ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: HUTNICTWO z. 19 Nr kol. 607

Marek DIETRICH

Instytut Techniki Lotniczej
i Mechaniki Stosowanej
Politechnika Warszawska

STOCHASTYCZNE ZAGADNIENIA W DYNAMICE MASZYN

Streszczenie. Tendencją stochastycznej mechaniki maszyn jest urealnianie założeń przyjmowanych przy badaniu ruchu maszyn. Uwzględnienie przy tworzeniu modelu mechanicznego maszyny takich zjawisk, jak struktura materiału, zużycie i zmęczenie elementów, tolerancja wykonania itp. prowadzi do stwierdzenia nieokreśloności modelu mechanicznego maszyny, a co za tym idzie do traktowania tego modelu jako wielkości losowej.

W pracy, w tym aspekcie formułuje się zagadnienie stworzenia stochastycznych modeli maszyn i podaje się stosowane metody analizy procesów losowych. Przedstawia się również problemy syntezy maszyn.

STOCHASTYCZNE ZAGADNIENIA W MECHANICE MASZYN

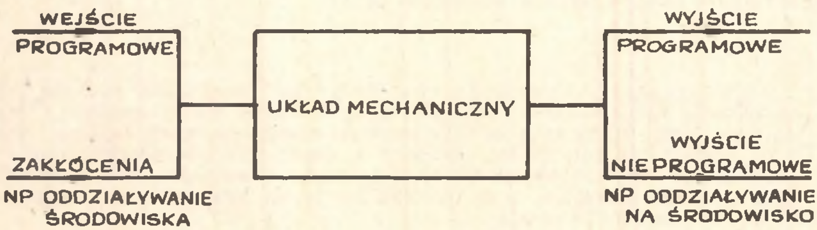
W środowisku człowieka do niedawna dominowała natura. W naturalny też sposób środowisko to oddziaływało na człowieka, stwarzając mu zarówno dogodne warunki egzystencji jak też różnorodne stany zagrożenia. Ostatnio proces wypierania natury przez wytwory techniki osiągnął taki etap, że wpływ techniki na warunki bytu człowieka, zarówno w sensie pozytywnym jak i negatywnym, stał się decydujący.

Wynikające stąd zagrożenie może i powinno być kontrolowane, a rozwijając dalej technikę powinno się stale porównywać przewidywane skutki pozytywne z możliwymi negatywnymi. Po to jednak, aby takie porównanie mogło być dokonywane, trzeba mieć możność racjonalnej oceny, z jednej strony realności przewidywanych korzyści, a z drugiej - stopnia zagrożenia, uwzględniając przy tym fakt nieuniknionej niepewności związanej z niepełną wiedzą o działaniu obiektów technicznych.

Wśród wielu urządzeń technicznych, z którym ma do czynienia współczesny człowiek, istotną rolę odgrywają maszyny. W tym artykule chciałbym więc krótko przedstawić ogólne modelowanie maszyn i procesów w nich zachodzących, prowadzone na gruncie stochastycznym.

Stochastyczne modelowanie jest jednym ze sposóbów modelowania, w którym można uwzględnić zarówno stan wiedzy jak i stan niewiedzy o rozpatrywanym obiekcie. Można więc wtedy uwzględnić pewien stan niepewności związany z działaniem obiektu. Nie jest to oczywiście sposób jedyny, ale modelowanie stochastyczne jest o tyle dobre, że można w nim wykorzystać cały bogaty aparat teorii prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Przedstawię więc pewne istotne zagadnienia spotykane w budowie maszyn, modelowane stochastycznie, z tym że ograniczę się tylko do problemów ogólnych i problemów związanych z mechaniką ciała stałego. Nie będę się więc zajmował problemami np. termodynamiki czy mechaniki płynów, oczywiście równie powszechnie występującymi w maszynach.

Przedstawmy schematycznie układ mechaniczny maszyny tak jak to pokazano na rys. 1.



Rys. 1

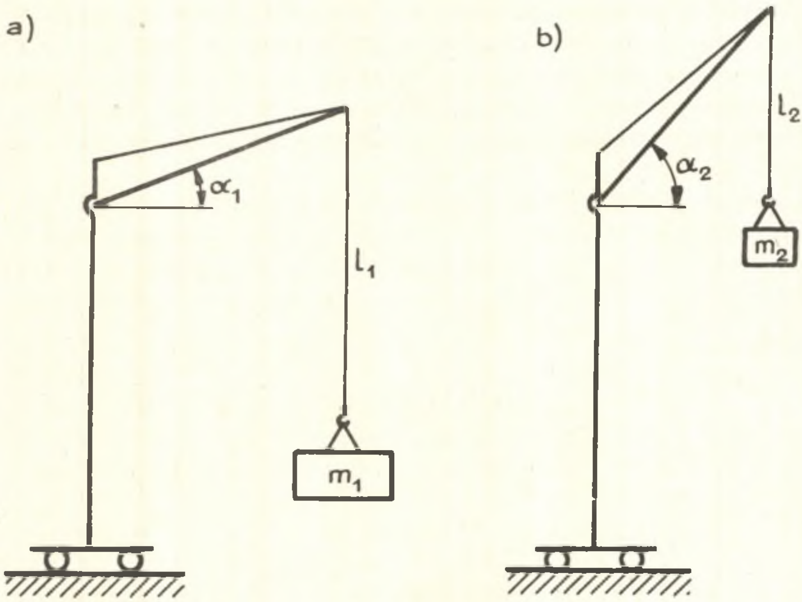
Jakie zjawiska spotykane są zwykle na wejściu do maszyny? Mogą to być:

- obciążenie zewnętrzne działające na maszynę, programowe, lub szkodliwe (np. wymuszenie siłowe w dynamice),
- ruch programowy lub szkodliwy (np. wymuszenie kinematyczne w dynamice).

