

Mieczysław MIECZKOWSKI

Katedra Mechanizacji Górnictwa
Politechnika Lubelska

BADANIA WPŁYwu OBJĘTOŚCIOWEGO MODUŁU SPRĘŻYSTOŚCI CIECZY NA PODATNOŚĆ STOJAKÓW HYDRAULICZNYCH

Streszczenie. W artykule przeanalizowano wpływ ciśnienia na zmianę objętości cieczy przy założeniu stałej oraz zmiennej wartości modułu ściśliwości. Wykazano, że w granicach stosowanych zakresów zmian ciśnienia, wahania modułu są bardzo niewielkie, co dopuszcza w praktyce przyjmowanie stałej jego wartości.

Summary. The influence of pressure on the change of liquid volume with an assumption of constant and variable value of bulk modulus has been analyzed. It has been proved that within the pressure change ranges used, the modulus variations are negligible which allows, in practice, an assumption of its constant value.

Резюме. В статье проанализировано влияние давления на изменение объема, жидкости принимая постоянное и переменное значение модуля сжимаемости.

Доказано, что в применяемых пределах изменений давления изменения модуля незначительны, что позволяет на практике принимать его постоянное значение.

1. WSTĘP

Stojaki hydrauliczne rozparte między spągami a stropem zmniejszają swą długość w wyniku nacisku stropu. Składają się na to trzy przyczyny:

- ściśliwość cieczy,
- przecieki spowodowane brakiem szczelności,
- odkształcenia sprężyste elementów stojaka.

Wpływ wymienionych czynników może być bardzo różny, np w stojakach nowoczesnej konstrukcji, w których żąda się 100% szczelności [1], przecieki praktycznie nie występują. Przyjmując także, że odkształcenia sprężyste ścianek cylindra oraz tłoczyska są niewielkie, wpływ na położenie tłoka w cylindrze ma praktycznie tylko moduł sprężystości objętościowej.

Wiadomo, że siup emulsji znajdujący się w stojaku można traktować jako element sprężysty o współczynniku sprężystości określonym wzorem [2]

$$k = \frac{B \cdot F}{h} \quad (1)$$

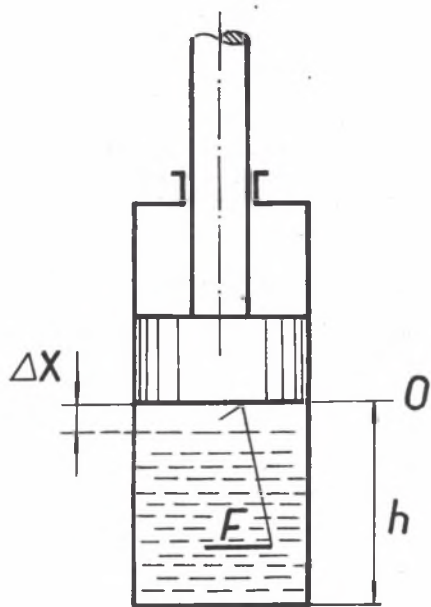
gdzie:

F - powierzchnia tłoka,

h - wysokość słupa cieczy,

B - moduł sprężystości objętościowej.

Wzór powyższy jest analogiczny do zależności określającej współczynnik sprężystości pręta jako ciała stałego, przy czym modułowi B odpowiada moduł sprężystości podłużnej, zaś pozostałe wielkości odpowiadają sobie nawzajem.



