

Czesław SAJDAK

Institut Inżynierii Materiałowej  
Politechnika Śląska

PRZYCZYNEK DO OBLICZANIA PŁASKICH INDUKCYJNYCH  
UKŁADÓW GRZEJNYCH WSAD-WZBUDNIK

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono sposób przybliżonego obliczania indukcji magnetycznej, gęstości prądów indukowanych oraz mocy czynnej i biernej w indukcyjnym układzie grzejnym, zawierającym niemagnetyczny wsad w postaci rozległej płyty oraz wzbudnik pętlowy bez rdzenia magnetycznego. Wzory pozwalające na wyznaczenie ww. wielkości uzyskano poprzez uproszczenie związków z pracy [9].

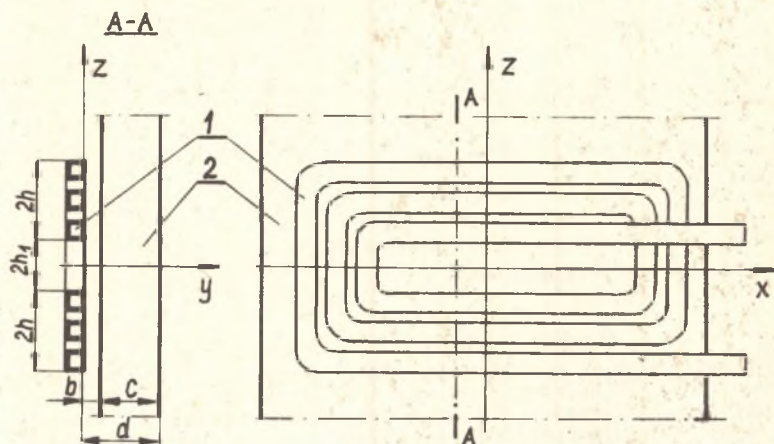
Przeprowadzono ocenę dokładności metody. Wykazano, że jest ona tym większa, im większa jest pulsacja względna  $\bar{\omega}$ , czyli dla dużych wartości stosunku grubości płyty  $c$  do głębokości wnikała pola elektromagnetycznego  $\delta$ .

### 1. Wstęp

Podstawowym problemem przy obliczaniu termindukcyjnych układów wsad-wzbudnik, stosowanych w procesach obróbki cieplnej i plastycznej metali, jest rozwiązanie zagadnienia elektromagnetycznego, czyli określenie szczególnego rozwiązania równań Maxwella przy zadanym rozkładzie prądu wzbudnika. Dla wyznaczenia wartości indukcji magnetycznej, natężenia pola magnetycznego, gęstości prądów indukowanych i mocy wydzielonej we wsadzie korzysta się najczęściej ze wzorów dla układów nieskończenie rozległych [1], [2], a skończone wymiary wzbudnika i wsadu uwzględnia się poprzez wprowadzenie odpowiednich współczynników korekcyjnych [3].

Wyniki obliczeń obarczone są zwykle dużym błędem, co utrudnia optymalizację parametrów urządzenia grzejnego. Znane są dokładne metody obliczeniowe: analityczne, np. szeregu [4], [5] i całki [6], [7] Fouriera oraz numeryczne [8]. Stosowanie ich przy projektowaniu jest jednak ograniczone ze względu na skomplikowaną postać wzorów oraz konieczność korzystania z maszyn cyfrowych.

W pracy [9] przedstawiono między innymi rozwiązanie równań Maxwella w indukcyjnym układzie grzejnym płyta - wzbudnik bez rdzenia magnetycznego i z uzwojeniem pętlowym (rys. 1). Otrzymane tam związki, określające rozkład wielkości pola elektromagnetycznego, mają postać całek niewłaściwych i rozwiązanie ich jest możliwe jedynie za pomocą maszyny cyfrowej.



Rys. 1. Indukcyjny układ grzewczy wsad-wzbudnik  
1 - uzwojenie pętlowe, 2 - płyta metalowa (wsad)

W artykule przeanalizowano możliwość uproszczenia wzorów z pracy [9] dla przypadku szczególnego nagrzewania niemagnetycznych wsadów płaskich wzbudnikiem bez rdzenia magnetycznego, zasilanym prądem o podwyższonej częstotliwości.