Zwykle nie mamy pełnej informacji ani o obciążeniach ani o ruchu na wejściu. Na przykład nie znamy w pełni obciążenia obrabiarki, bo zależy ono od realizowanego procesu technologicznego, nie znamy w pełni sił działających na śmigłowce, bo zależą one od ładunku, który przenosi i od stanu atmosfery, nie znamy ani ruchu ani obciążenia samochodu, bo zależą one np. od stanu drogi, po której jedziemy itp.

Równie często nie znamy dostatecznie ściśle parametrów rozpatrywanego układu mechanicznego, takich jak wymiary, masy, sztywności, naprężenia niszczące. Zależą one od wykonania maszyny, jej stanu w procesie eksploatacji i od układu maszyny, zależnego od wykonywanego zadania. Przykładowo wpływ aktualnego zadania na parametry dynamiczne żurawia pokazany jest na rys. 2.

Proces eksploatacji wpływu na zużycie elementów maszyny, czyli zmienia jej stan trybologiczny, powoduje powiększanie się luzów w parach kinematycznych, wywołuje zmęczenie materiału itp. Wykonanie elementów maszyny w granicach przyjętych tolerancji nie daje pełnej informacji o konkretnej maszynie. Każdy egzemplarz maszyny jest inny, czasem występujące różnice są istotne, czasem nie. Pokażę to dalej na przykładzie sprzęgła zębatego.



Rys. 2

W związku z niepełną informacją o wejściu i parametrach maszyny nie mamy również pełnej informacji o wyjściu, czyli na przykład o:

- ruchu roboczym (programowym) maszyny,
- oddziaływaniu na środowisko (obciążenię, hałas),
- nośności maszyny,
- trwałości i niezawodności maszyny.

W efekcie nie mamy pełnej informacji nawet o tak podstawowym parametrze eksploatacyjnym jak wydajność maszyny. Jeśli więc potraktujemy wejście lub parametry maszyny za stochastyczne lub i jedno i drugie za stochastyczne, to otrzymujemy również wyjście stochastyczne.

Aktualnie trwałość i niezawodność maszyn bada się prawie wyłącznie na gruncie stochastycznym, a pozostałe parametry zwykle na gruncie deterministycznym.

Ujęcie zarówno wejścia jak i parametrów maszyny jako wielkości losowych prowadzi zwykle do trudnych problemów matematycznych i dlatego często przyjmuje się tylko wejście jako losowe a parametry za zdeterminowane, czasem zaś tylko niektóre parametry za losowe a inne czynniki za zdeterminowane.

Zwykle prowadzi się badania poszczególnych wybranych problemów lub procesów zachodzących w maszynach. Często badania te prowadzone są bez uwzględnienia pozostałych procesów i wiodą w związku z tym do praktycznie mało użytecznych wyników. Ma to miejsce np. przy badaniu dynamiki układów bez uwzględnienia wymogów stawianych przez badania wytrzymałości lub zmęczenia. Również, odwrotnie, badania zmęczeniowe prowadzi się zwykle w warunkach quasistatycznych, zaniedbując zjawiska dynamiczne. Ważne jest więc takie formułowanie modeli maszyn, aby ujmowały one wszystkie istotne zagadnienia.

Przedstawię krótko niektóre z nich. Najpierw chciałbym zająć się stochastycznym opisem dynamiki. Tutaj badania na gruncie stochastycznym są dość rozpowszechnione. W celu omówienia problematyki dynamiki rozpatrzmy model matematyczny układu dynamicznego w postaci układu równań różniczkowych:

$$\dot{x} = f_i(x,p,t) + g_i(t), \quad i=1,2...,2n,$$

przy warunkach początkowych:

$$x\Big|_{t=0} = x_0$$

Struktura układu dynamicznego, w tym również liczba stopni swobody n jest zwykle uważana za zdeterminowaną. Za człony stochastyczne w tym układzie również najczęściej przyjmuje się wymuszenia $\tilde{g}_i(t)$x), traktując parametry p i warunki początkowe x_0 za zdeterminowane.
Rozwiązując układ równań

$$\dot{\tilde{x}} = f_i(\tilde{x},p,t) + \tilde{g}_i(t), \quad i=1,2,...2n,$$

przy danej charakterystyce procesów stochastycznych $\tilde{g}_i(t)$, traktowanych zwykle jako biały szum, wyznacza się charakterystykę probabilistyczną 2n-wymiarowego procesu stochastycznego $\tilde{x}(t)$.

Zwykle badania przeprowadza się w zakresie analizy korelacyjnej, (lub widmowej), co bardzo ogranicza zastosowania uzyskiwanych wyników. Na przykład bez dodatkowych informacji jedynie na podstawie znanej funkcji korelacyjnej i wartości średniej nie można uzyskiwać informacji o rozkładzie wartości szczytowych i brak jest na przykład danych do analizy zmęczenia. Zwykle dodatkowo zakłada się, że proces jest normalny, ale trzeba pamiętać, że założenie to rzadko jest uzasadnione. Wydaje się więc, że trzeba bardziej rozwijać badania wykraczające poza teorię korelacyjną, uwzględniając w pełni potrzeby zastosowań.

x) Zmienne losowe lub funkcje losowe wyróżniono wężykiem nad odpowiednim symbolem.