Rys.1. Schemat stojaka hydraulicznego

Fig.1. Diagram of hydraulic prop with designation of piston shift and height of liquid column

Rozpatrzmy zmianę ciśnienia w cieczy stojaka hydraulicznego, w którym tłok przemieścił się z małą prędkością o wielkość Δx (rys.1). Przy pominięciu masy cieczy, przyrost siły w ciekłym słupie będzie wynosił

$$\Delta P = k \cdot \Delta x \quad (2)$$

gdzie wielkość "k" określana jest wzorem (1). Podstawiając (1) do (2) otrzymujemy

$$\Delta p = \frac{\Delta P}{F} = \frac{B}{h} \Delta x \quad (3)$$

Z drugiej strony objętość pierwotna cieczy zmniejszy się o wartość:

$$\Delta V = -F \cdot \Delta x \quad (4)$$

Wzór (4) określa ujemny przyrost objętości, a to oznacza, że mamy do czynienia z obniżeniem jej wartości. Łącząc wzory (3) i (4) otrzymujemy

$$\Delta V = - \frac{V \cdot \Delta p}{B} \quad (5)$$

przy czym $V = F \cdot h$ oznacza pierwotną objętość słupa cieczy, zaś Δp oznacza przyrost ciśnienia.

Wzór (5) przedstawia często spotykany w literaturze [3], [4], sposób określania zmiany objętości pod wpływem zmian ciśnienia. Zgodnie ze wzorem (5), jedną z wielkości decydujących o wartości ΔV jest moduł sprężystości objętościowej B.

W ogólnym przypadku moduł ten jest różny dla różnych rodzajów cieczy roboczych. Jednakże nawet dla wybranego ośrodka ciekłego nie stanowi on dokładnie ustalonej wartości, zależąc m.in. od temperatury i ciśnienia. Na ogół maleje ze wzrostem temperatury i rośnie powoli ze wzrostem ciśnienia [1].

Przykładowo zmiany izentropowego modułu ściśliwości oleju Hydrol 40 od ciśnienia przedstawiono w literaturze [1].

Zmiany modułu ściśliwości przy małych zakresach zmian ciśnienia są niewielkie, jeżeli zaś proces przebiega w stałej temperaturze, można założyć, iż moduł ten (w zakresie małych zmian ciśnienia) ma wartość stałą [1].

Wynika stąd, że przy stosowaniu obliczeń przybliżonych wartość modułu sprężystości można przyjmować jako stałą [1], [2].

2. ANALIZA ZMIAN OBJĘTOŚCI CIECZY PRZY ZAŁOŻENIU STAŁEJ WARTOŚCI MODUŁU B

Przechodząc do nieskończone małych, lecz skończonych wartości, wzór (5) można zapisać w postaci

$$dV = - \frac{V \cdot dp}{B} \quad (6)$$

Z powyższej zależności moduł sprężystości B można wyrazić poprzez parametry ściskanego słupa cieczy

$$B = -V \cdot \frac{dp}{dV} \quad (7)$$

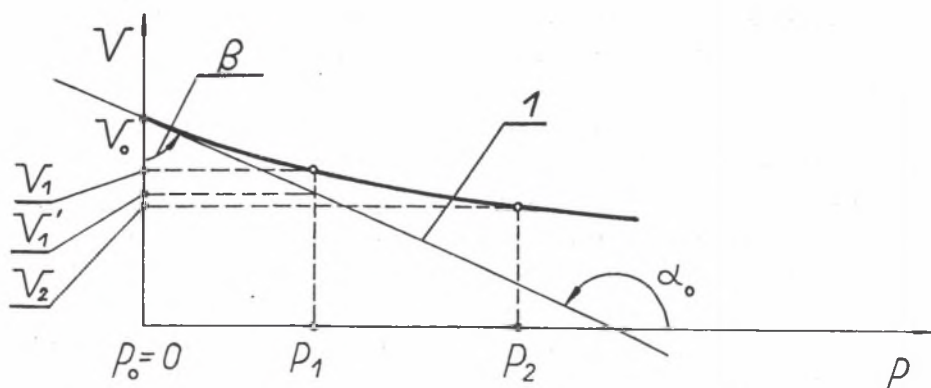
z którego wynika, że w przypadku gdy $B = \text{const}$

$$V \cdot \frac{dp}{dV} = \text{const} \quad (8)$$

Po scałkowaniu zależności (8) i przyjęciu założenia, że dla $p = 0$, pierwotna objętość cieczy w stojaku wynosi V_0 , otrzymujemy kształt zależności $V = V(p)$,

$$V = V_0 \cdot \exp [-p/B] \quad (9)$$

Przy założeniu, że $p \geq 0$, postać graficzna zależności (9) pokazana jest na rysunku 2.



