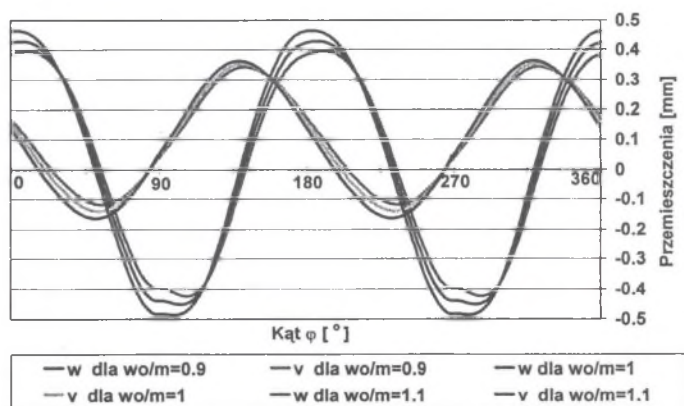
We wzorze (11) kąt γ odpowiada wartości kąta φ , przy której wyrażenie

$\sum_{k=2,4,6,\dots} \frac{\bar{q}_{tk}}{k} \cdot \sin[k \cdot (\varphi - \varphi_1)]$ z zależności (10) osiąga absolutne minimum.

Podsumowując podane zależności, przyjęto, że do określenia składowej stycznej obciążenia w zazębieniu należy przyjąć zależność (1), a do wyznaczenia składowej normalnej spowodowanej oddziaływaniem sił międzyzębnych oraz generatora sumę wyrażen (2) i (10)

$$\bar{q}_{rc} = \bar{q}_r + \bar{q}_{rg} \quad (12)$$

W pracy do wyznaczenia w obu rozpatrywanych strefach obciążeń w postaci wartości przemieszczeń powierzchni wewnętrznej koła podatnego zdecydowano się na opracowanie płaskiego modelu koła podatnego i odkształcającego go generatora fali z wykorzystaniem metody elementów skończonych (MES). W numerycznym modelu koła podatnego i generatora fali wykorzystano elementy kontaktowe MES. Do określenia rozkładu obciążenia koła podatnego w strefie działania sił międzyzębnych wykorzystano zależności (1) i (2). Natomiast obciążenie pochodzące od generatora (zależności (10) i (11)) wyznaczone zostało poprzez symulację ruchu generatora odkształcającego koło podatne obciążoną siłami międzyzębnymi. W wyniku ruchu generatora powstaje obciążenie promieniowe w strefie kontaktu koła podatnego z generatorem $\bar{q}_{rg}$, jako rezultat oddziaływania elementów kontaktowych pomiędzy wewnętrzną powierzchnią koła a generatorem. Przykładowe wyniki obliczeń przemieszczeń normalnych i stycznych powierzchni wewnętrznej koła podatnego przedstawiono na rysunku 4. Dotyczą one wpływu na przemieszczenia względnej deformacji promieniowej w_0/m przy obciążeniu nominalnym. Większe wartości deformacji promieniowej powodują odpowiednie zwiększenie wartości przemieszczeń stycznych i normalnych.



Rys. 4. Przemieszczenia normalne (w) i styczne (v)

Fig. 4. The diagram of radial (w) and tangential (v) displacements

3. WYZNACZENIE WARTOŚCI WYMUSZEŃ KINEMATYCZNYCH

Podczas pracy przekładni falowej w ruchu ustalonym przenoszeniu momentu napędowego towarzyszą drgania skrętne. Drgania te mogą być spowodowane błędami wykonania oraz błędami montażu elementów przekładni. Deformacja koła podatnego generatorem fali prowadzi do cyklicznej zmiany sprężystego kąta skręcania koła podatnego i zmian wartości obciążenia, co prowadzi do istotnych zmian wartości przenoszonego przez przekładnię momentu. Ze względu na bardzo wysoką wymaganą dokładność kinematyczną przekładni falowych stosowanych w układach automatycznej regulacji dużego znaczenia nabiera prawidłowe określenia ich stanu dynamicznego.