## 2. Potencjał wektorowy

Zgodnie z [9] potencjał wektorowy we wsadzie niemagnetycznym ( $\mu = \mu_0$ ) dla modelu obliczeniowego jak na rys. 2, odpowiadającego układowi grzewczemu z rys. 1, ma postać:

$$A_w = \frac{2NI\mu_0}{3h} \int_0^{\infty} \frac{\sinh k \cdot \sinh k(h+h_1)}{k} \frac{p \cdot \cosh p(y-d) - k \cdot \sinh p(y-d)}{(p^2+k^2) \cdot \sinh pc + 2pk \cdot \cosh pc} \cdot e^{-kb} \sin kz \, dk, \quad (1)$$

gdzie:

$$p = \sqrt{k^2 + j\omega\mu_0\sigma} = \sqrt{k^2 + j\beta^2}, \quad (2)$$

$N$  - liczba zwojów uzwojenia wzbudnika,

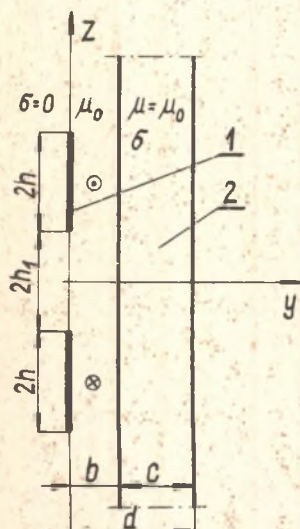
$I$  - natężenie prądu,

$k$  - zmienna całkowania,

$\omega$  - pulsacja,

$\sigma$  - konduktywność,

$j$  - jednostka urojona.



Rys. 2. Model obliczeniowy układu z rys. 1, zastosowany w pracy [9] do rozwiązania zagadnienia elektromagnetycznego

1 - nieskończenie cienkie uzwojenie wzbudnika, nieskończenie rozległe wzdłuż osi x, 2 - wsad, nieskończenie rozległy wzdłuż osi x i z o stałych parametrach  $\mu = \mu_0$  i  $G$

W dalszym ciągu przedyskutuje się możliwość uproszczenia wzoru (1) i sprowadzenia go do takiej postaci, by obliczenia można było wykonać bez użycia maszyny cyfrowej. Następnie, ze znanych zależności [10], wiążących potencjał wektorowy z pozostałymi wielkościami pola elektromagnetycznego, wyznaczy się indukcję magnetyczną, gęstość prądów indukowanych i moc czynną wydzieloną we wsadzie.

Przeprowadzone między innymi w pracach [7], [9] obliczenia wykazały, że przedział całkowita całki niewłaściwej (1) można ograniczyć w większości przypadków do  $0 \leq k \leq (1 \div 3) \cdot 10^2$  [11]. Przy dużych częstotliwościach prądu zasilającego część urojona współczynnika p (2) jest o wiele większa od jego części rzeczywistej, np. dla  $f = 10^4$  Hz,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Vs/Am,  $G = 5 \cdot 10^7$  S/m (wsad miedziany) -  $\beta^2 \approx 4 \cdot 10^6$ . Zakładając, że:

$$\beta^2 \gg k^2, \quad (3)$$

otrzymuje się:

$$\sqrt{k^2 + j\beta^2} \approx \beta\sqrt{j} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}(1+j) = \frac{1+j}{\delta} = \gamma, \quad (4)$$

gdzie:

$\delta$  - głębokość wnikania pola elektromagnetycznego.

Podobne założenie przyjęto w pracy [12] w celu uzyskania przybliżonych zależności dla cylindrycznego układu grzejnego wsad-wzbudnik.

