

Czesław SAJDAK

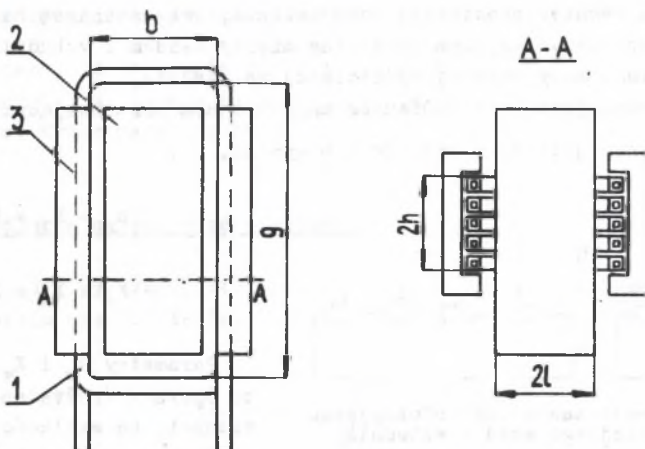
Alicja KUREK

### IMPEDANCJA WZBUDNIKA PŁASKIEJ DWUSTRONNEJ NAGRZEWNICY INDUKCYJNEJ

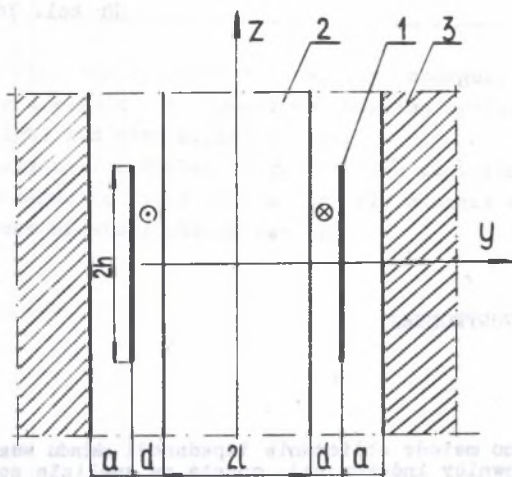
**Streszczenie.** Przedstawiono metodę obliczania impedancji układu wsad - wzbudnik płaskiej nagrzewnicy indukcyjnej, oparta na analizie pola elektromagnetycznego przeprowadzonej w pracach [1, 2]. Na przykładowych charakterystykach pokazano zależność rezystancji i reaktancji zastępczej wzbudnika od podstawowych parametrów i wymiarów układu grzejnego. Określono wpływ bocznika magnetycznego na zmianę impedancji wzbudnika.

#### 1. Wstęp

W pracach [1, 2] przedstawiono rozwiązanie zagadnienia elektromagnetycznego w płaskiej dwustronnej nagrzewnicy indukcyjnej (rys. 1). Jej model obliczeniowy (rys. 2) zawiera bezstratny bocznik magnetyczny o przenikalności magnetycznej nieskończenie dużej i konduktywności równej zero, uzwojenie foliowe o ograniczonej wysokości oraz wsad izotropowy o przenikalności magnetycznej  $\mu \geq \mu_0$ . Uzwojenie jest nieskończenie rozległe w kierunku osi x, natomiast wsad i bocznik magnetyczny mają wymiary nieograniczone w kierunkach osi x i z.



Rys. 1. Nagrzewnica indukcyjna do wsadów płaskich  
1- uzwojenie, 2 - wsad, 3 - bocznik magnetyczny



Rys. 2. Model obliczeniowy [1, 2]

1- uzwojenie, 2- wsad, 3- bocznik magnetyczny

Podane w powyżej wymiarowych parametrach zależności umożliwiające m.in. wyznaczenie gęstości powierzchniowej oraz objętościowej mocy czynnej we wsadzie, a więc wielkości, których znajomość jest niezbędna dla doboru właściwych warunków technologicznych procesu nagrzewania.

Kolejnym elementem obliczania indukcyjnego układu grzejnego wsad - wzбудnik jest określenie wartości parametrów jego schematu zastępczego. Impedancja zastępcza nagrzewnicy indukcyjnej w stanie obciążenia może być przedstawiona np. jako szeregowe połączenie rezystancji  $R_z$  i reaktancji indukcyjnej  $X_z$  (rys.3a). Znane są liczne sposoby wyznaczania parametrów elektrycznych układów indukcyjnych, np. metoda transformatora powietrznego (metoda Esmarcha) [3,4], metoda oporów wniesionych [5,6], metoda oporów magnetycznych [7,8]. Stosuje się również obliczanie impedancji na podstawie analizy pola elektromagnetycznego w układach cylindrycznych [9-11] i płaskich [12-15].