Rys.2. Zależność zmian objętości cieczy przy różnych wartościach objętości początkowych

- 1 - zależność liniowa
- 2 - kształt rzeczywisty

Fig.2. Relationship of liquid volume change and pressure

- 1 - linear dependence
- 2 - real shape

Kąt nachylenia do osi "p" prostej 1 stycznej do krzywej w punkcie $p_0 = 0$ wynosi:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_{p_0=0} = -\frac{V_0}{B} ; \quad (10)$$

Określamy teraz zmianę objętości cieczy przy przejściu do ciśnienia $p = p_0 = 0$ do $p = p_1$ (rys.2), przy wykorzystaniu wzoru (5).

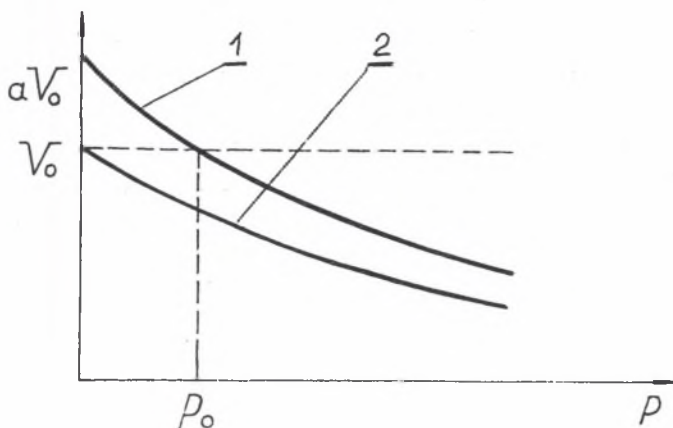
Otrzymujemy

$$V = -V_0 \cdot \frac{(P_1 - P_0)}{B} = -V_0 \cdot \frac{P_1}{B} \quad (11)$$

a po wykorzystaniu zależności pokazanych na rys.2, a wynikających z linearyzacji funkcji $V = V(p)$

$$V = V'_1 - V_0 = -V_0 \cdot \frac{P_1}{B} \quad (12)$$

Można udowodnić, że wzór (12) ważny jest również w przypadku, gdy początkowa objętość cieczy znajduje się pod ciśnieniem $p_0 \neq 0$.



Rys.3. Wpływ ciśnienia na zmianę objętości cieczy przy różnych wartościach objętości początkowych

1 - dla objętości większej

2 - dla objętości mniejszej

Fig.3. Influence of pressure on the change of liquid volume with different initial volumes

1 - for volume of bigger value

2 - for smaller volume

Rzeczpatrzmy krzywe sprężania dwóch różnych objętości cieczy pokazane na rys.3. Równania krzywych 1 i 2 można przedstawić w ogólnej postaci:

$$V = a \cdot V_0 \cdot \exp\left(-\frac{P}{B}\right) \quad (13)$$

gdzie: $a \geq 1$

Z równania (13) wynika, że ciecz o objętości początkowej $a \cdot V_0$ osiągnie objętość V_0 przy ciśnieniu

$$p_0 = B \cdot \ln a \quad (14)$$

stąd

$$\operatorname{tg} \alpha = \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_{p=p_0} = - \frac{a V_0}{B} \cdot e^{-\frac{p_0}{B}} = - \frac{V_0}{B} \quad (15)$$

Skoro kąt nachylenia stycznej do krzywej 1 nie zależy od parametru a , to wzór (12) można również stosować w przypadkach, gdy początkowa objętość cieczy V_0 znajduje się poza ciśnieniem $p_0 \neq 0$. Symbol "p" występujący we wzorze (12) oznacza wtedy przyrost ciśnienia, mierzony od ciśnienia p_0 , który spowodował zmniejszenie objętości początkowej V_0 o ΔV .

