

Tadeusz J. SOBCZYK ¹⁾

MODEL MATEMATYCZNY SILNIKA KLATKOWEGO UWZGLĘDNIAJĄCY LOKALNE NASYCENIA MAGNETYCZNE

Streszczenie. W pracy przedstawiono model silnika klatkowego, w którym uwzględniono nasycenie głównego obwodu magnetycznego przez prądy wszystkich obwodów silnika oraz nasycenia poszczególnych zębów stojana i wirnika przez odpowiednie prądy faz stojana i prętów klatki wirnika. W celu utworzenia takiego modelu wykorzystano formalizm Lagrange'a, bazujący na funkcji koenergii. W pracy wyodrębniono koenergię głównego obwodu magnetycznego oraz koenergie obwodów magnetycznych lokalnych strumieni rozproszeń. W wyniku otrzymano model matematyczny, który umożliwia obliczanie efektów niedostępnych dla powszechnie stosowanych modeli obwodowych tej klasy maszyn.

MATHEMATICAL MODEL OF CAGE MOTORS TAKING INTO ACCOUNT LOCAL MAGNETIC SATURATIONS

Summary. In this paper a mathematical model of induction cage motors is presented. The developed model takes into account both saturation of the main magnetic circuit due to currents of motor windings and saturation of leakage zones due to individual currents of stator phases and rotor bars. To create such a model the Lagrange formalism was applied, which required to determine the coenergy function. In the paper the coenergy of the main magnetic circuit and coenergy in the magnetic circuits of leakage fluxes of individual currents are separated. The resulting mathematical model makes it possible to predict effects due to saturation that are unpredictable by circuit models of induction motors being in use at present.

Key words: Induction cage motors, equivalent magnetising current

1. WSTĘP

Modele matematyczne silników indukcyjnych klatkowych bazują zwykle na równaniach obwodów elektrycznych, jakie tworzą uzwojenie silnika. Przy takim podejściu silnik stanowi zbiór magnetycznie sprzężonych cewek, więc do opisu najwygodniej jest używać indukcyjności własnych i wzajemnych, wielkości typowych dla cewek o liniowych charakterystykach. Stwarza to jednak problemy przy uwzględnianiu nieliniowości ferromagnetycznego obwodu magnetycznego silników, który ulega lokalnym nasyceniom. Tradycyjnie wydziela się dwa rodzaje nasycień: obwodu magnetycznego dla głównego strumienia magnetycznego, wytwarzanego przez wszystkie cewki uzwojenia, oraz obwodów dla strumieni rozproszeń poszczególnych cewek, nasycanych jedynie przez ich własne prądy. Obydwa zjawiska są w silnikach indukcyjnych klatkowych bardzo istotne i nieuwzględnienie ich prowadzi do znacznych różnic pomiędzy własnościami przewidywanymi z modelu magnetycznego a obserwowanymi dla rzeczywistego obiektu. Problemowi temu poświęcono bardzo dużo prac i nadal jest on podejmowany w literaturze fachowej, co świadczy o tym, że nie jest on do końca satysfakcjonująco rozwiązany.

Aby odejść od wykorzystywania indukcyjności własnych i wzajemnych w tzw. „obwodowych” modelach maszyn indukcyjnych, w pracach [6], [8], [9] zaproponowano podejście bazujące na funkcji koenergii magnetycznej i formułowaniu równań maszyny bezpośrednio z równań Lagrange'a. Jednym z podstawowych założeń skuteczności i technicznej użyteczności tego podejścia jest utrzymanie rozdzielnego działania głównego obwodu magnetycznego dla strumienia głównego oraz obwodów dla strumieni rozproszeń. W istocie, nieliniowość obwodu magnetycznego

¹⁾ Prof. dr hab., Politechnika Krakowska, Instytut Elektromechanicznych Przemian Energii, Katedra Maszyn i Napędów Elektrycznych, 31-155 Kraków, ul. Warszawska 24, tel/fax: +12 628 20 44, e-mail: pesobczy@cyf-kr.edu.pl

w maszynach powoduje, że te dwa typy strumieni magnetycznych na siebie oddziałują, a ich rozdzielenie w modelu matematycznym jest kompromisem w stosunku do komplikacji, jakie niesie za sobą uwzględnienie tego faktu.

W pracy podjęto próbę utworzenia modelu matematycznego silnika indukcyjnego klatkowego, który, utrzymując założenie o rozdzielnym działaniu strumienia głównego i strumieni rozproszonych, uwzględnia jednak nieliniowy charakter dróg tych strumieni.