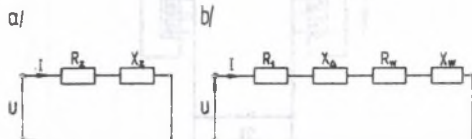
Na rys. 3b pokazano schemat zastępczy dla metody oporów wniesionych, przy czym:

- $R_1$  jest rezystancją własną uzwojenia wzбудnika w stanie jałowym (bez wsadu),
- $X_\Delta$ , zwana również reaktancją rozproszenia, związana jest ze strumieniem magnetycznym przenikającym szczelinę między wsadem i wzбудnikiem,
- $R_w$  odpowiada mocy czynnej wydzielanej we wsadzie,
- $X_w$ , związana jest ze strumieniem magnetycznym przenikającym wsad.

Z porównania układów z rys. 3a i b wynika, że:

$$R_z = R_1 + R_w, \quad (1)$$

$$X_z = X_\Delta + X_w. \quad (2)$$



Rys. 3. Schemat zastępczy indukcyjnego układu grzejnego wsad - wzбудnik

Parametry  $R_w$  i  $X_w$ , zwane często oporami (rezystancjami) wniesionymi, są wielkościami fikcyjnymi, zastępującymi oddziaływa-

nie wsadu na obwód wzbudnika. Wartości  $R_w$  i  $X_w$  są tego samego rzędu, natomiast stosunek parametrów  $R_1$  i  $X_\Delta$  jest zależny od częstotliwości i wymiarów wzbudnika. Przy  $f > 500$  Hz  $X_\Delta$  jest znacznie większa od  $R_1$ , przy częstotliwościach niższych  $R_1$  i  $X_\Delta$  są porównywalne [16].

Współczynnik mocy indukcyjnego układu grzejnego wynosi:

$$\cos \varphi = \frac{R_2}{Z} = \frac{R_1 + R_w}{\sqrt{(R_1 + R_w)^2 + (X_\Delta + X_w)^2}} \quad (3)$$

natomiast jego sprawność elektryczna:

$$\eta_{el} = \frac{R_w}{R_1 + R_w} \quad (4)$$

We wszystkich wyżej wspomnianych metodach wyznaczania parametrów schematu zastępczego rezystancję własną uzwojenia wzbudnika oblicza się podobnie, np. z zależności:

$$R_1 = N^2 \frac{b + g}{\sigma_{Cu} \delta_{Cu} h k_z} \quad (5)$$

gdzie:

- $N$  - liczba zwojów uzwojenia wzbudnika,
- $b, g$  - szerokość i długość wzbudnika (rys. 1),
- $\sigma_{Cu}$  - konduktywność uzwojenia (miedzi);  $\sigma_{Cu} = 5,6 \cdot 10^6 \text{ Sm}^{-1}$ ,
- $\delta_{Cu}$  - głębokość wnikania pola elektromagnetycznego dla materiału uzwojenia (miedzi). Np. dla  $f = 50$  Hz,  $\delta_{Cu} = 10^{-2}$  m; dla  $f = 1000$  Hz,  $\delta_{Cu} = 0,21 \cdot 10^{-2}$  m; dla  $f = 2500$  Hz,  $\delta_{Cu} = 0,13 \cdot 10^{-2}$  m,
- $2h$  - wysokość uzwojenia,
- $k_z$  - współczynnik zapełnienia uzwojenia ( $k_z = 0,8 \pm 0,9$ ).

W niniejszej pracy przedstawi się sposób obliczania impedancji układu wsad - wzbudnik pokazanego na rys. 1, w oparciu o analizę pola elektromagnetycznego. Wykorzysta się przy tym związki otrzymane w pracach [1, 2].

## 2. Impedancja układu wsad - wzbudnik

W pracy [17] wykazano, że siła elektromotoryczna indukowana w nieskończenie cienkim przewodzie "ab" umieszczonym w polu elektromagnetycznym wynosi:

$$\mathcal{E}(s) = -s \int_{ab} \bar{A}(s) \, d\bar{l}, \quad (6)$$

gdzie  $\bar{A}$  - potencjał wektorowy na powierzchni przewodu.

Dla przebiegów sinusoidalnie zmiennych w czasie  $s = j\omega$ .

Potencjał wektorowy w szczelinie powietrznej między wzbudnikiem i wsadem rozpatrywanego układu (rys. 2) ma zgodnie z [1] następującą postać:

$$A_x(y, z) = \frac{2NI\mu_0}{8h} \int_0^{\infty} \frac{\sin kh}{k^2} \frac{\cosh ka}{M(k)} \left[ k\mu Y_1 \cosh k(y+1) - p\mu_0 Y_2 \sinh k(y+1) \right] dk, \quad (7)$$

gdzie:

$$M(k) = Y_I^2 e^{2pl} - Y_{II}^2 e^{-2pl},$$

$$Y_I = k\mu \sinh k(a+d) + p\mu_0 \cosh k(a+d),$$

$$Y_{II} = k\mu \sinh k(a+d) - p\mu_0 \cosh k(a+d),$$

$$Y_1 = k\mu \sinh k(a+d) \sinh 2pl - p\mu_0 [1 - \cosh 2pl] \cosh k(a+d),$$

$$Y_2 = k\mu [1 + \cosh 2pl] \sinh k(a+d) + p\mu_0 \cosh k(a+d) \sinh 2pl,$$

$$p = \sqrt{k^2 + j\omega\mu G},$$

$$\omega = 2\pi f,$$

$\mu, G$  - przenikalność magnetyczna i konduktywność wsadu,

$k$  - zmienna całkowania,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1},$$

$$j = \sqrt{-1}.$$

Siła elektromotoryczna indukowana w uzwojeniu wzbudnika na jednostkę jego długości w kierunku osi  $x$  wynosi:

$$\mathcal{E} = -j\omega \frac{N}{2h} \int_{-h}^h A_x [y = -(1+d); z] dz \quad [\text{Vm}^{-1}] \quad (8)$$

Impedancję układu wsad - wzbudnik oblicza się na podstawie II prawa Kirchhoffa. Przy założeniu, że rezystancja własna uzwojenia wzbudnika  $R_f = 0$ , otrzymuje się:

$$z = r_w + j(x_\Delta + x_w) = -\frac{\mathcal{E}}{I} \quad [\Omega \text{ m}^{-1}] \quad (9)$$

a po podstawieniu do wzoru (9) równania (8):

$$z = j\omega \frac{N}{2hI} \int_{-h}^h A_x [y = -(1+d); z] dz \quad [\Omega m^{-1}] \quad (10)$$

Po wprowadzeniu do zależności (10) potencjału wektorowego dla  $y=-(1+d)$ , scałkowaniu w granicach  $(-h, h)$  oraz przedstawieniu wymiarów i parametrów układu w postaci względnej:

$$k_R = kh; \quad a_R = \frac{a}{h}; \quad d_R = \frac{d}{h}; \quad l_R = \frac{l}{h}; \quad \mu_R = \frac{\mu}{\mu_0}; \quad \omega_R = \omega \mu_0 l^2 = 2 \left(\frac{l}{\delta}\right)^2,$$

gdzie  $\delta$  - głębokość wnikania pola elektromagnetycznego;

otrzymuje się:

$$z = \frac{\omega \mu_0}{\pi} N^2 \int_0^{\infty} jG_R(k) \frac{\sin^2 k_R \cosh k_R a_R}{k_R^2} dk_R \quad [\Omega m^{-1}] \quad (11)$$

gdzie:

$$G_R(k) = \frac{k_R \mu_R \cosh k_R d_R \sinh p_R l_R + p_R \sinh k_R d_R \cosh p_R l_R}{k_R \mu_R \sinh p_R l_R \sinh k_R c_R + p_R \cosh p_R l_R \cosh k_R c_R}$$

$$c_R = a_R + d_R,$$

$$p_R = \sqrt{k_R^2 + j\omega_R \mu_R}.$$

Impedancję zastępczą układu wsad - wzbudnik można przedstawić w postaci:

$$Z = N^2 \omega l_z (r + jx) = R_W + j (X_\Delta + X_W) \quad [\Omega] \quad (12)$$

gdzie:

$$r = 4 \cdot 10^{-7} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} jG_R(k) \frac{\sin^2 k_R \cosh k_R a_R}{k_R^2} dk_R, \quad (13)$$

$$x = 4 \cdot 10^{-7} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} jG_R(k) \frac{\sin^2 k_R \cosh k_R a_R}{k_R^2} dk_R, \quad (14)$$

$$R_W = N^2 \omega l_z r, \quad (15)$$

$$X_\Delta + X_W = N^2 \omega l_z x = X_Z \quad (16)$$

$l_z$  - średnia długość zwoju uzwojenia,

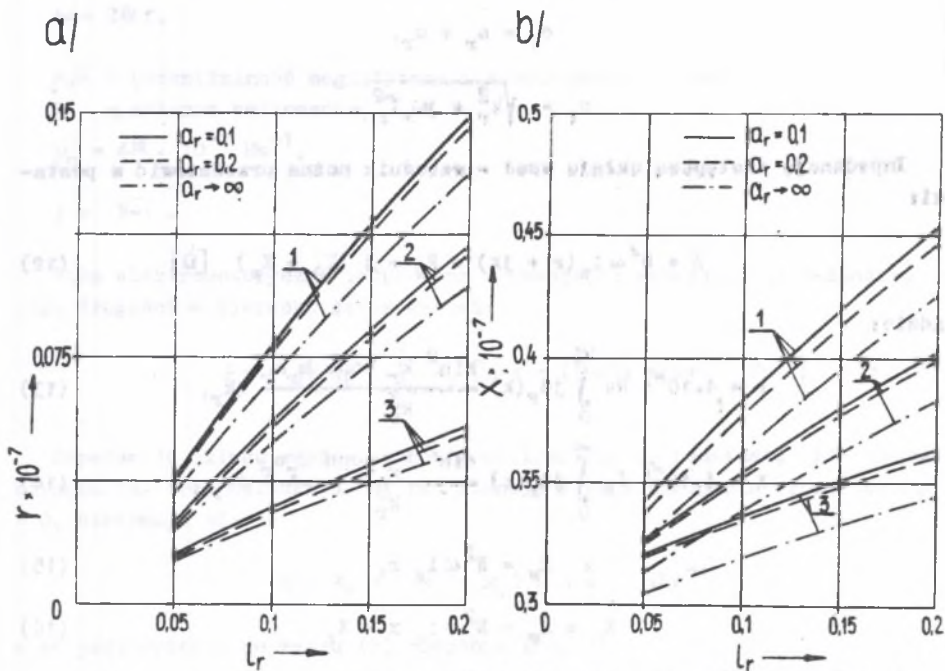
$$l_z \approx 2(g + b + \delta_{Cu}), \quad (17)$$