Rzadziej spotyka się podejście, przy którym również parametry $\tilde{p}$ traktuje się jako procesy stochastyczne lub zmienne losowe, a również gdy warunki początkowe traktuje się jako losowe. Równania ruchu przyjmują wtedy postać:

$$\dot{\tilde{x}} = f_i(\tilde{x}, \tilde{p}, t) + \tilde{g}_i(t), \qquad i=1,2,\ldots 2n,$$

$$\tilde{x}\Big|_{t=0} = \tilde{x}_0.$$

Wiele maszyn pracuje w sposób cykliczny, przy czym poszczególne cykle mogą być identyczne (mówimy wtedy o ruchu okresowym) lub też mogą różnić się między sobą. Spowodowane to może być zmianami sił wymuszających ruch lub zmianami parametrów układu dynamicznego, warunków początkowych bądź też zmianami wszystkich tych czynników.

Zmienność warunków początkowych jest w budowie maszyn zjawiskiem powszechnym, szczególnie tam, gdzie wymuszenie ma charakter tak często powtarzających się impulsów lub przebiegów nieokresowych, że ruch wywołany jednym impulsem nie znika przed wystąpieniem kolejnego impulsu.

W takich przypadkach posiadane informacje o warunkach początkowych często sprowadzają się do znajomości ich charakterystyk probabilistycznych. Zjawiska takie występują w maszynach o ruchu przerywanym o dużej wydajności. W budowie maszyn powszechnie mamy do czynienia z układami dynamicznymi o losowych parametrach. Szczególnie często występuje zmiana masy układu z cyklu na cykl. Tak jest w przypadku pojazdów, których masa zależy od wielkości ładunku; podobnie jest w dźwignicach, gdzie masa przenoszonego ładunku zmienia się z cyklu na cykl. Zmienność masy układu w sensie masy zredukowanej może być wywołana zmianą wzajemnego położenia członów maszyny.

Często też spotyka się zmieniającą się losowo sztywność układu. Na przykład wspomniana już zmiana położenia wysięgnika żurawia powoduje zarówno zmianę jego momentu bezwładności względem osi obrotu jak i zmianę sztywności jego konstrukcji. Spotykane są również przypadki zmieniającego się losowo tłumienia.

O wszystkich wymienionych wyżej czynnikach najczęściej mamy jedynie informacje probabilistyczne; znamy odpowiednie rozkłady prawdopodobieństwa lub nawet tylko pewne charakterystyki tych rozkładów. Informacji takich dostarcza bowiem odpowiednia analiza statystyczna.

W omówionych wyżej przypadkach często ruch układu w danym konkretnym cyklu można uważać za zdeterminowany. Parametry układu w danym cyklu mogą przyjmować stałe wartości wynikłe z realizacji odpowiadających im zmiennych losowych. Podobnie może być z warunkami początkowymi. Gdyby przedmiotem zainteresowania był jakikolwiek konkretny cykl pracy, można by go z powodzeniem analizować na gruncie deterministycznym. Zwykle jednak staramy się uzyskać informacje o interesujących wielkościach dynamicznych we wszystkich cyklach występujących w trakcie eksploatacji maszyny.

Takie informacje są niezbędne do racjonalnego przeprowadzenia analizy wytrzymałości zmęczeniowej konstrukcji, analizy trwałości, niezawodności, sprawności itp. A zatem interesujące nas wielkości dynamiczne stanowią zmienne losowe, bądź też procesy stochastyczne i tak też powinno się je traktować przy analizie dynamicznej. Zagadnienia te zilustrowane są przykładem 1.

Omówiłem krótko ruch układu a więc i siły w nim występujące. Przejdźmy więc do przedstawienia problematyki niezawodności i bezpieczeństwa maszyn. Można ogólnie stwierdzić, że w zakresie niezawodności maszyn i urządzeń mechanicznych stosowane jest podejście stochastyczne. Procesy utraty zdolności do wykonywania przez maszynę zadania, procesy zużycia itp. traktowane są jako procesy stochastyczne. Przy budowie niezawodnościowym modeli złożonych maszyn i urządzeń mechanicznych duży wysiłek skupia się obecnie na poszukiwaniu metod znajdowania i uwzględniania stochastycznych zależności między elementami układu. Zwykle bowiem zmienne losowe opisujące niezawodność układu mechanicznego są zmiennymi zależnymi.

Poważnym utrudnieniem w rozwinięciu zastosowań teorii niezawodności do układów mechanicznych jest mała ilość informacji w sensie probabilistycznym o procesach zachodzących w maszynach, o mechanice uszkodzeń, zjawiskach tribologicznych itp. O niektórych z tych zagadnień będę mówił dalej, obecnie jednak można stwierdzić, że bez rozwoju probabilistycznego podejścia do tych procesów ocena racjonalnej niezawodności układów mechanicznych będzie dalej bardzo ograniczona.

Innym ważnym problemem rozwijanym obecnie przy stochastycznym podejściu do zagadnienia jest określenie metod racjonalnego wyboru poziomu niezawodności obiektu mechanicznego w realnych warunkach technicznych, ekonomicznych i społecznych. Wiąże się to z poważnym rozwojem badań eksploatacyjnych, jako że właśnie eksploatacja jest celem konstruowania i wytwarzania maszyn.