Po wprowadzeniu związku (3) do wzoru (1) i dodatkowym przyjęciu  $\text{Re}\{\gamma\} \gg k$  oraz że przy dużych wartościach argumentu funkcje  $\sinh\gamma c$  i  $\cosh\gamma c$  są w przybliżeniu równe<sup>x)</sup>, potencjał wektorowy przyjmie postać:

$$A_w = \frac{2NI_1\mu_0}{\pi F h} \frac{1}{\gamma^2 \sinh\gamma c} \int_0^{\infty} \frac{\sin kh \cdot \sin k(h + h_1)}{k}$$

<sup>x)</sup> Funkcje  $\sinh\gamma c$  i  $\cosh\gamma c$  praktycznie już dla  $\text{Re}\{\gamma c\} = \text{Re}\left[\frac{c}{\delta}(1+j)\right] = \frac{c}{\delta} \gg 3$  są sobie równe (błąd mniejszy od 0,5%).

$$\begin{aligned} & [\gamma \cosh \gamma(y-d) - k \sinh \gamma(y-d)] \cdot e^{-kb} \sin kz dk = \\ & = \frac{2N I \mu_0}{\beta h} \left[ \frac{\cosh \gamma(y-d)}{\gamma \sinh \gamma c} \phi_1(z) - \frac{\sinh \gamma(y-d)}{\gamma^2 \sinh \gamma c} \phi_2(z) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

$$\phi_1(z) = \int_0^{\infty} \frac{1}{k} e^{-kb} \cdot \sin kh \cdot \sin k(h + h_1) \cdot \sin kz dk, \quad (6)$$

$$\phi_2(z) = \int_0^{\infty} e^{-kb} \cdot \sin kh \cdot \sin k(h + h_1) \cdot \sin kz dk. \quad (7)$$

Podobnie jak w pracy [9], wymiary i parametry analizowanego układu grzejnego (rys. 1) można przedstawić w postaci względnej:

$$\begin{aligned} b &= \frac{b}{h}, \quad \bar{c} = \frac{c}{h}, \quad \bar{d} = \frac{d}{h}, \quad \bar{h}_1 = \frac{h_1}{h}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h}, \\ \bar{\omega} &= \omega \mu_0 \beta c^2 = 2 \left( \frac{c}{\delta} \right)^2 = (\beta c)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Wówczas:

$$\bar{A}_w = \frac{A_w \beta}{\beta \mu_0 h} = \frac{1}{\bar{\gamma} \sinh \bar{\gamma} \bar{c}} \left[ \bar{\phi}_1(\bar{z}) \cosh \bar{\gamma}(\bar{y} - \bar{d}) - \frac{2(1 + \bar{h}_1)}{\bar{\gamma}} \bar{\phi}_2(\bar{z}) \sinh \bar{\gamma}(\bar{y} - \bar{d}) \right], \quad (9)$$

gdzie:

$$\beta = \frac{MI}{2h}, \quad (10)$$

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{c} \sqrt{j \bar{\omega}} \quad (11)$$

przy czym całki (6) i (7) zgodnie ze wzorami 3.949.1 [13] i 861.14 [14] mają następujące rozwiązania:

$$\bar{\phi}_1(\bar{z}) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 + \bar{h}_1 + \bar{z}}{\bar{b}} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 + \bar{h}_1 - \bar{z}}{\bar{b}} + \operatorname{arg} \operatorname{tg} \frac{\bar{h}_1 + \bar{z}}{\bar{n}} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\bar{z} - \bar{h}_1}{\bar{b}}, \quad (12)$$

$$\bar{\phi}_2(\bar{z}) = \frac{b^2 + (1+h_1)^2 - (1-\bar{z})^2}{[b^2 + (h_1+\bar{z})^2][b^2 + (2+h_1-\bar{z})^2]} - \frac{b^2 + (1+h_1)^2 - (1+\bar{z})^2}{[b^2 + (h_1-\bar{z})^2][b^2 + (2+h_1+\bar{z})^2]} \quad (13)$$

### 3. Indukcja magnetyczna, gęstość prądów indukowanych i moc wydzielona we wsadzie

Korzystając z podanego wcześniej potencjału wektorowego można wyznaczyć wszystkie pozostałe wielkości pola elektromagnetycznego, a w szczególności:

- indukcję magnetyczną

$$\vec{B}_w = \left[ \frac{\partial A_w(y,z)}{\partial z} \vec{1}_y - \frac{\partial A_w(y,z)}{\partial y} \vec{1}_z \right] e^{j\omega t} = \left[ B_{yw} \vec{1}_y + B_{zw} \vec{1}_z \right] e^{j\omega t}, \quad (14)$$