### 3. Charakterystyki uniwersalne

Przedstawienie zależności (12) i (14) w formie bezwymiarowej pozwala na skonstruowanie rodzin charakterystyk uniwersalnych dla zmiennych wartości  $a_r$ ,  $d_r$ ,  $l_r$ ,  $\omega_r$  i  $\mu_r$ . Na rys. 4+9 pokazano przykładowe zależności  $r, x = f(l_r)$  i  $r, x = f(d_r)$  dla trzech wartości względnej przenikalności magnetycznej wsadu  $\mu_r = 1; 10; 100$  oraz dla trzech wartości odległości między bocznikiem magnetycznym i uzwojeniem wzbudnika  $a_r = 0,1; 0,2; \infty$ . Ostatniemu przypadkowi  $a_r \rightarrow \infty$  odpowiada model nagrzewnicy indukcyjnej bez bocznika magnetycznego.

Na rys. 10 i 11 pokazano charakterystyki  $k_R, k_X = f(l_r)$  i  $k_R, k_X = f(d_r)$  gdzie  $k_R$  i  $k_X$  są współczynnikami określającymi wpływ bocznika magnetycznego na zmianę parametrów schematu zastępczego układu wsad - wzbudnik. Przyjęto, że minimalna odległość między czynnym przekrojem uzwojenia a bocznikiem magnetycznym wynosi  $a_r = 0,1$ . Wówczas współczynnikami  $k_R$  i  $k_X$  są zdefiniowane następująco:

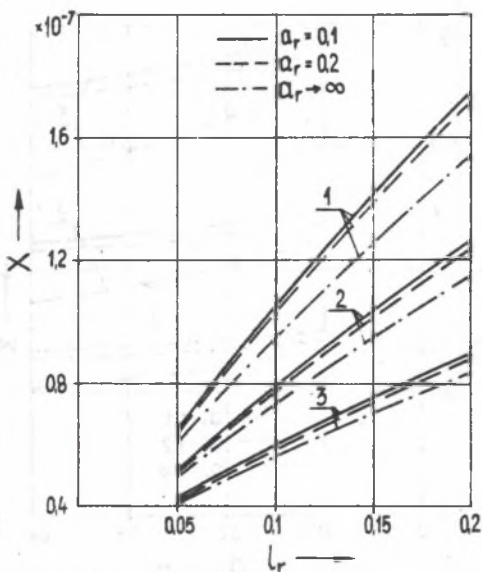
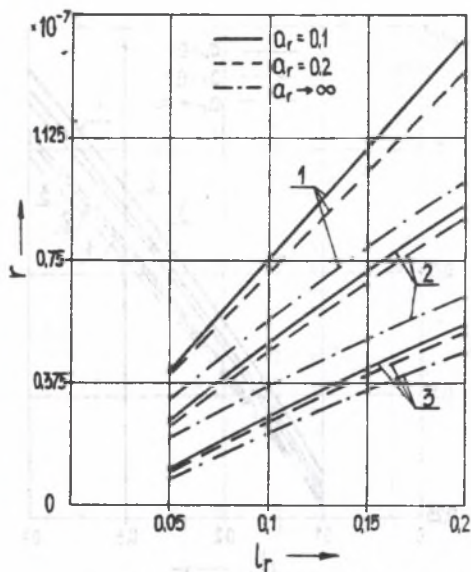
$$k_R = \frac{r(a_r=0,1)}{r(a_r \rightarrow \infty)} = \frac{R_w(a_r=0,1)}{R_w(a_r \rightarrow \infty)} \quad (18)$$