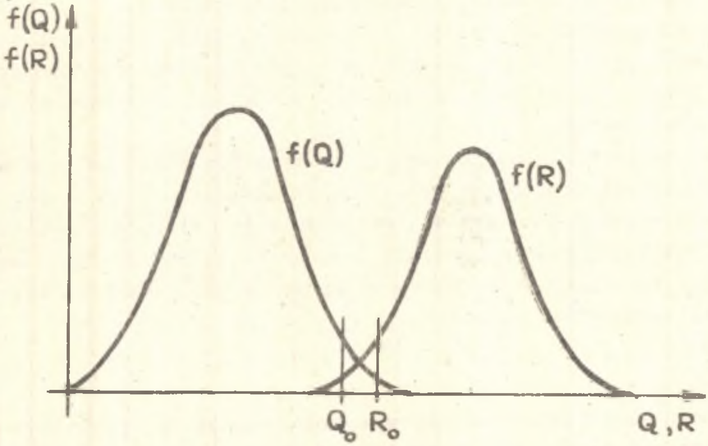
Pojęciem blisko związanym z niezawodnością jest bezpieczeństwo konstrukcji - pojęcie niezwykle ważne w budowie maszyn. Tradycyjnie do zagadnienia tego podchodzi się w sposób deterministyczny, stosując metody naprężeń dopuszczalnych lub nośności granicznej. Są to jednak bardzo niedoskonałe kryteria bezpieczeństwa, uzasadnione jedynie doświadczeniem wynikłym z wieloletniej historii techniki.

Pośrednio więc, poprzez tradycję i doświadczenie, wprowadza się do tych metod element niepewności, całkowicie sobie tego nie uświadamiając i nie oceniając stopnia tej niepewności. Dopiero ujęcie probabilistyczne pozwala na łączną ocenę tego, co się wie o maszynie i tego, czego się o niej nie wie oraz na racjonalną ocenę bezpieczeństwa.

Probabilistyczne podejście do oceny bezpieczeństwa konstrukcji maszyn rozwinięte zostało głównie dla statycznego lub quasistatycznego działania obciążeń. Rozwijane są dwie metody - tzw. półprobabilistyczna i probabilistyczna.

Metoda półprobabilistyczna w największym skrócie polega na tym, że wyznacza się oddzielne rozkłady obciążenia $\tilde{Q}$ i wytrzymałości konstrukcji $\tilde{R}$, a następnie wybiera odpowiednio małe kwantyle tych rozkładów Q_0, R_0; $P\{\tilde{Q} > Q_0\} = \varepsilon_q$ i $P\{\tilde{R} < R\} = \varepsilon_r$, gdzie ε_q i ε_r są odpowiednio małe.

Warunek wytrzymałościowy pisze się wtedy następująco $Q_0 \leq R_0$ (rys. 3).



Rys. 3

Oczywiste jest, że taka metoda nie daje pełnej oceny prawdopodobieństwa zniszczenia konstrukcji. Jest ona jednak stosunkowo prosta, bo traktuje się obie zmienne losowe $\tilde{Q}$ i $\tilde{R}$ jako niezależne oraz dlatego, że nie trzeba przy jej stosowaniu znać pełnych rozkładów obciążenia i nośności a tylko pewne ich kwantyle.

Pełniejszą ocenę bezpieczeństwa konstrukcji daje metoda probabilistyczna, przy której buduje się rozkład zmiennej losowej $(\tilde{R}-\tilde{Q})$ i określa prawdopodobieństwo $P\{(\tilde{R}-\tilde{Q}) \leq 0\} < \varepsilon$; ε stanowi tutaj miarę bezpieczeństwa konstrukcji. Metoda ta jest aktualnie najlepsza, ale wymaga największej ilości informacji o maszynie. Zwykle w dalszym ciągu zakłada się niezależność $\tilde{Q}$ i $\tilde{R}$.

Znacznie mniej zaawansowane są badania nad bezpieczeństwem konstrukcji poddanych obciążeniom zmiennym i przy traktowaniu nośności elementu również jako zmiennej w czasie, czyli traktowaniu ich jako procesy stochastyczne. Mam tu na myśli przede wszystkim, choć nie jedynie, problematykę zmęczenia konstrukcji. W tym przypadku procesy stochastyczne $\tilde{Q}(t)$ i $\tilde{R}(t)$ mogą być procesami zależnymi. Zagadnienia te zilustrowano przykładem 2.

Wreszcie bardzo istotnym problemem jest racjonalne podejście do tolerancji wykonania, w tym również do tolerancji wymiarów geometrycznych elementów i zespołów maszyn.

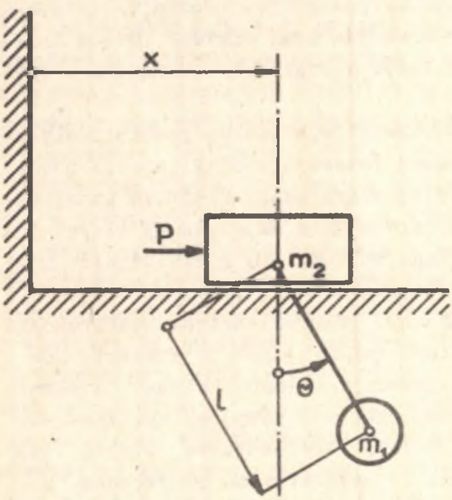
W wielu przypadkach tolerancje wykonania wpływają w sposób istotny na inne parametry maszyny, na jej własności dynamiczne, wytrzymałościowe, trybologiczne. Podejście stochastyczne do analizy tolerancji oraz ich wpływu na pracę maszyn pozwala na przykład na wybór tych tolerancji w oparciu o przesłanki racjonalne a nie tylko o doświadczenie (w szybko zmieniającym się obecnie świecie techniki doświadczenie często staje się niewystarczające). Zagadnienie to zostanie zilustrowane przykładem 3.

Na zakończenie chciałbym zwrócić uwagę na relatywne znaczenie większego rozwoju badań prowadzonych na gruncie stochastycznym odnośnie do analizy maszyn i procesów w nich zachodzących w porównaniu z badaniami w zakresie syntezy tych maszyn.

A przecież dopiero racjonalne metody syntezy pozwalają na podejmowanie odpowiednich decyzji konstrukcyjnych. Metody racjonalne, to znaczy oparte o aktualny stan wiedzy o maszynie i uwzględniające stopień niewiedzy, zawierające w sobie informacje odnośnie do wszystkich etapów życia maszyny, jej produkcji, technologii i eksploatacji, uwzględniających stronę ekonomiczną i społeczną budowy maszyn.