W praktyce posługujemy się wzorem (5), z którego wynika, że przy ustalonej pierwotnej objętości V jej zmiana jest wprost proporcjonalna do zmiany ciśnienia. Analogicznie, zgodnie z zależnością (12), na podstawie rysunku 2 widać, że przy wzroście ciśnienia do wartości " p_1 " zmiana objętości przebiegać będzie wzdłuż prostej 1. Natomiast zmniejszenie objętości przebiegające wzdłuż krzywej rzeczywistego sprężania określamy wykorzystując postać wzoru (9):

$$V_1 = V_0 \cdot \exp \left/ - \frac{p_1}{B} \right/$$

Stąd:

$$\Delta V = V_1 - V_0 = - V_0 \cdot \left[1 - \exp \left/ - \frac{p_1}{B} \right/ \right] \quad (16)$$

Zachodzi pytanie, na ile przyrost ΔV określony wg zależności (12) różni się od wartości wyznaczonej przez wzór (16). Ilościową miarę powyższej różnicy określa zależność:

$$z = \frac{V_1 - V_1'}{V_0 - V_1'} \quad (17)$$

Podstawiając zaś wyrażenie określone wzorami (16) i (12) uzyskujemy

$$z = \frac{p_1}{B} \cdot \frac{1}{\left[1 - \exp \left/ - \frac{p_1}{B} \right/ \right]} - 1 \quad (18)$$

Wyrażenie to można sprowadzić do postaci ułatwiającej graficzną jego interpretację:

$$y = \frac{u}{1 - e^{-u}} \leq A; \quad (19)$$

gdzie:

$$A = 1 + \frac{n}{100} \quad (20)$$

$$\frac{p_1}{B} = u \quad (21)$$

We wzorze (20) "n" jest liczbą dodatnią rzeczywistą określającą procentową wartość dopuszczalnego odchylenia (błędu, jaki popełniamy posługując się wzorem 12).

Zależność (19) pokazana jest na rysunku 4.

Z powyższego wynika że wielkość "Z" nie zależy ani od pierwotnej objętości cieczy V_0 , ani od wartości ciśnienia początkowego p_0 . Zależy jedynie od modułu sprężystości objętościowej B i przyrostu ciśnienia $\Delta p = p_1 - p_0$.

Należy zaznaczyć, że zależności wyprowadzone powyżej są ważne przy założeniu

$$B = \text{const} \quad (22)$$

co jest słuszne dla niewielkich wartości Δp [1], [2].

Określenie dopuszczalnego przedziału zmian ciśnienia, przy których warunek (22) jest spełniony, stanowi odrębne zagadnienie. Wyniki przykładowych obliczeń dopuszczalnych odchylen spowodowanych linearyzacją zależności (9) zestawiono w tabelcy 1. W obliczeniach przyjęto $B = 2000 \text{ MPa}$.