Rys. 4. Charakterystyki  $r, x = f(l_r)$  dla  $\mu_r = 1$  i  $d_r = 0,1$   
 1 -  $\omega_r = 8$ ; 2 -  $\omega_r = 18$ ; 3 -  $\omega_r = 50$

a/

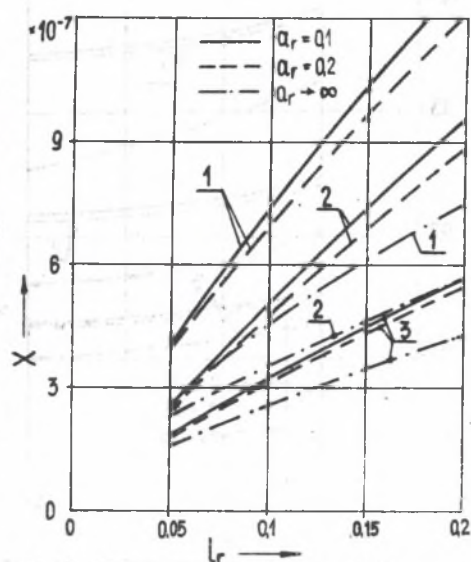
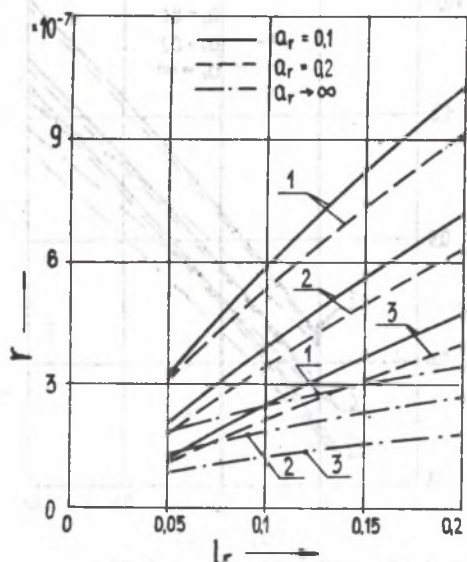
b/



Rys. 5. Charakterystyki  $r, x = f(l_r)$  dla  $\mu_r = 10$  i  $d_r = 0,1$   
 1 -  $\omega_r = 8$ ; 2 -  $\omega_r = 18$ ; 3 -  $\omega_r = 50$

a/

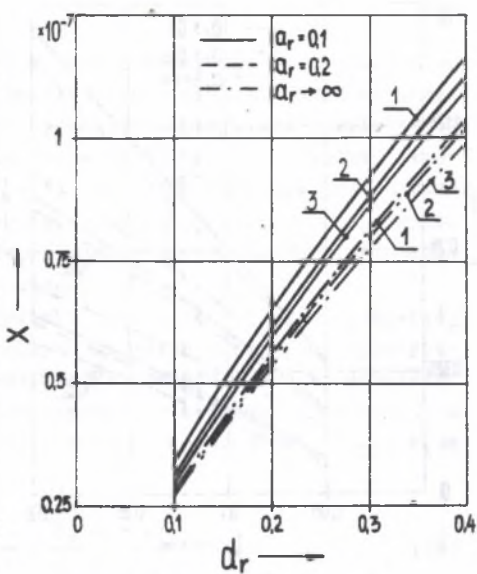
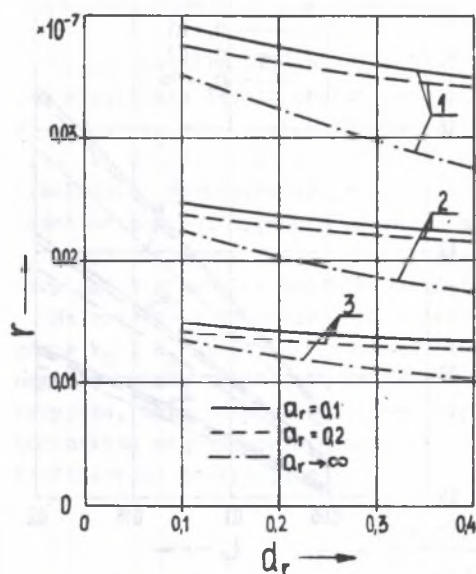
b/



Rys. 6. Charakterystyki  $r, x = f(l_r)$  dla  $\mu_r = 100$  i  $d_r = 0,1$   
 1 -  $\omega_r = 8$ ; 2 -  $\omega_r = 18$ ; 3 -  $\omega_r = 50$