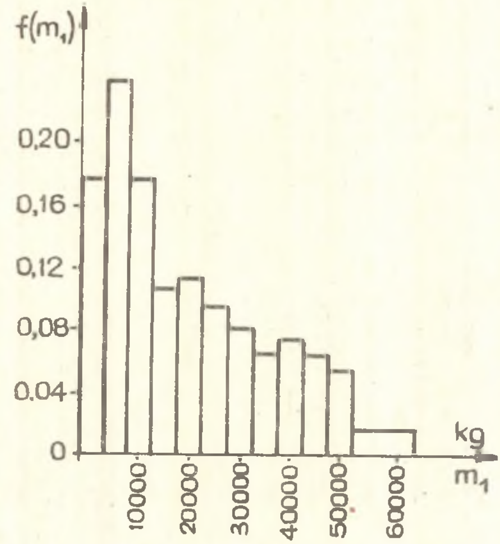
Przykład 1

Zajmiemy się obciążeniem suwnicy wywołanym ruchem jej mostu lub wózka. Bardzo uproszczony model dynamiczny układu wózka (mostu) z podwieszonym ładunkiem pokazano na rysunku 4.

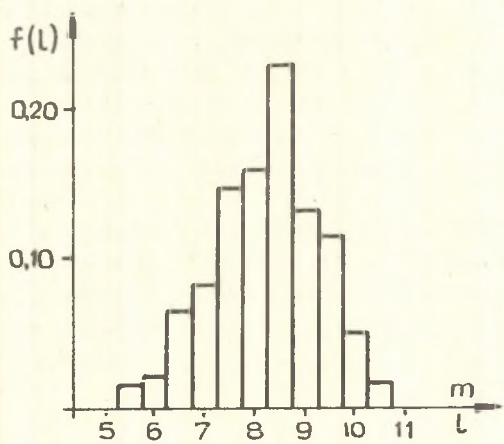


Rys. 4

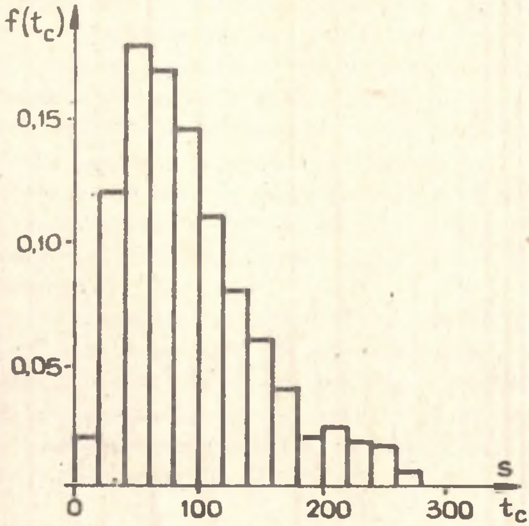
W układzie tym oznaczono: m_1 - zredukowana masa ładunku, m_2 - zredukowana masa wózka (mostu) suwnicy, l - długość liny, na którym wisi ładunek, P - siła zewnętrzna działająca na wózek lub most, będąca różnicą siły oddziaływania silnika i oporu ruchu lub będąca sumą sił oddziaływania hamulca i oporu ruchu. Przebieg siły P zależy od procesu technologicznego obsługiwanego przez suwnicę, od kwalifikacji dźwigowego i jego osobowości. Również długość liny, na której wisi ładunek, jest zmienna w czasie i zależy od tych samych czynników. Wreszcie masa ładunku zależy również od procesu technologicznego obsługiwanego przez suwnicę. Wielkości $\tilde{m}$, $\tilde{l}$, $\tilde{p}$ stanowią więc procesy stochastyczne.