Tablica 1

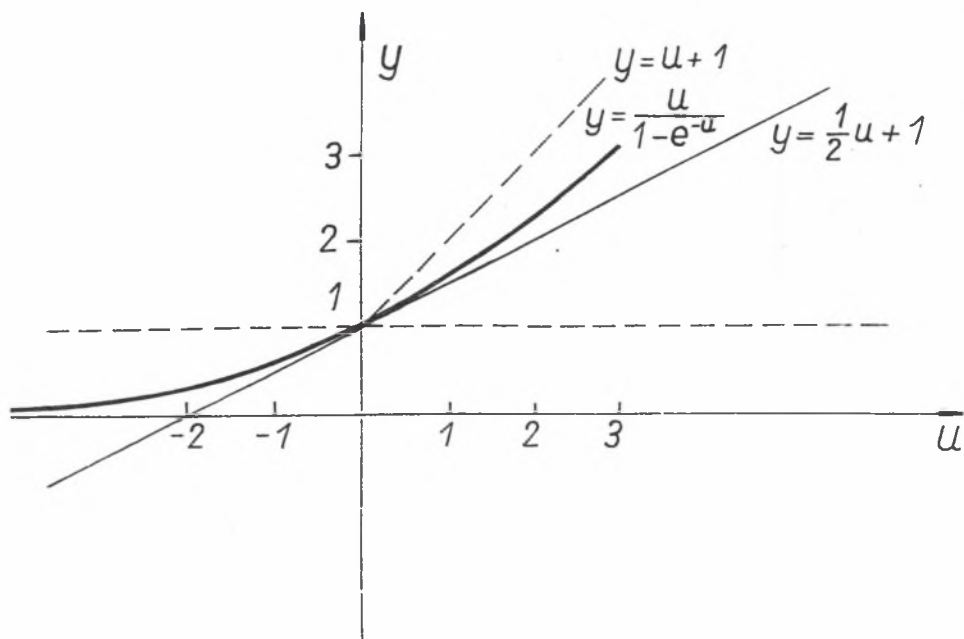
Δp [MPa]	y	$n_{\text{dop}}^* /$ [%]
2	1,0005003	0,05003
6	1,0015023	0,15023
10	1,0025063	0,25063
16	1,0040035	0,40035
20	1,0050049	0,50049

* / $n_{\text{dop}} = (y-1) 100\%$ (por (19) i (20)).

Ze względu na małe wartości parametru "u" zależność (19) można uprościć do postaci:

$$y = u + 1 \leq A \quad (22)$$

Zależność pomiędzy wzorami pokazano pomiędzy wzorami (19) i (22) na rys. 4.



Rys. 4. Wpływ względnej zmiany objętości na wielkość błędu przy zależności liniowej i nieliniowej

Fig. 4. Influence of relative volume change on error quantity with linear and nonlinear dependence

Korzystając z zależności (20), (21) i (22) można wyznaczyć wartość przedziału Δp , przy której błąd Z nie przekroczy $n\%$.

$$\Delta p \leq \frac{B \cdot n}{100} \quad (23)$$

Dotychczasowe rozważania dotyczące oceny wielkości błędu spowodowanego linearyzacją zależności $V = v(p)$ pozwalają na stwierdzenie, że błędy te są niewielkie i praktycznie nie mają istotnego znaczenia.

3. ANALIZA ZMIAN OBJĘTOŚCI CIECZY PRZY ZAŁOŻENIU ZMIENNEJ WARTOŚCI MODUŁU B

Moduł sprężystości objętościowej można wyrazić korzystając z wzoru (9), jako funkcję parametrów charakteryzujących ściskany słup cieczy. Związek otrzymany w ten sposób wykorzystuje się do wyznaczania wartości modułu na podstawie pomiarów. W zależności od metody ich wykonywania rozróżniamy [1]:

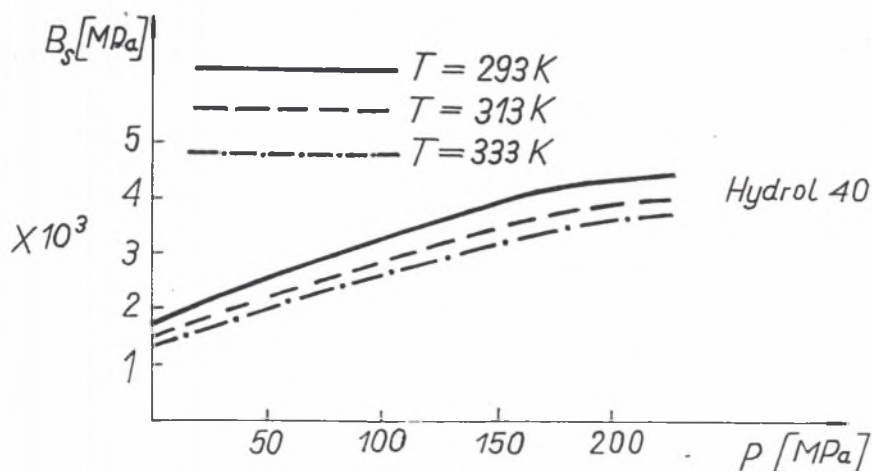
a) moduł izotermiczny

$$B_T = -V \left(\frac{dp}{dV} \right)_T$$

b) moduł izentropowy

$$B_S = -V \left(\frac{dp}{dV} \right)_S$$

Jednak w praktyce przeprowadzenie badań w stałej temperaturze jest nie zawsze możliwe, stąd też często ograniczamy się do wyznaczania modułów izentropowych. Jako przykład pokazano na rys.5 przebieg zmienności modułu izentropowego B_s w funkcji ciśnienia dla oleju Hydrol 40 [1].



Rys.5. Zależność zmiany modułu ściśliwości oleju Hydrol 40 od ciśnienia (wg [1])

Fig.5. Relationship of change of oil Hydrol 40 compressibility modulus and pressure [1]

Z wykresu wynika że w zakresie małych zmian ciśnienia, zmiany modułu są bardzo niewielkie. Jeżeli założymy [1], że zmiana modułu wynosi 0,6% na każde 10 MPa zmiany ciśnienia, to do celów praktycznych można wartość modułu przyj-

ować jako stałą, pod warunkiem że zmiany ciśnień w normalnych warunkach pracy stojaków są tego samego rzędu.

Jak wspomniano wyżej, zmiany ciśnienia w kierunku jego wzrostu mogą odbywać się od wartości początkowej zerowej lub różnej od zera. Jeżeli przyjąć, że objętość początkowa V_0 znajduje się pod ciśnieniem $p_0 \neq 0$, to analogicznie do wzoru (9) otrzymujemy:

$$V = V_0 \cdot e^{\frac{p_0 - p}{B}} \quad (24)$$

gdzie: $p \geq p_0$; $p_0 \geq 0$

Ponieważ w tym wypadku spełniony jest warunek

$$\left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_{p=p_0} = -V_0/B,$$

wynika z niego, że objętości cieczy przy wzroście ciśnienia o pewną wartość nie zależy od ciśnienia początkowego p_0 , lecz tylko od objętości " V_0 " i modułu " B ".

Na podstawie wykresu pokazanego na rysunku 5 widać, że jeżeli punkty leżące na osi odciętych będziemy traktować jako wartości ciśnień początkowych " p_0 ", to odpowiadać im będą różne wartości "stałych" modułów B . W ogólnym przypadku fakt ten powinien być uwzględniony przy posługiwaniu się odpowiednimi zależnościami podanymi wcześniej.

Z powyższego wynika, że dla ustalonej początkowej objętości V_0 znajomość tylko przyrostu ciśnienia Δp nie zawsze jest wystarczająca do rozwiązania zagadnienia, gdyż ciśnienie początkowe p_0 decyduje o wartości modułu B , przyjmowanego jako stały, pod warunkiem że Δp nie przekroczy ustalonych granic.