2. ZASTĘPCZY PRĄD MAGNESUJĄCY I FUNKCJA KOENERGII SILNIKA KLATKOWEGO

Aby rozpocząć formalne operacje matematyczne zmierzające do zapisania równań modelu silnika klatkowego, należy ustalić założenia odnośnie do uwzględnianych zjawisk i faktów fizycznych. Niech będą to typowe założenia, przyjmowane przy tworzeniu „klasycznych” modeli silników klatkowych, z wyłączeniem liniowego charakteru obwodu magnetycznego. Będzie to więc model symetrycznie zbudowanego 3-fazowego silnika o p -parach biegunów i N prętach klatki, uwzględniający żłobkowania powierzchni stojana i wirnika, prądów wirowych w obwodach magnetycznych oraz wypierania prądów w prętach uzwojenia.

Podstawowym pojęciem ułatwiającym tworzenie równań maszyn bez użycia indukcyjności jest zastępczy prąd magnesujący, równoważny amplitudzie sumarycznego przepływu wszystkich cewek maszyny. Dla maszyny posiadającej M niezależnych uzwojeń, generujących przepływ p -tej harmonicznej kwadrat zastępczego prądu magnesującego określa forma kwadratowa

$$\left(i_{\mu p} \right)^2 = \begin{bmatrix} i_{1p} & i_{2p} & \dots & i_{Mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cos p(\alpha_1 - \alpha_2) & \dots & \cos p(\alpha_1 - \alpha_M) \\ \cos p(\alpha_2 - \alpha_1) & 1 & \dots & \cos p(\alpha_2 - \alpha_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos p(\alpha_M - \alpha_1) & \cos p(\alpha_M - \alpha_2) & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1p} \\ i_{2p} \\ \vdots \\ i_{Mp} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

W tej formie kwadratowej prądy i_{1p} , i_{2p} , ..., i_{Mp} są przeliczonymi prądami uzwojeń

$$i_{mp} = \frac{2}{\pi} (z_m k_{mp}) i_m = v_{mp} i_m, \quad (2)$$

gdzie: z_m - liczba zwojów, k_{mp} - współczynnik uzwojenia, i_m - prąd danego uzwojenia.

Kąty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$ określają położenia katowe maksimum przepływu magnetycznego każdego z uzwojeń. Pozycję katową maksimum przepływu wypadkowego p -tej harmonicznej, w stosunku do przyjętego kąta odniesienia, określają wyrażenia:

$$\sin p\alpha = \frac{1}{i_{\mu}} \sum_{m=1}^M (i_{mp} \sin p\alpha_m) \quad ; \quad \cos p\alpha = \frac{1}{i_{\mu}} \sum_{m=1}^M (i_{mp} \cos p\alpha_m). \quad (3)$$

Te dwie wielkości: zastępczy prąd magnesujący $i_{\mu p}$ oraz kąt $p\alpha$ stanowią zmienne zastępcze, które wystarczają do opisu funkcji koenergii magnetycznej głównego obwodu magnetycznego maszyny od p -tej harmonicznej, niezależnie czy jest on traktowany jako liniowy, czy nieliniowy.

Założenie, że strumień główny oraz strumienie rozproszonych nie oddziałują na siebie, pozwala zapisać funkcję koenergii maszyny w postaci sumy koenergii głównego obwodu magnetycznego oraz koenergii obwodów magnetycznych poszczególnych strumieni rozproszonych, które w pierwszym przybliżeniu zależne będą jedynie od prądów je wywołujących

$$E_{ko} = E_g(i_{\mu p}, p\alpha) + \sum_{m=1}^M E_{\sigma, m}(i_m). \quad (4)$$

Taka postać funkcji koenergii pozwala zapisać ogólne równania Lagrange'a maszyny elektrycznej o M uzwojeniach

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial E_{ko}}{\partial i_m} = u_m - R_m i_m \quad ; \quad \text{dla } m=1, \dots, M,$$

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\partial E_{k\alpha}}{\partial \varphi} + T_m$$

w zmodyfikowanej formie

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_g}{\partial i_{\mu,p}} \cdot \frac{\partial i_{\mu,p}}{\partial i_m} + \frac{\partial E_g}{\partial (p\alpha)} \cdot \frac{\partial (p\alpha)}{\partial i_m} \right) + \frac{d}{dt} \frac{\partial E_{\alpha,m}}{\partial i_m} = u_m - R_m i_m \quad ; \quad \text{dla } m=1, \dots, M, \quad (5a)$$