W przekładniach falowych z mechanicznym generatorem fali mogą wystąpić następujące rodzaje błędów: błąd okręgu zasadniczego wieńca koła sztywnego, błąd grubości ścianki koła podatnego, błąd mimośrodów generatora i innych elementów przekładni, błąd podziałki międzyzębnej. Przy oszacowaniu wpływu poszczególnych błędów na dodatkowe wymuszenie kinematyczne ważna jest częstość ich występowania. Najbardziej niebezpieczne są wymuszenia o częstościach bliskich częstości obrotu generatora fali. Należą do nich błąd mimośrodów wału generatora oraz innych elementów przekładni. Błędy okręgu zasadniczego wieńca koła sztywnego i grubości ścianki koła podatnego mają znaczenie przy małych przełożeniach oraz wysokich obrotach. Natomiast błąd podziałki międzyzębnej z powodu wysokiej częstości oraz znaczącego tłumienia układu z przekładnią falową nie wpływa znacząco na drgania przekładni. Wypadkowy wektor odchyłek kinematycznych uwzględniający dodatkowe wymuszenia z niebezpiecznymi częstościami występowania można określić wzorem [6]

$$\bar{F}(\omega_i t) = \left[\bar{e}_{\Sigma 1-2-3}(\omega_i t) \frac{1}{\cos \alpha_i} - K \cdot \bar{e}_d(\omega_i t) \right] \cdot \frac{412.5}{d \cdot \sqrt{Z_\Sigma}} \quad (13)$$

gdzie:

$\bar{e}_{\Sigma 1-2-3}$ - maksymalny chwilowy wektor błędu mimośrodu wszystkich elementów przekładni (1 - generator fali, 2 - wieniec zębany koła podatnego, 3 - wieniec zębany koła sztywnego),

Z_Σ - liczba par zębów będących w przyporze,

$$K = \frac{\pi \cdot \bar{e}_d}{4 \cdot i \cdot w_0 \cdot u} \quad (14)$$

$\bar{e}_d$ - dodatkowy wektor błędu nieskompensowany podatnością wieńców.

Wypadkowy wektor błędu kinematycznego pomiędzy generatorem fali a kołem podatnym można opisać zależnością

$$\bar{e}_{\Sigma 1-2} = \bar{e}_{\Sigma 2} - \frac{\bar{e}_{\Sigma 2} - \Delta p_{\Sigma 1}}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \lambda_1 \quad (15)$$

gdzie:

$e_{\Sigma 2}$, $\Delta p_{\Sigma 1}$ - błędy mimośrodu koła podatnego i generatora fali przed montażem,

λ_1 λ_2 - podatność promieniowa wieńca zębatego koła podatnego i generatora.

Wypadkowy wektor błędu kinematycznego całej przekładni po montażu uwzględniający wszystkie podstawowe elementy opisuje wyrażenie

$$\bar{e}_{\Sigma 1-2-3}(\omega_i t) = \bar{e}_{\Sigma 1-2}(\omega_i t) - \left[\frac{\bar{e}_{\Sigma 1-2}(\omega_i t) - \bar{e}_{\Sigma 3}(\omega_i t)}{\lambda_3 + \lambda_4} \right] \cdot \lambda_3 \quad (16)$$

gdzie:

$e_{\Sigma 3}$ - błąd mimośrodowość wieńca koła sztywnego,

λ_3, λ_4 - podatność promieniowa generatora fali, wieńca koła podatnego i wieńca koła sztywnego.