f(m1)
0,20
0,16
0,12
0,08
0,04
0
10000
20000
30000
40000
50000
60000
kg
m1

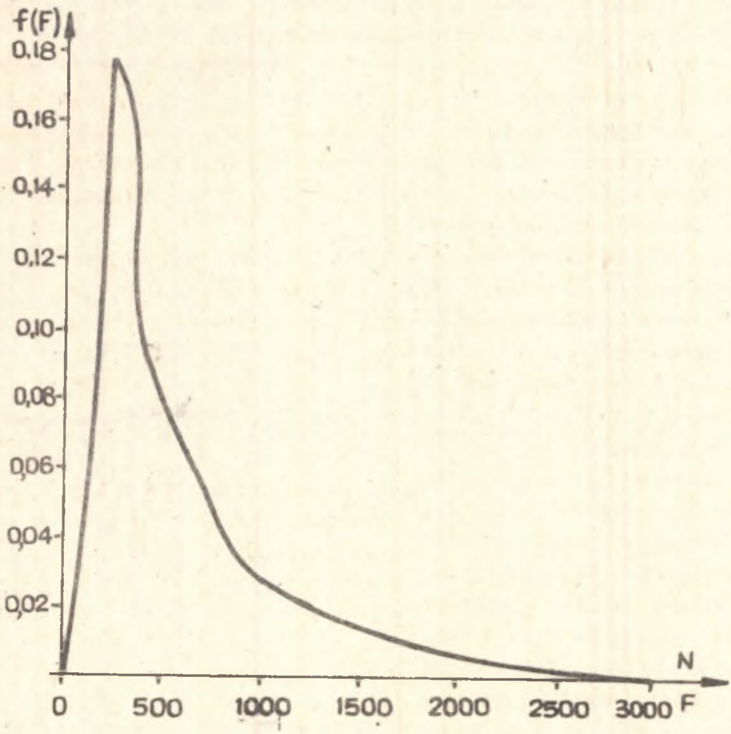
Rys. 5


f(l)
0,20
0,10
5
6
7
8
9
10
11
m
l

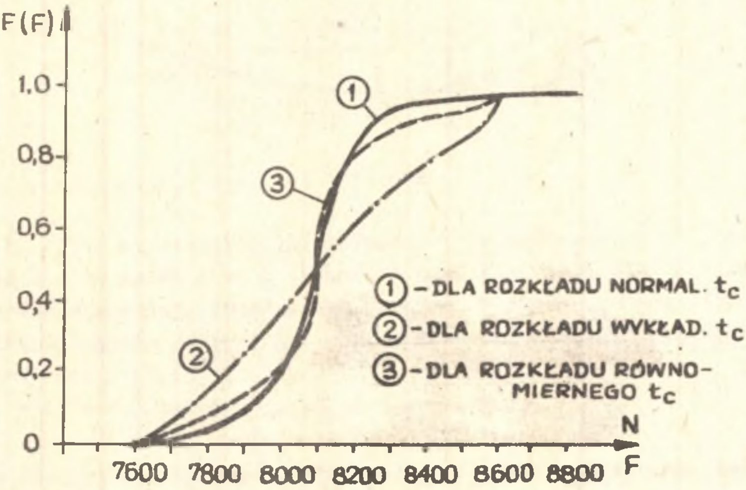
Rys. 6


f(t_c)
0,15
0,10
0,05
0
100
200
300
s
t_c

Rys. 7


f(F)
0,18
0,16
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
N
F

Rys. 8



Rys. 9

W wyniku tego ruch układu, występujące siły, zużycie jego elementów i inne parametry stanowią też wielkości losowe.

Zadanie to zostało zbadane w pracach [1, 2, 3], w których wyznaczono rozkłady prawdopodobieństwa masy ładunku (rys. 5), długości liny (rys. 6) i czasu trwania cyklu pracy (rys. 7) suwnicy hutniczej o udźwigu 5t. Na ich podstawie wyznaczono teoretycznie rozkład prawdopodobieństwa maksymalnych sił bezwładności ładunku (rys. 8). Rozkład ten potwierdzono doświadczalnie.

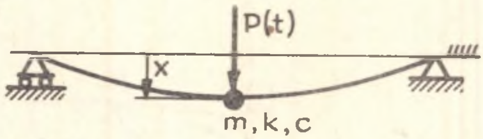
Na rys. 9 pokazano rozkłady prawdopodobieństwa maksymalnej poziomej siły bezwładności ładunku dziesięciotonowej suwnicy warsztatowej, wyznaczone teoretycznie dla różnych rozkładów prawdopodobieństwa czasu trwania cyklu pracy suwnicy. Parametry dynamiczne układu przyjęto w tym przypadku za zdeterminowane i stałe.

Przykład 2

Zajmujemy się doborem wytrzymałości materiału R, np. granicy plastyczności R_e, traktowanej jako wielkość zdeterminowana. Niech element maszyny, np. belka pokazana na rysunku 10, obciążona siłą P, daje się opisać modelem dynamicznym o jednym stopniu swobody:

Równanie ruchu tego układu ma postać:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t). \tag{a}$$



Rys. 10

Załóżmy, że naprężenie s w przekroju niebezpiecznym belki jest proporcjonalne do odkształcenia tego elementu, a to z kolei do przemieszczenia x, czyli $s = \Psi_x$, gdzie Ψ oznacza współczynnik proporcjonalności.

Wprowadzając typowe oznaczenia $\omega \sqrt{k/m}$ i $\gamma = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ otrzymujemy równanie:

$$\ddot{s} + 2\gamma\omega\dot{s} + \omega^2 s = \frac{\Psi}{m} \cdot P(t).$$

Załóżmy, że obciążenie $\tilde{P}(t)$ jest znanym procesem stochastycznym. Niech to będzie proces stacjonarny normalny. W konsekwencji naprężenie (t) jest też procesem stochastycznym stacjonarnym normalnym. Załóżmy dalej, że belka będzie obciążona przez znany czas t_c i postarajmy się tak dobrać materiał belki, czyli tak dobrać granicę plastyczności R_e, żeby prawdopodobieństwo zniszczenia polegającego na plastycznym odkształceniu belki było mniejsze od α, gdzie α jest odpowiednio małą liczbą. Mamy więc:

$$P\left\{\tilde{s} \leqslant R_e; \ t_c\right\} \geqslant 1-\alpha. \qquad \text{(b)}$$

Z teorii przewyższeń wiadomo, że dla procesów wąskopasmowych (dla małego tłumienia) prawdopodobieństwo przekroczenia odpowiedniego poziomu, w naszym przypadku R_e, w czasie t_c można z dostateczną dokładnością wyrazić następująco:

$$P\left\{\tilde{s} \leqslant R_e; \ t_c\right\} \exp\left[-\frac{t_c}{2\pi} \cdot \frac{\sigma_{\dot{s}}}{\sigma_s} \exp\left(-\frac{R_e^2}{2\sigma_s^2}\right)\right] \qquad \text{(c)}$$

Rozkład prawdopodobieństwa liczby przekroczeń dowolnego poziomu jest bowiem procesem Poissona i stąd powyższy związek określający prawdopodobieństwo co najmniej jednego przekroczenia.