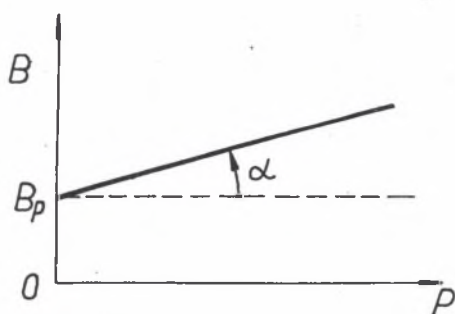
3.1. Analiza zmiany objętości przy założeniu liniowej zmienności modułu B

Posługując się wykresem wg rysunku 5, stwierdzamy, że jego kształt jest w przybliżeniu liniowy, który daje się aproksymować zależnością:

$$B = B_p + m \cdot p; \quad m = \tan \alpha \quad (25)$$

Na rysunku 6 przyjęto liniową zależność pomiędzy modułem a ciśnieniem. Jako uzasadnienie przyjęto fakt, że z zakresem najwyższych ciśnień (150–200 MPa) rzadko mamy do czynienia. Natomiast niższe wartości ciśnień stosunkowo dobrze odpowiadają liniowej ich aproksymacji. Stąd też uwzględniając zależność (25) w równaniu (7), otrzymujemy:

$$dV = -V \cdot \frac{dp}{B_p + m \cdot p} \quad (26)$$



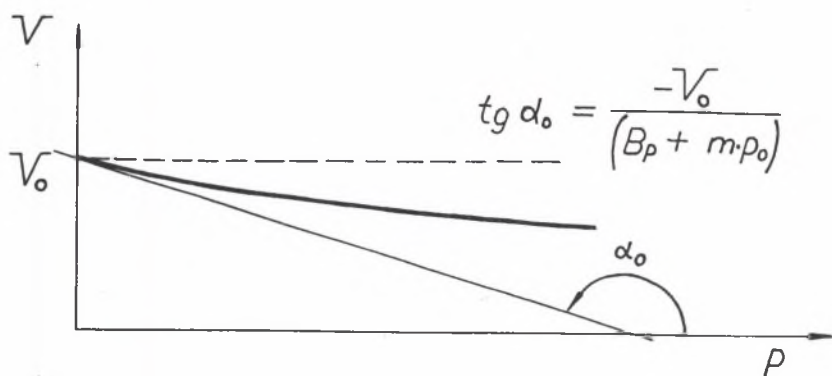
Rys.6. Liniowa zależność modułu ściśliwości cieczy od ciśnienia

Fig.6. Influence of pressure on value of compressibility modulus value in he-cased linear dependence '

Rozwiązując powyższe równanie przy założeniu, że objętość początkowa V_0 znajduje się pod ciśnieniem $p_0 \neq 0$, otrzymano

$$V = V_0 \cdot \sqrt{\frac{B_p + m \cdot p_0}{B_p + m \cdot p}} \quad (27)$$

przy czym: $p \geq p_0$; $p_0 \geq 0$; $m \neq 0$



Rys.7. Zależność zmian objętości cieczy od ciśnienia przy uwzględnieniu zależności modułu ściśliwości

Fig.7. Change of liquid volume in the dependence of pressure with variable compressibility modulus assumption

Postać zależności [27] pokazano na rys.7; kształtem nie różni się ona od poprzednich.

Jeżeli przyjąć wcześniej przytaczane założenia o zmienności modułu w wysokości 0,6% pierwotnej wartości na każde 10 MPa zmiany ciśnienia, to dla $B_p = 2000$ MPa otrzymamy $m = \operatorname{tg} \alpha = 1,2$. Przyjmując ponadto w celu uproszczenia rozważań $p_0 = 0$, jesteśmy w stanie wyznaczyć wartości względnych zmian objętości:

a) dla przypadku gdy moduł B traktowany był jako stały

$$V \cdot V_0^{-1} = e^{-\frac{p}{2000}} \quad (28)$$

b) w przypadku uwzględnienia zmiennej wartości modułu B

$$V \cdot V_0^{-1} = \sqrt[1,2]{\frac{2000}{2000 + 1,2 \cdot p}} \quad (29)$$

Wyniki przykładowych obliczeń zestawiono w tablicy 2.