Wypadkowy wektor błędów kinematycznych (13) można zatem zapisać, uwzględniając błędy składowe elementów przekładni oraz podatności węzłów określonych wzorami (14), (15), (16). W obliczeniach wygodniej jest przedstawić wypadkowy wektor błędów kinematycznych jako dodatkowe siły powstające w przekładni, które są spowodowane występującymi błędami. W związku z tym zależność (13) można zapisać

$$F(\omega_i t) = \left[\frac{F_1(\omega_i t) - F_2(\omega_i t)}{\cos \alpha_i} - F_3(\omega_i t) \right] \cdot C \quad (17)$$

$$F_1(\omega_i t) = \left[\frac{e_{\Sigma 2}}{\lambda_1} - \frac{e_{\Sigma 2} - \Delta \rho_{\Sigma 1}}{\lambda_1 + \lambda_2} \right] \cdot \sin \omega t \quad (18)$$

$$F_2(\omega_i t) = \left[\frac{e_{\Sigma 1-2} - e_{\Sigma 3}}{\lambda_3 + \lambda_4} \right] \cdot \sin \omega t \quad (19)$$

$$F_3(\omega_i t) = K \cdot \frac{e_d}{\lambda_3} \cdot \sin \omega t \quad (20)$$

$$C = \frac{412.5}{d \cdot \sqrt{Z_{\Sigma}}} \quad (21)$$

Ostatecznie można wartość dodatkowej siły spowodowanej wypadkowym błędem wykonania elementów przekładni oraz jej montażu zapisać w postaci

$$F(\omega_i t) = \left[\left(\frac{e_{\Sigma 2} \cdot \lambda_2 + \Delta \rho_{\Sigma 1} \cdot \lambda_1}{\lambda_1 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)} - \frac{e_{\Sigma 1-2} - e_{\Sigma 3}}{\lambda_3 + \lambda_4} \right) \cdot \frac{1}{\cos \alpha_i} - \frac{K \cdot e_d}{\lambda_3} \right] \cdot C \cdot \sin \omega t \quad (22)$$

Zależność (22) określa wartość promieniowej siły działającej na wieniec koła podatnego od generatora fali oraz wieńca koła sztywnego. Charakter zmian tej siły w czasie odpowiada zmianą wypadkowego wektora błędu przekładni falowej i jest zbliżony do funkcji sinów.

4. PODSUMOWANIE

W pracy określono i wyznaczono wielkość i charakter rozkładu wszystkich sił działających na koło podatne dwufalowej przekładni zębatej z mechanicznym generatorem fali. Określono obciążenia w strefie zazębienia oraz kontaktu koła podatnego z generatorem fali w funkcji przeniesionego momentu oraz podano zależności na dodatkowe siły działające na wieniec koła podatnego spowodowane błędami wykonania oraz montażem głównych elementów przekładni. Kolejnym etapem pracy będzie stworzenie nieliniowego modelu ciągłego wyodrębnionego z przekładni koła podatnego z wykorzystaniem przyjętych warunków brzegowych oraz wszystkich wyznaczonych sił działających na koło podatne w strefie zazębienia i współpracy z generatorem fali.

Literatura

1. Katalog firmy Harmonic Drive Systems.
2. Ostapski W.: Problemy modelowania przekładni falowych, I Ogólnopolskie Seminarium N-T, Przekładnie Mechaniczne Specjalne - modelowanie, rozwój konstrukcji i perspektywy zastosowań, Warszawa 1996.
3. Iwanow M.: Harmonic Gear Drive, Moscow 1981.
4. Finogenew W., Iwanow M.: Wołnowyje zubczatyje pieredaczi, Tезisy dokładow wsiezojuznogo simpozjuma. Niekotoryje riezultaty kompleksnych ekspierimientow i issledowanij. 1973.
5. Iwanow M., Sorokin A.: Rasczot nagruzki na kułaczkowyj gienierator i napriazienij rastiazenija gibkogo koleśa wolnowoj peredaczi, JWUZ Maszynostrojenije, nr 6, 1980.
6. Ostapski W.: Drgania przekładni falowych przy wymuszeniach wewnętrznych, ZN Pol. Śl., s. Mechanika, z. 85, Gliwice 1987.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Zbigniew Dąbrowski

Praca wykonana w ramach BW 419/RT2/2006