- gęstość prądów indukowanych

$$\vec{J}_w = \sigma \vec{E}_w = -\sigma \frac{\partial A_w}{\partial t} = -j\omega \sigma A_w \vec{1}_x, \quad (15)$$

- moc czynną wydzieloną we wsadzie

$$P_w = \int_V p_V dV = \frac{1}{\sigma} \int_V |\vec{J}_w \cdot \vec{J}_w^*| dV = \omega^2 \int_V |A_w \cdot A_w^*| dV, \quad (16)$$

gdzie:

$V$  - objętość wsadu,

$p_V$  - gęstość objętościowa mocy czynnej.

Moc czynna wydzielona w jednostce szerokości wsadu (wymiar w kierunku osi  $x$ ) wynosi:

$$P_{wx} = \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_b^d |A_w \cdot A_w^*| dy dz, \quad (17)$$

gdzie:

$A_w^*$  - potencjał wektorowy sprzężony z  $A_w$ .

- gęstość strumienia mocy (wektor Poyntinga)

$$\vec{S} = \frac{j\omega}{2\mu_0} [\vec{A} \times \vec{B}^*] \quad (18)$$

Jego składową poprzeczną  $S_y$ , wnikającą do wsadu przez powierzchnię  $y = b$ , wyznacza się z zależności:

$$S_y = \frac{j\omega}{2\mu_0} A \cdot B_{zw}^* \Big|_{y=b} \quad (19)$$

Część rzeczywista wyrażeń (20) i (21) jest gęstością mocy czynnej, natomiast część urojona - gęstością mocy biernej.

Po podstawieniu potencjału wektorowego (9) do zależności (14) i (15) otrzymuje się:

$$\bar{B}_{zw} = \frac{B_{zw}}{j\mu_0} = \frac{1}{\sinh \bar{h} \bar{c}} \left[ \frac{2(1+\bar{h}_1)}{\bar{h}} \bar{\phi}_2(\bar{z}) \cdot \text{cosh} \bar{h}(\bar{y}-\bar{d}) - \bar{\phi}_1(\bar{z}) \sinh \bar{h}(\bar{y}-\bar{d}) \right] \quad (20)$$

$$\bar{J}_w = - \frac{J_w}{j\bar{h}} = \frac{1}{\sinh \bar{h} \bar{c}} \left[ \bar{\phi}_1(\bar{z}) \cosh \bar{h}(\bar{y}-\bar{d}) - \frac{2(1+\bar{h}_1)}{\bar{h}} \bar{\phi}_2(\bar{z}) \sinh \bar{h}(\bar{y}-\bar{d}) \right] \quad (21)$$

Zwykle oblicza się rozkład indukcji magnetycznej lub gęstości prądów indukowanych jedynie na powierzchni wsadu. Dla  $\bar{y} = \bar{b}$  wzory (9), (20) i (21) przyjmują następujące postaci:

$$\bar{A}_w(\bar{y}=\bar{b}) = \frac{A_w}{j\mu_0 \bar{h}} = \frac{1}{\bar{h}} \left[ \bar{\phi}_1(\bar{z}) \text{cth} \bar{h} \bar{c} + \frac{2(1+\bar{h}_1)}{\bar{h}} \bar{\phi}_2(\bar{z}) \right] \quad (22)$$

$$\bar{B}_{zw}(\bar{y}=\bar{b}) = \frac{B_{zw}}{j\mu_0} = \bar{\phi}_1(\bar{z}) + \frac{2(1+\bar{h}_1)}{\bar{h}} \bar{\phi}_2(\bar{z}) \text{cth} \bar{h} \bar{c} \quad (23)$$

$$\bar{J}_w(\bar{y}=\bar{b}) = - \frac{J_w}{j\bar{h}} = \bar{\phi}_1(\bar{z}) \text{cth} \bar{h} \bar{c} + \frac{2(1+\bar{h}_1)}{\bar{h}} \bar{\phi}_2(\bar{z}) \quad (24)$$