W związku (c) σ_s i $\sigma_{\dot{s}}$ oznaczają odpowiednio odchylenia standardowe procesu $\tilde{s}(t)$ i jego pochodnej. Jeżeli założymy dodatkowo, że proces $\tilde{P}(t)$ jest białym szumem o gęstości widmowej S_p, to powyższe odchylenia standardowe wyrażają się następująco:

$$\sigma_s^2 = \frac{\pi S_p \Psi^2}{2\gamma\omega^3 m^2}; \quad \sigma_{\dot{s}}^2 = \frac{\pi S_p \Psi^2}{2\gamma \omega m^2} \tag{d}$$

Uwzględniając (d), warunek (b) można napisać w postaci:

$$\exp\left[\frac{-t_c \omega}{2\pi}^2 \exp\left(-\frac{R_e^2 \gamma \omega^3 m^2}{\pi S_p \Psi^2}\right)\right] \geqslant 1-\alpha, \tag{e}$$

skąd po przekształceniach:

$$R_e \geqslant \frac{\Psi}{m}\sqrt{\frac{\pi S_p}{\gamma\omega^3} \ln\left[\frac{t_c \omega}{2\pi \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)}\right]} \tag{f}$$

Jest to odpowiedź na postawione pytanie.

Co jednak będzie, jeżeli potraktujemy R_e również jako zmienną losową? Wtedy mamy dwa rozkłady $\tilde{R}_e$ i $\tilde{s}$.

Warunek bezpieczeństwa przyjmuje postać:

$$P\left\{\tilde{s} < R_e\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\left\{\tilde{s} < R_e \middle| R_e < \tilde{R}_e \leq R_e + d R_e\right\} \cdot P\left\{R_e < \tilde{R}_e \leq R_e + dR_e\right\} \geqslant 1-\alpha \tag{g}$$

Jeżeli można przyjąć, że zmienne $\tilde{s}$ i R_e są niezależne, to:

$$P\left\{\tilde{s} < \tilde{R}_e\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\left\{\tilde{s} < R_e\right\} \cdot P\left\{R_e < \tilde{R}_e < \tilde{R}_e + d\tilde{R}_e\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} F_s(s=R_e;\ t_c) \cdot$$

$$\cdot\, f_R(R_e)\, d R_e = 1-\alpha \tag{h}$$

Dopiero przy założeniu niezależności udało się warunek bezpieczeństwa przedstawić w postaci całkowej (h).

Żeby jednak efektywnie wyliczyć wymaganą wartość R_e, trzeba jeszcze określić rozkłady $\tilde{s}$ i $\tilde{R}_e$.

Rozkład $\tilde{s}$ został już wyznaczony:

$$F_s(s;\ t_c) = \exp\left[-\frac{t_c}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{s}}}{\sigma_s} \exp\left(\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right)\right] \tag{i}$$

Rozkład $\tilde{R}_o$ można założyć jako normalny $(\bar{R}, \sigma_R)$, czyli

$$f_R(R_e) = \frac{1}{2\pi\sigma_R} \cdot \exp -\left[\frac{(R_e\ \bar{R})^2}{2\sigma_r^2}\right] \tag{j}$$

Podstawiając (i) i (j) do (h), wykonując całkowanie oraz rozwiązując otrzymaną nierówność algebraiczną wyznacza się wymaganą wartość R_e.

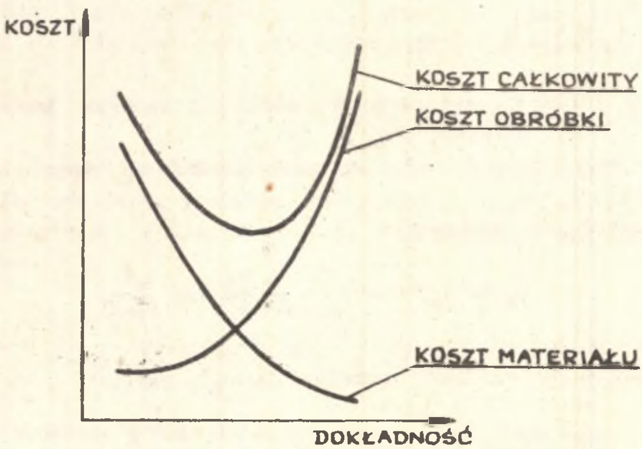
Przykład 3

Zajmiemy się takim doborem tolerancji wykonania sprzęgła zębatego, żeby jego koszt był najmniejszy. Wiadomo, że koszt produkcji zależy przede wszystkim od kosztu materiału i kosztu obróbki (inne koszty można uzależnić od tych dwóch).

Przyjmijmy w przybliżeniu, że koszt materiału stanowi iloczyn kosztu jednostki objętości materiału w_m i objętości elementu V, natomiast koszt obróbki W_o zależy tylko od dokładności obróbki. Ogólny koszt produkcji W można więc wyrazić następująco:

$$W = w_m V + W_o. \quad \text{(a)}$$

Ponieważ zarówno obciążenie jak i wytrzymałość elementu zależą zwykle od dokładności jego wykonania, to przy założeniu stałych innych parametrów, np. współczynnika bezpieczeństwa, objętość elementu zwykle maleje wraz ze wzrostem dokładności obróbki. Zakładając przy tym w_m = const, pierwszy składnik sumy a maleje ze wzrostem dokładności obróbki, zaś drugi rośnie, co ilustruje rys. 11. W takiej sytuacji występuje minimum kosztu i optymalna dokładność obróbki powinna odpowiadać temu minimum.