Tablica 2

P [MPa]	$V \cdot V_0^{-1}$	
	wg (28)	wg (29)
5	0,9975031	0,9975068
10	0,995013	0,9950273
15	0,992528	0,9925613
20	0,990050	0,9901087

4. WNIOSKI

1. Krzywa sprężania cieczy w stojaku hydraulicznym ma nieliniowy kształt i przy założeniu, że $B = \text{const}$, różne wartości początkowych ciśnień odpowiadających tej samej objętości nie mają wpływu na jej zmianę, przy takim samym wzroście ciśnienia Δp .
2. Linearyzacja zależności określających zmianę objętości w funkcji ciśnienia powoduje niewielkie procentowe odchylenie w stosunku do wzorów ścisłych. Największe z nich nie przekracza 0,5% przy założeniu, że zmiana Δp jest rzędu 1% wartości modułu B.

3. Zwiększenie się modułu B ze wzrostem ciśnienia teoretycznie zmniejsza wartość ΔV w stosunku do otrzymanej przy założeniu, że $B = \text{const}$, z czego wynika, iż wartości stosunków (wzór (29)) powinny być nieco zwiększone w porównaniu z obliczonymi wg wzoru (28). Jednak w praktyce, z uwagi na spotykany zakres wartości współczynnika " m ", różnica ta nie ma znaczenia. Większe znaczenie ma możliwość dokładnego określenia wartości modułu B przy ustalonej wartości ciśnienia i temperatury, z uwzględnieniem wpływu niektórych czynników, np. powietrza.

LITERATURA

- [1] M.Flak, J.Potempa, J.Kosmol, J.Kwieciński, J.Jany: Metoda badania szczelności siłowników hydraulicznych. Materiały na Konferencję p.t. "Zmechanizowane obudowy ścianowe". FOZ "Fazos" Tarnowskie Góry 1986.
- [2] K.Stoiński: Metody wyznaczania obciążeń dynamicznych stojaków hydraulicznych oraz obudów ścianowych. GiG, Katowice 1985.
- [3] Z.Szydelski: Napęd i sterowanie hydrauliczne w pojazdach i samojezdnym maszynach roboczych. WNT, Warszawa 1980.
- [4] S.Stryczewski: Napęd hydrostatyczny. WNT, Warszawa 1984.

Recenzent: Adkt dr inż. Stanisław SZWEDA

Wpłynęło do redakcji w lutym 1991

INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF COMPRESSIBILITY MODULUS OF LIQUIDS ON COLLAPSIBILITY OF HYDRAULIC PROPS

A b s t r a c t

The influence of pressure on the change of liquid volume with an assumption of constant and variable value of bulk modulus has been analyzed.

It is a well known fact that this modulus is one of the basic quantities which determine the value of dilatational strain during the interaction of pressure on closed liquid volume. The bigger is its value, the smaller change of pressure. In computational practice in general, a constant value of the modulus is accepted.

On the other hand, physical investigations show a change of its value depending on some factors such as temperature or pressure.

Since in true operating conditions of props, variations of the above mentioned values (of pressure, for example) also occur, there is a question to what extent this case may affect the change of the bulk modulus.

Changes of a liquid volume have been analyzed by linearization of $V = V(p)$ dependence in the given pressure range (see fig 2) and by accepting assumptions concerning the value of bulk modulus.

The equation (12) was worked out assuming that the value of the bulk modulus is constant. Rightness of this equation, irrespectively of a pre-pressure p /sec fig.3/ was proved in the paper.

The linearity error n_{dep} (see equations /19/ and /20/) was determined. Results of calculations are presented in the table 1.

Changes of the liquid volume, assuming a linear dependence of the bulk modulus on pressure, were analysed in chapter 3.1.

The influence of the accepted assumptions on the value of relative changes of the liquid volume was analyzed in the paper. Results of calculations are presented in table 2.

It has been proved that within the pressure change ranges used, the modulus variations are negligible which allows, in practice, an assumption of its constant value.