Gęstość powierzchniową strumienia mocy wnikającego do wsadu przez powierzchnię  $\bar{y} = \bar{b}$  oblicza się ze wzorów (19), (22) i (23):

$$S_y = \frac{jJ^2 \mu_0 h \omega}{2\bar{h}^2} \bar{S}_y \quad (25)$$

gdzie:

$$\bar{S}_y = \bar{A}_w \cdot \bar{B}_{zw}^* \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} = \frac{1}{\bar{h}} \left[ \bar{\phi}_1(\bar{z}) \text{cth} \bar{h} \bar{c} + \frac{2(1+\bar{h}_1)}{\bar{h}} \bar{\phi}_2(\bar{z}) \right] \cdot$$

$$\left[ \bar{\phi}_1(\bar{z}) + \frac{2(1+\bar{h}_1)}{\bar{h}} \bar{\phi}_2(\bar{z}) \cdot \text{cth} \bar{h} \bar{c} \right] \quad (26)$$

przy czym:

$$\bar{\gamma}^* = \frac{1}{c} \sqrt{-j\bar{\omega}}$$

Dla dużych wartości argumentu<sup>x)</sup>

$$\bar{\gamma} \bar{c} = \sqrt{j\bar{\omega}} = \frac{c\sqrt{2}}{\delta} (1 + j) \quad (27)$$

nie popełni się większego błędu, jeżeli przyjmie się, że  $\text{cth}\bar{\gamma}\bar{c} \approx 1 + j0$ . Wówczas wzory (22) ÷ (24) można jeszcze bardziej uprościć do postaci:

$$\bar{A}_w(\bar{y}=\bar{b}) = \frac{A_w \pi}{j\mu_0 h} = \frac{1}{\bar{\gamma}} \left[ \bar{\phi}_1(\bar{z}) + \frac{2(1+\bar{h}_1)}{\bar{\gamma}} \bar{\phi}_2(\bar{z}) \right] = \frac{1}{\bar{\gamma}} \bar{\phi}_3(\bar{z}), \quad (28)$$

$$\bar{B}_{zw}(\bar{y}=\bar{b}) = \frac{B_{zw} \pi}{j\mu_0} = \bar{\phi}_1(\bar{z}) + \frac{2(1+\bar{h}_1)}{\bar{\gamma}} \bar{\phi}_2(\bar{z}) = \bar{\phi}_3(\bar{z}), \quad (29)$$

$$j_w(\bar{y}=\bar{b}) = -\frac{j_w \pi}{j\bar{\gamma}} = \bar{\phi}_1(\bar{z}) + \frac{2(1+\bar{h}_1)}{\bar{\gamma}} \bar{\phi}_2(\bar{z}) = \bar{\phi}_3(\bar{z}). \quad (30)$$

Ponieważ:

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{c} \sqrt{j\bar{\omega}} = \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2}} (1 + j), \quad (31)$$

więc:

$$\bar{A}_w(\bar{y}=\bar{b}) = \frac{A_w \pi}{j\mu_0 h} = \frac{\bar{c}}{\sqrt{2\bar{\omega}}} \bar{\phi}_1(\bar{z}) - j\bar{c} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\bar{\omega}}} \bar{\phi}_1(\bar{z}) + \frac{2(1+\bar{h}_1)}{\bar{\omega}} \bar{\phi}_2(\bar{z}) \right], \quad (32)$$

$$\bar{B}_{zw}(\bar{y}=\bar{b}) = \frac{B_{zw} \pi}{j\mu_0} = \left[ \bar{\phi}_1(\bar{z}) + \frac{2\bar{c}(1+\bar{h}_1)}{\sqrt{2\bar{\omega}}} \bar{\phi}_2(\bar{z}) \right] - j \frac{2\bar{c}(1+\bar{h}_1)}{\sqrt{2\bar{\omega}}} \bar{\phi}_2(\bar{z}). \quad (33)$$

Wyodrębnienie części rzeczywistej i urojonej potencjału wektorowego i indukcji magnetycznej w (32) i (33) ułatwia wyznaczenie gęstości strumieni mocy czynnej i biernej, wnikających do waadu. Po podstawieniu tych zależności do wzorów (25) i (26) otrzymuje się:

<sup>x)</sup> Przy nagrzewaniu indukcyjnym zwykle  $c:\delta \geq 3\div 4$  i wtedy założenie  $\text{cth}\bar{\gamma}\bar{c} \approx 1 + j0$  jest w pełni uzasadnione.

$$P_S = \operatorname{Re}\{S_Y\} = \frac{J^2 \mu_0 h \omega}{2\pi^2} \bar{P}_S(\bar{z}), \quad (34)$$

$$Q_S = \operatorname{Im}\{S_Y\} = \frac{J^2 \mu_0 h \omega}{2\pi^2} \bar{Q}_S(\bar{z}). \quad (35)$$

gdzie:

$$\bar{P}_S(\bar{z}) = \frac{\bar{c}}{2\bar{\omega}} \bar{\phi}_1^2(\bar{z}) + \frac{2\bar{c}(1+\bar{h}_1)}{\bar{\omega}} \bar{\phi}_2(\bar{z}) \left[ \bar{\phi}_1(\bar{z}) + \frac{2\bar{c}(1+\bar{h}_1)}{\sqrt{2\bar{\omega}}} \bar{\phi}_2(\bar{z}) \right], \quad (36)$$

$$\bar{Q}_S(\bar{z}) = \frac{\bar{c}}{\sqrt{2\bar{\omega}}} \bar{\phi}_1(\bar{z}) + \frac{2\bar{c}^2(1+\bar{h}_1)}{\bar{\omega}} \bar{\phi}_2(\bar{z}) \cdot \left[ \bar{\phi}_1(\bar{z}) + \frac{2}{\sqrt{2\bar{\omega}}} \bar{\phi}_2(\bar{z}) \right]. \quad (37)$$

#### 4. Rozbieżności między metodą ścisłą i uproszczoną

Ocenę dokładności przedstawionej wyżej, przybliżonej metody określania wielkości pola elektromagnetycznego w analizowanym układzie grzejnym (ryc. 1) przeprowadzono na przykładzie indukcji magnetycznej. Wykonano obliczenia dla następujących wymiarów względnych<sup>x)</sup>:

$$\bar{b} = 0,8; \quad \bar{c} = 0,526; \quad \bar{d} = 1,326; \quad \bar{h}_1 = 1; \quad \bar{y} = \bar{b} = 0,8.$$

Tablica 1

Indukcja magnetyczna przy różnych wartościach  $\bar{\omega}$  ( $\bar{z} = 2$ )

$\bar{\omega}$	$ \bar{B}_{zw1} $	$ \bar{B}_{zw2} $	$ \bar{B}_{zw3} $	$\frac{\Delta}{\%}$
2,25	0,4513	0,4553	0,6202	-37,5
22,5	0,5055	0,5057	0,5714	-13,0
110	0,5251	0,5251	0,5538	-5,5
450	0,5305	0,5305	0,5460	-2,9
4500	0,5356	0,5356	0,5409	-1,0

W tablicy 1 zestawiono wyniki uzyskane dla różnych wartości pulsacji względnej  $\bar{\omega}$ , przy  $\bar{z} = 2$ , natomiast w tablicy 2 - dla różnych  $\bar{z}$  ( $\bar{\omega} = 110$ ), gdzie:

<sup>x)</sup> Dla identycznych danych przeprowadzono obliczenia indukcji magnetycznej w [5] metodą szeregu Fouriera, w [9] - metodą całki Fouriera i porównano z pomiarami.



Tablica 2

Indukcja magnetyczna przy różnych wartościach  $\bar{z}$  ( $\bar{\omega} = 110$ )

$\bar{z}$	$ \bar{B}_{zw1} $	$ \bar{B}_{zw2} $	$ \bar{B}_{zw3} $	$\Delta$ %
0,5	0,1386	0,1385	0,1403	-1,2
1,0	0,3137	0,3137	0,3256	-3,8
1,5	0,4656	0,4657	0,4787	-2,8
2,0	0,5251	0,5251	0,5538	-5,5
2,5	0,4832	0,4832	0,5097	-5,5
3,0	0,3525	0,3525	0,3645	-3,4
4,0	0,1203	0,1203	0,1144	4,9
6,0	0,0254	0,0254	0,0235	7,5