a/

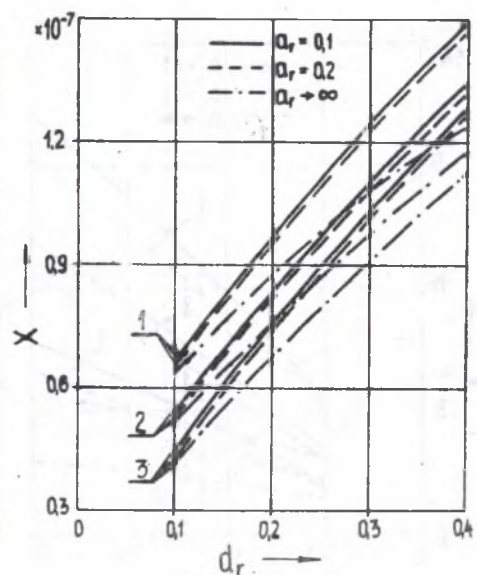
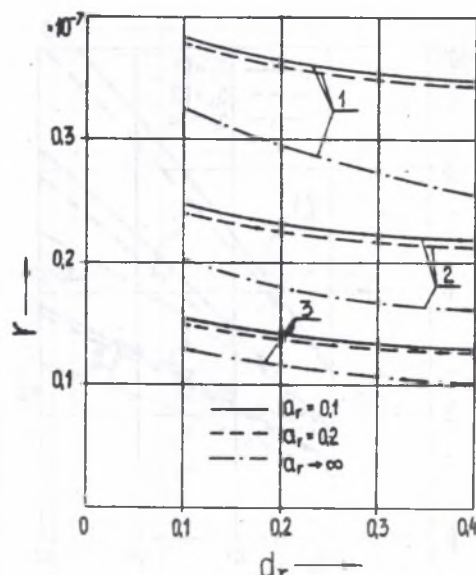
b/



Rys. 7. Charakterystyki  $r, x = f(d_r)$  dla  $\mu_r = 1$  i  $l_r = 0,05$   
 1 -  $\omega_r = 8$ ; 2 -  $\omega_r = 18$ ; 3 -  $\omega_r = 50$

a/

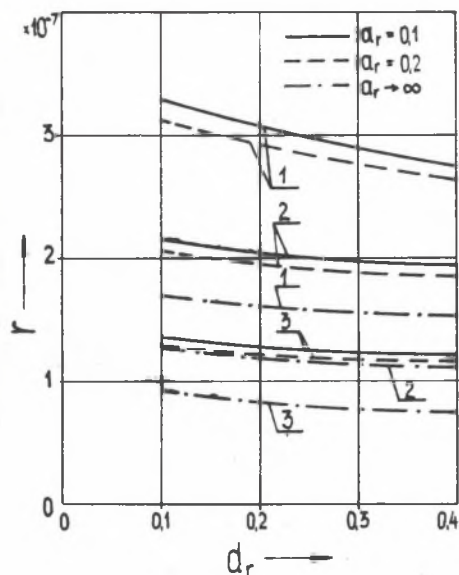
b/



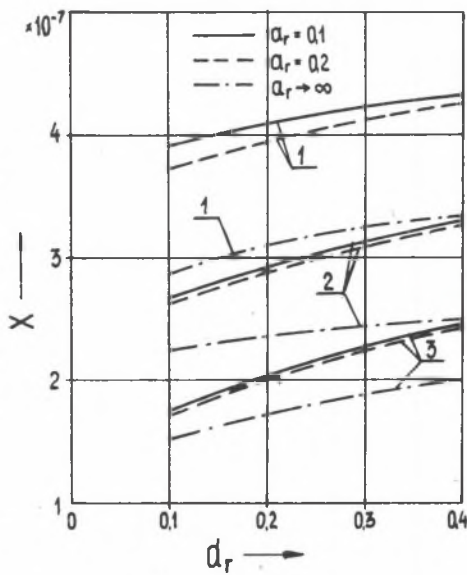
Rys. 8. Charakterystyki  $r, x = f(d_r)$  dla  $\mu_r = 10$  i  $l_r = 0,05$   
 1 -  $\omega_r = 8$ ; 2 -  $\omega_r = 18$ ; 3 -  $\omega_r = 50$



a/

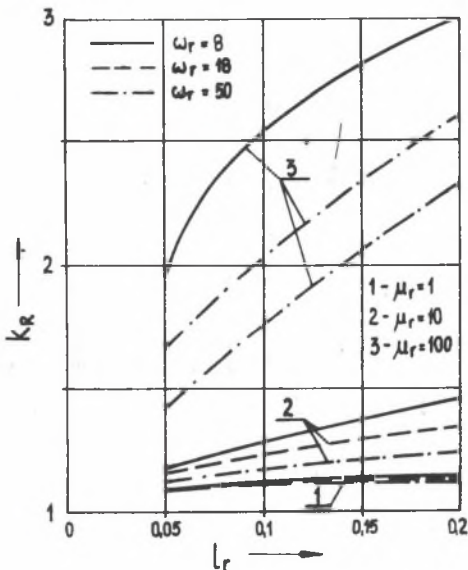


b/

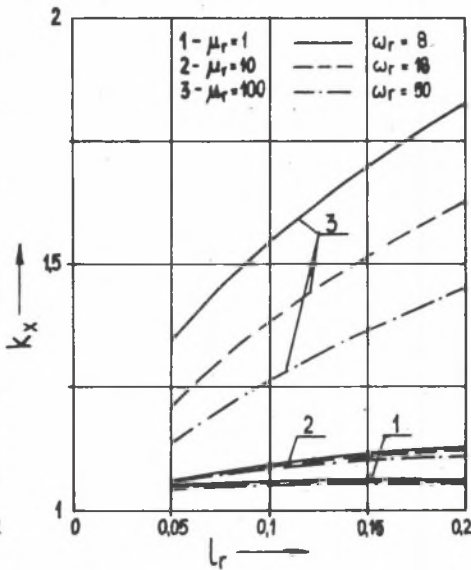


Rys. 9. Charakterystyki  $r, x = f(d_r)$  dla  $\mu_r = 100$  i  $l_r = 0,05$   
 1 -  $\omega_r = 8$ ; 2 -  $\omega_r = 18$ ; 3 -  $\omega_r = 50$