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \left(\frac{\partial E_g}{\partial i_{\mu,p}} \frac{\partial i_{\mu,p}}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_g}{\partial (p\alpha)} \frac{\partial (p\alpha)}{\partial \varphi} \right) + T_m \quad (5b)$$

W 3-fazowym silniku klatkowym można wyróżnić $M=3+N$ niezależnych uzwojeń, tj. 3 fazy stojana (nie rozważając tu szczegółów ich budowy) oraz N oczek klatki wirnika, które wspólnie będą magnesowały główny obwód magnetyczny silnika przez sumaryczny ich przepływ magnetyczny dla harmonicznej podstawowej, tj. p -tej. Przyjmując, że szczelina powietrzna jest równomierna wzdłuż obwodu, o nasyceniu się głównego obwodu magnetycznego decydować będzie jedynie amplituda wypadkowego przepływu magnetycznego, niezależnie od jego położenia kąтового. Zatem koenergia głównego obwodu magnetycznego będzie funkcją jedynie zastępczego prądu magnesującego p -tej harmonicznej. Oznaczając przez $i_{s,1}, i_{s,2}, i_{s,3}$ prądy fazowe stojana, przez $i_{o,1}, i_{o,2}, \dots, i_{o,N}$ prądy oczek klatki wirnika oraz przez $k_{s,p}$ współczynnik uzwojenia faz stojana, a przez $k_{w,p}$ współczynnik skrótu dla oczka klatki (obydwa dla p -tej harmonicznej), zastępczy prąd magnesujący silnika klatkowego, oznaczony w skrócie i_μ (dokładniej, jego kwadrat), określa forma kwadratowa

$$(i_\mu)^2 = \begin{bmatrix} i_s^T & i_w^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (v_s)^2 A_{ss} & (v_s v_w) A_{sw} \\ (v_s v_w) (A_{ws})^T & (v_w)^2 A_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_w \end{bmatrix}, \quad (6)$$

w której oznaczono

$$i_s = \begin{bmatrix} i_{s,1} \\ i_{s,2} \\ i_{s,3} \end{bmatrix}; \quad i_w = \begin{bmatrix} i_{o,1} \\ \vdots \\ i_{o,N} \end{bmatrix}; \quad A_{ss} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$v_s = \frac{2}{\pi} z_s k_{s,p}; \quad v_w = \frac{2}{\pi} \sin p\alpha; \quad \alpha = \frac{2\pi}{N},$$

$$A_{ww} = \begin{bmatrix} 1 & \cos p\alpha & \cos 2p\alpha & \dots & \cos(N-1)p\alpha \\ \cos p\alpha & 1 & \cos p\alpha & \dots & \cos(N-2)p\alpha \\ \cos 2p\alpha & \cos p\alpha & 1 & \dots & \cos(N-3)p\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(N-1)p\alpha & \cos(N-2)p\alpha & \cos(N-3)p\alpha & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{sw} = \begin{bmatrix} \cos p\varphi & \cos(p(\varphi - \alpha)) & \cos(p(\varphi - 2\alpha)) & \dots & \cos(p(\varphi - (N-1)\alpha)) \\ \cos(p\varphi + \frac{2\pi}{3}) & \cos(p(\varphi - \alpha) + \frac{2\pi}{3}) & \cos(p(\varphi - 2\alpha) + \frac{2\pi}{3}) & \dots & \cos(p(\varphi - (N-1)\alpha) + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(p\varphi + 2\frac{2\pi}{3}) & \cos(p(\varphi - \alpha) + 2\frac{2\pi}{3}) & \cos(p(\varphi - 2\alpha) + 2\frac{2\pi}{3}) & \dots & \cos(p(\varphi - (N-1)\alpha) + 2\frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}.$$

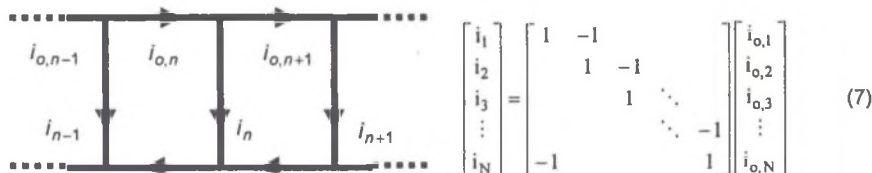
Koenergia obwodów magnetycznych strumieni rozproszonych składa się z dwóch części - koenergii faz stojana oraz oczek klatki wirnika. O ile koenergię związaną ze strumieniami rozproszonych faz stojana można w pierwszym przybliżeniu zapisać w postaci sumy trzech identycznych, nieliniowych funkcji, zależnych od prądów poszczególnych faz