$|\bar{B}_{zw1}|$  - moduł indukcji magnetycznej, obliczonej na maszynie cyfrowej wg wzoru dokładnego z pracy [9], dla  $\mu = \mu_0$

$$\bar{B}_{zw1} = \frac{B_{zw1}^{gr}}{j\mu_0} = \int_0^{\infty} \frac{4\bar{p} \cdot \sin \bar{k} \cdot \sin \bar{k}(1 + \bar{H}_1)}{\bar{k}}$$

$$\frac{\bar{k} \cdot \cosh \bar{p}(\bar{y}-\bar{d}) - \bar{p} \cdot \sinh \bar{p}(\bar{y}-\bar{d})}{(\bar{k}^2 + \bar{p}^2) \cdot \sinh \bar{p}\bar{c} + 2\bar{p}\bar{k} \cdot \cosh \bar{p}\bar{c}} e^{-\bar{k}\bar{z}} \cdot \sin \bar{k}\bar{z} \cdot d\bar{k} \quad (38)$$

przy czym:

$$\bar{p} = \sqrt{\bar{k}^2 + j\bar{\omega}\bar{c}^{-2}} \quad (39)$$

$$\bar{k} = kh. \quad (40)$$

$|\bar{B}_{zw2}|$  - moduł indukcji magnetycznej, obliczonej na maszynie cyfrowej wg wzoru jak wyżej, przy dodatkowym, przedyskutowanym w p. 2, założeniu (3)  $\beta^2 \gg k^2$ , które sprowadza związek (39) do postaci:

$$\bar{p} = \frac{1}{\bar{c}} \sqrt{j\bar{\omega}} \quad (41)$$

$|\bar{B}_{zw3}|$  - moduł indukcji magnetycznej, obliczonej wg wzoru uproszczonego (20),

$\Delta$  - błąd względny

$$\Delta = \frac{|\bar{B}_{zw1}| - |\bar{B}_{zw3}|}{|\bar{B}_{zw1}|} 100. \quad (42)$$

Jak widać z tablicy 1, im większa pulsacja względna  $\bar{\omega}$  (czyli, zgodnie z (8),  $c:\delta$ ), tym zbieżność wyników uzyskanych wzorami: uproszczonym (20) i dokładnym (38) jest lepsza. Dla przyjętych parametrów układu grzejnego już przy  $\bar{\omega} = 22,5$  ( $c:\delta \approx 3,4$ ), co odpowiada np. nagrzewaniu płyty aluminiowej ( $\sigma = 3 \cdot 10^7$  S/m) o grubości ok. 0,01 m prądem o częstotliwości  $f = 1000$  Hz; błąd jest dopuszczalny dla przeprowadzenia przybliżonych obliczeń.

Większą dokładność, rzędu kilku procent, uzyskano dla  $\bar{\omega} \geq 110$  ( $c:\delta \geq 7$ ). Z porównania wartości  $|\bar{B}_{zw1}|$ ,  $|\bar{B}_{zw2}|$ ,  $|\bar{B}_{zw3}|$  w tablicy 1 wynika ponadto, że wprowadzenie jedynie założenia  $\beta^2 \gg k^2$  w wyrażeniach (2) nie ma dużego wpływu na dokładność obliczeń (wartości  $|\bar{B}_{zw1}|$  i  $|\bar{B}_{zw2}|$ ). Decydujące znaczenie na wielkość błędu ma natomiast przyjęcie  $\text{Re}j \gg k$  (wartości  $|\bar{B}_{zw1}|$  i  $|\bar{B}_{zw3}|$ ).

## 5. Podsumowanie

W artykule przedyskutowano możliwość uproszczenia złożonych wzorów z pracy [9], opisujących rozkłady wielkości pola elektromagnetycznego (indukcji magnetycznej, gęstości prądów indukowanych oraz mocy czynnej i biernej) w indukcyjnym układzie grzejnym jak na rys. 1. Otrzymane związki mają prostą postać oraz wystarczającą dla obliczeń technicznych dokładność. Obliczenia można wykonać bez użycia maszyny cyfrowej, co stanowi zasadniczą zaletę metody.

Przy wystarczająco dużej pulsacji względnej  $\bar{\omega}$ , czyli dla dużych wartości  $c:\delta$ , błąd nie przekracza kilku procent.