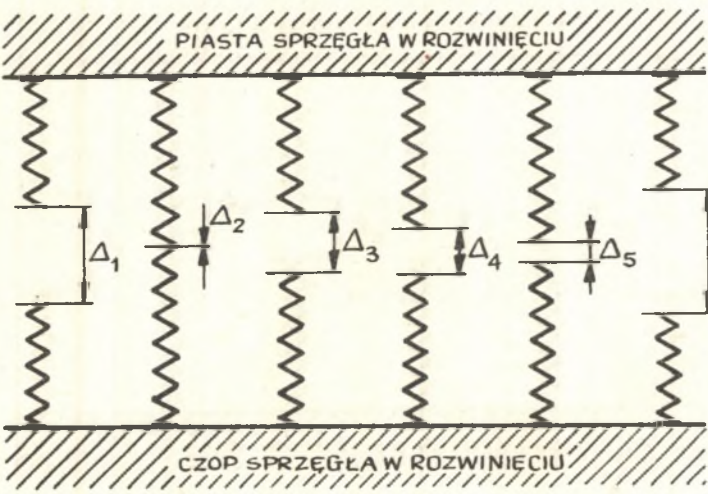
Rys. 11

Ustalenie parametrów w_m i W_o stanowi ekonomiczną stronę zagadnienia, ustalenie zależności objętość - dokładność obróbki stanowi techniczną stronę zagadnienia i nią się dalej zajmiemy, jak już wspomniano na przykładzie sprzęgła zębatego. Zależność ta zostanie wyznaczona wychodząc z kryteriów wytrzymałościowych, rozpatrując statyczny model sprzęgła, przy założeniu, że dany jest materiał sprzęgła i obciążenie zewnętrzne.

W każdym modelu wytrzymałościowym trzeba uwzględnić nierównomierność obciążenia poszczególnych par zębów, wywołaną niedokładnością geometrii elementów sprzęgła. Zwykle wprowadza się w tym celu deterministyczny empiryczny współczynnik przeciążenia k. Jeżeli jednak przyjąć model probabilistyczny i potraktować podstawowy błąd zazębienia, czyli błąd podziałki (rys. 12) jako zmienną losową $\tilde{\Delta}$ o przynajmniej częściowo znanym rozkładzie, to można przy pewnych założeniach [4] wyznaczyć teoretycznie parametry rozkładu prawdopodobieństwa współczynnika $\tilde{k}$, a następnie, w zależności od wybranej klasy dokładności wykonania, wyznaczyć wartość oczekiwaną μ_k i odchylenie standardowe σ_k tego współczynnika. Jako miarę tego współczynnika można przyjąć sumę:

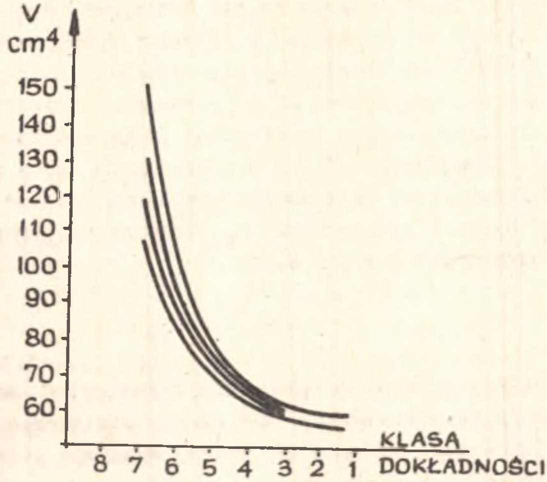
$$k = \mu_k + s\sigma_k; \tag{b}$$

w której arbitralnie wybraną wartość współczynnika s można traktować jako pewien wskaźnik bezpieczeństwa. Dla danego obciążenia sprzędła, w zależności od wielkości k, otrzyma się różne, wymagane ze względów wytrzymałościowych, wymiary sprzęgła.



Rys. 12

Jak się okazuje, wpływ założonej tolerancji wykonania na wymaganą objętość sprzęgła jest duży. Ilustruje to rysunek 13, na którym pokazano zależność objętości pewnego przykładowego sprzęgła w zależności od klasy dokładności wykonania dla różnych wartości parametru s. Szczegółowe obliczenia można znaleźć w pracy [4].



Rys. 13

LITERATURA

[1] Dietrich M.: O dynamice hamowania dźwignic, Archiwum Budowy Maszyn, rok 1965, tom XII, z. 2, ss. 261-281.

[2] Dietrich M.: Próba probabilistycznego ujęcia niektórych zagadnień dynamiki dźwignic. Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, rok 1967, nr 20.

[3] Dietrich M.: Dynamika mechanizmu jazdy dźwignicy przy jednoczesnym ruchu podnoszenia. Archiwum Budowy Maszyn, rok 1970, tom XVII, z.4, ss. 587-690.

[4] Dietrich M., Krasnowski B.: Pewien model sprzęgła zębatego. Materiały Sympozjonu "Modelowanie w Mechanice", rok 1977, PTMTS, ss. 103-121.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ В ДИНАМИКЕ МАШИН

Р е з ю м е

Тенденцией стохастической механики машин является создание реальных исходных данных при исследовании движения машин. Учёт при создании механической модели машины таких факторов как структура материала, износ и усталость элементов, неточность выполнения и т.п. ведёт к утверждению неопределенности механической модели машины и, следовательно, к рассматриванию этой модели как случайной величины.

В работе в этом аспекте формулируется проблема создания стохастической модели машин и даются методы анализа случайных процессов. Представлены также проблемы синтеза машин.

THE STOCHASTIC PROBLEMS IN MACHINES DYNAMICS

S u m m a r y

The tendency in stochastic machines mechanics is to bring to bring to life the assumptions adopted in machines motion examinations. Taking into account such phenomena as the structure of material, wear and fatigue of elements, manufacturing tolerances while designing a mechanical model of a machine leads to stating the indeterminacy of the machine mechanical model, and what follows is approaching this model as a random quantity.

In this aspect, the paper formulates the problem of creating the stochastic machines models, and presents the actually applied methods of random analyses. The problems of machines synthesis are also introduces.