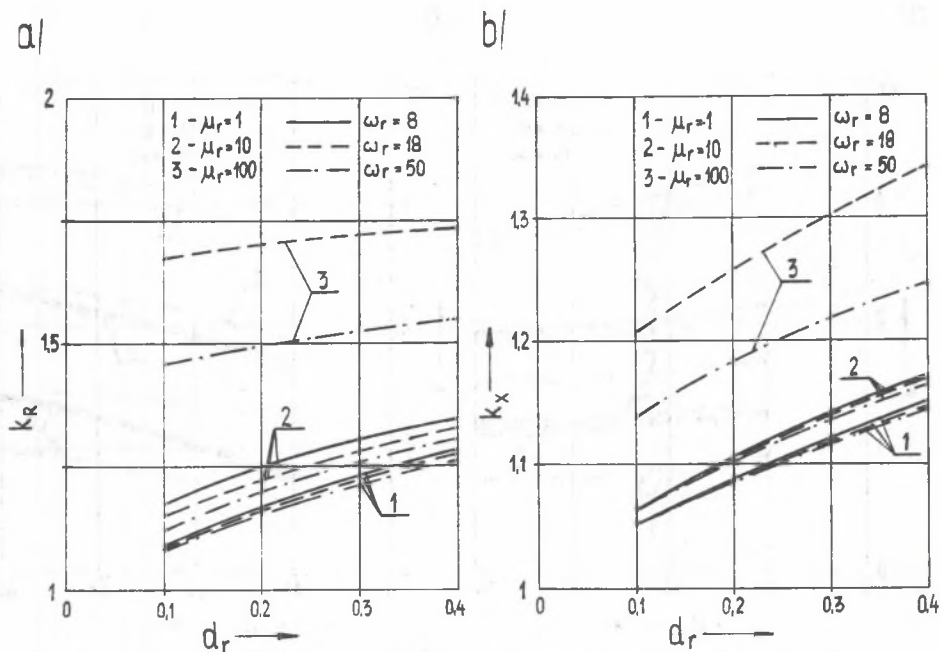
a/



b/



Rys. 10. Zależności  $k_R, k_X = f(l_r)$  dla  $d_r = 0,1$



Rys. 11. Zależności  $k_R, k_X = f(d_r)$  dla  $l_r = 0,05$

$$k_X = \frac{x(a_r=0,1)}{x(a_r \rightarrow \infty)} = \frac{X_z(a_r=0,1)}{X_z(a_r \rightarrow \infty)} \quad (19)$$

Zgodnie z określeniem parametr  $\omega_r$  jest funkcją stosunku połowy grubości wsadu  $l$  do głębokości wnikania pola elektromagnetycznego  $\delta$  :

$$\omega_r = \omega_r \sigma l^2 = 2 \left( \frac{l}{\delta} \right)^2, \quad (20)$$

Stąd

$$\frac{l}{\delta} = \sqrt{\frac{\omega_r}{2}}. \quad (21)$$

Wartościom  $\omega_r$ , dla których skonstruowano charakterystyki pokazane na rys. 4-11, odpowiadają więc następujące wielkości  $\frac{l}{\delta}$  :

- dla  $\omega_r = 8$ ,  $\frac{l}{\delta} = 2$ ;
- dla  $\omega_r = 18$ ,  $\frac{l}{\delta} = 3$ ;
- dla  $\omega_r = 50$ ,  $\frac{l}{\delta} = 5$ ,

#### 4. Podsumowanie

Przedstawiona w pracy metoda obliczania rezystancji i reaktancji zastępczej płaskiego indukcyjnego układu grzejnego wsad - wzbudnik oparta jest na rozwiązaniu równań pola elektromagnetycznego. Związki końcowe (11) ÷ (14) mają postać całek niewłaściwych o złożonych funkcjach podcałkowych. Z tego względu dla wykonania konkretnych obliczeń konieczne jest użycie maszyny cyfrowej. Dla uproszczenia posługiwania się tą metodą bardzo celowe jest skonstruowanie rodzin charakterystyk uniwersalnych, podobnego rodzaju jak na rys. 4 ÷ 9.

Zaprezentowany tu sposób wyznaczania parametrów schematu zastępczego pozwala, łącznie z analizą przeprowadzoną w pracach [1, 2], na obliczenie wszystkich podstawowych wielkości elektrycznych i magnetycznych indukcyjnego układu grzejnego.