## LITERATURA

- [1] LANGER E.: Teorie indukčního a dielektrického tepla. Československé akademie ved, Praha 1964.
- [2] SUNDBERG Y.: Induction heating with special reference to bodies inside metallic shells. VÅsteras 1965.
- [3] LIWIŃSKI W.: Nagrzewnice indukcyjne skończone. WNT, Warszawa 1968.
- [4] BUCHHOLTZ S.H.: Das Magnetfeld der Wirbelströme in einen elektrischen Induktionsofen und andere daraus Wirbelstromfelder. Archiv für Elektrotechnik. XLIII Band, 6 Heft 1958.
- [5] SAJDAK C.: Analiza pola elektromagnetycznego w indukcyjnym układzie grzejnym płyta-wzbudnik. Archiwum Elektrotechniki t. XXVI z. 4/1977, ss. 825-834.

- [6] KRAKOWSKI M.: Eddy current losses in a non-ferromagnetic plate due to currents in a multi-conductor system. *Archiwum Elektrotechniki*, z. 2/1973 ss. 321-332.
- [7] FIKUS F., SAJDAK C., WIECZOREK T.: Rozkład pola elektromagnetycznego i mocy w płaskiej nagrzewnicy indukcyjnej. *Archiwum Elektrotechniki*, t. XXVI z. 4/1977, ss. 835-844.
- [8] TOZONI O.W.: Raszot elektromagnitnych poliej na wyczislitielnych maszinach. *Technika*, Kijów 1967.
- [9] SAJDAK C.: Zastosowanie metody całki Fouriera do analizy indukcyjnego układu grzejnego płyta-wzbudnik. *Archiwum Elektrotechniki*, t. XXVIII, z. 1/1979.
- [10] KUPALAN S.D.: *Teoria pola elektromagnetycznego*. WNT, Warszawa 1967.
- [11] SAJDAK C.: Pasmowe nagrzewanie indukcyjne blach metalowych w procesach kształtowania ich własności mechanicznych. *Rozprawa doktorska*. Katowice 1975.
- [12] FLUERASU C., GALAN N.: Eddy currents and the power converted into heat inside a very long cylindrical conductor placed in an a.c. circular coil of finite length. *Rev. Roum. Sci. Techn. - Electrotechn. et Energ.* t. 11 n. 2, 1966, ss. 123-141.
- [13] GRANDSZTEIN I.S., RYŻIK I.M.: *Tablice intiegrałów, summ, riałow i proizwiedienij*. Nauka, Moskwa 1971.
- [14] DWIGHT H.B.: *Tables of integrals and other mathematical data*. The Macmillan Company, 1961.

К ВОПРОСУ РАСЧЕТА ПЛОСКИХ ИНДУКЦИОННЫХ  
НАГРЕВАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ШИХТА - ИНДУКТОР

Р е з ю м е

В статье приводится способ приближённого вычисления магнитной индукции, плотности индуктированных токов, а также активной и реактивной мощностей в индукционной нагревательной системе, содержащую немагнитную шихту в виде пространной плиты и петлевой индуктор без магнитного сердечника. Формулы, которые дают возможность определить выше упомянутые величины были получены путём упрощения соотношений с работы [9]. Провелась оценка точности этого метода. Доказывается, что она является тем больше, чем больше относительная пульсация  $\Delta a$  именно для больших соотношения толщины плиты с  $k$  глубине проникновения электромагнитного поля  $\delta$ .

THE REASON FOR CALCULATING FLAT INDUCTIVE HEATING  
SYSTEMS "CHARGE-INDUCTOR"

S u m m a r y

The paper presents a method of approximate calculation of magnetic induction, induced current density and active/passive power in the heating system that contains nonmagnetic charge in the form of widespread plate and a loop inductor without a magnetic core. The equations that allow to determine the above mentioned parameters were obtained by simplifying compounds in Ref. [9]. The method was checked for accuracy. It was found that the greater relative pulsation  $\bar{\omega}$ , the greater accuracy is, i.e. for big values of plate thickness ration  $c$  to the depth penetration of the electromagnetic field  $\delta$ .