Na podstawie charakterystyk z rys. 4 ÷ 11 można sformułować szereg interesujących wniosków co do wpływu poszczególnych parametrów nagrzewnicy na wartości  $R_w$  i  $X_z$ . Widoczna jest duża zależność rezystancji od grubości wsadu, przy czym zmiany mają charakter zbliżony do liniowego. Wpływ wzrostu  $l_r$  na zwiększenie reaktancji zastępczej jest wyraźny, zwłaszcza dla wsadów ferromagnetycznych. Wzrost odległości między wsadem i wzbudnikiem powoduje nieznaczne zmniejszenie rezystancji  $R_w$  oraz silne zwiększenie reaktancji  $X_z$ .

Obecność bocznika magnetycznego wpływa we wszystkich rozpatrywanych przypadkach na wzrost wartości parametrów schematu zastępczego ( $k_R > 1$ ,  $k_X > 1$ ). Jest to wyraźne szczególnie dla wsadów ferromagnetycznych.

#### LITERATURA

- [1] Sajdak Cz.: Gęstość prądu indukowanego i moc wydzielana we wsadach płaskich nagrzewanych indukcyjnie wzbudnikami jedno- i dwusekcyjnymi. Rozprawy Elektrotechniczne (w druku).
- [2] Sajdak Cz.: An analytical method of calculating the electromagnetic parameters of flat induction heaters. Acta Technica CSAV (w druku).
- [3] Esmarch W.: Zur Theorie der kernlosen Induktionsöfen. Sondedruck aus Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern. Berlin 1931, t.X, z.2, 171-196.
- [4] Langer E.: Abteilung des Ersatzdurchmessers eines zylindrischen Einsetzes. VII Internationaler Kongress UIE, 1972, N.603.
- [5] Brunst W.: Induktive Wärmebehandlung. Springer - Verlag. Berlin-Göttingen - Heidelberg, 1957.
- [6] Sluchockij A.E., Ryskin S.E.: Induktory dla indukcionnogo nagriewa. Energia, Leningrad 1974.

- [7] Schönbacher K.: Zur Berechnung von Induktionsöfen. ETZ-A, H.73, 1952, 736-738.
- [8] Baker R.M.: Design and calculation of induction heating coils. AIEE Trans., vol. 76, 1957, 31-40.
- [9] Lavers J.D., Biringer P.P.: An improved method of calculating the induction heating equivalent circuit parameters. 7th International Congress UIE, Warsaw 1972, N.602.
- [10] Lupi S.: Design of inductors for induction furnaces with conducting crucible. World Electrotechnical Congress, Moscow 1977, p.41.
- [11] Lupi S., Niewkow W.: Analityczeskij rasczot cilindriczeskich indukcionnyh sistiem. Elektrichestwo, 6/1978, 43-47.
- [12] Krakowski M.: Eddy current losses in a non-ferromagnetic plate due to currents in a multi - conductor system. Archiwum Elektrotechniki, t. XXII, z.2/1973, 321-332.
- [13] Krakowski M.: Eddy current losses in a shielded or unshielded ferromagnetic solid due to currents in ribbon conductors. Archiwum Elektrotechniki, t. XXII, z.2/1973, 333-350.
- [14] Pejsachowicz W.A.: Rasczot soprotiwlenij zagotowok kwadratnogo i prismoougolnogo sieczenij pri indukcionnom nagriewie. Trudy WNIITWcz, nr 3 1969.
- [15] Sajdak Cz., Szymański G.: Method of calculating the impedance of flat termoinductive system charge - inductor. Acta Technica CSAV 1983, nr 3, 327-337.
- [16] Liwiński W.: Nagrzewnice indukcyjne skrośne. WNT, Warszawa 1968.
- [17] Krakowski M.: Impedances of linear electrical networks. Rozprawy Elektrotechniczne, t.XVIII, z. 3/1972, 443-457.

ПОЛНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ИНДУКТОРА ПЛОСКОЙ ДВУХСТОРОННЕЙ  
УСТАНОВКИ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА

Р е з ю м е

В настоящей работе представлен метод расчета полного сопротивления системы садка-индуктор плоской установки индукционного нагрева, основанный на анализе электромагнитного поля проведенном в работах [1, 2]. На основе примерных характеристик указаны зависимости активного и реактивного сопротивлений индуктора от основных параметров и размеров нагревательной системы. В работе авторы определили влияние магнитного сердечника на изменение полного сопротивления индуктора.

THE IMPEDANCE OF AN INDUCTOR OF A FLAT DOUBLE-SIDED INDUCTION HEATER

S u m m a r y

There was presented a method of calculating the impedance of the charge-inductor system concerning a flat induction heater, based on the analysis of electromagnetic field carried out in the papers [1, 2]. The dependence of resistance and substitute reactance of an inductor on basic parameters and dimensions of a heating system, was shown by means of exemplary characteristics. The influence of magnetic core on the change of inductor impedance was determined.