$$E_{\sigma,s} = E_{\sigma}^s(i_{s,1}) + E_{\sigma}^s(i_{s,2}) + E_{\sigma}^s(i_{s,3}),$$

to koenergii wynikające ze strumieni rozproszeń oczek klatki wirnika muszą zostać podzielone na koenergii związane ze strumieniami rozproszeń prętów klatki oraz segmentów pierścieni zwierających. Wynika to z faktu, że w prętach i segmentach zwierających klatki płyną różne prądy. Dodatkowo strumienie rozproszeń prętów zamykają się przez obwody magnetyczne silnie nieliniowe, natomiast strumienie rozproszeń segmentów pierścieni zwierających zamykają się przez powietrze i ich obwody mogą być uznane za liniowe. Funkcje koenergii rozproszeń wirnika należy więc zapisać w postaci:

$$E_{\sigma,w} = \sum_{n=1}^N E_{\sigma}^w(i_n) + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} L_{\sigma}^{\text{seg}}(i_{o,n})^2,$$

gdzie przez i_1, i_2, \dots, i_N oznaczono prądy prętów klatki a przez L_{σ}^{seg} indukcyjność rozproszenia segmentu pierścienia. Należy zauważyć, że, z racji symetrii funkcje koenergii rozproszeń dla poszczególnych prądów są takie same, lecz zależą od ich prądów. Z topologii klatki wynika (rys. 1), że prądy prętów klatki i_1, i_2, \dots, i_N są określone przez prądy oczkowe $i_{o,1}, i_{o,2}, \dots, i_{o,N}$



Rys. 1. Topologia obwodów klatki
Fig. 1. Cage circuits

Podsumowując, funkcję koenergii silnika klatkowego można przedstawić w postaci:

$$E_{k_0} = E_g(i_{\mu}) + E_{\sigma,s} + E_{\sigma,w} = E_g(i_{\mu}) + \sum_{k=1}^3 E_{\sigma}^s(i_{s,k}) + \sum_{n=1}^N E_{\sigma}^w(i_n) + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} L_{\sigma}^{\text{seg}}(i_{o,n})^2. \quad (8)$$

Umożliwia ona utworzenie równań silnika klatkowego, które uwzględnią zarówno nieliniowość głównego obwodu magnetycznego, jak i nieliniowości obwodów strumieni rozproszeń.

3. RÓWNANIA SILNIKA KLATKOWEGO UWZGLĘDNIAJĄCE NIELINIOWOŚĆ OBWODU MAGNETYCZNEGO

Napisanie równań silnika klatkowego wymaga jedynie wykonania operacji matematycznych na funkcji koenergii (8), wynikających ze zmodyfikowanych równań Lagrange'a (5a,b). Szczególną uwagę trzeba jednak zachować przy zapisywaniu równań wirnika, gdyż należy zarówno mieć na uwadze zależność określającą zastępczy prąd magnesujący (6), jak również związki pomiędzy prądami prętów a prądami oczkowymi (7).

Równania faz stojana przyjmują postać:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_g(i_{\mu})}{\partial i_{\mu}} \cdot \frac{\partial i_{\mu}}{\partial i_{s,k}} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\sigma}^s(i_{s,k})}{\partial i_{s,k}} \right) = u_{s,k} - R_s i_{s,k} \quad ; \quad \text{dla } k=1,2,3, \quad (9a)$$

natomiast w równaniach oczek wirnika pojawi się kilka członów reprezentujących poszczególne składniki strumienia rozproszenia oczka

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_g(i_{\mu})}{\partial i_{\mu}} \cdot \frac{\partial i_{\mu}}{\partial i_{o,n}} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\sigma}^w(i_{n-1})}{\partial i_{n-1}} \cdot \frac{\partial i_{n-1}}{\partial i_{o,n}} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\sigma}^w(i_n)}{\partial i_n} \cdot \frac{\partial i_n}{\partial i_{o,n}} \right) + 2L_{\sigma}^{\text{seg}} \frac{di_{o,n}}{dt} =$$

$$= -\left(-R_{pr} i_{o,n-1} + 2(R_{seg} + R_{pr})i_{o,n} - R_{pr} i_{o,n+1}\right) \quad ; \quad \text{dla } n=1,2,\dots,N. \quad (9b)$$

Równanie mechaniczne (5b) upraszcza się do postaci:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \left(\frac{\partial E_g(i_\mu)}{\partial i_\mu} \cdot \frac{\partial i_\mu}{\partial \varphi} \right) + T_m. \quad (9c)$$

W tych równaniach występują trzy nieliniowe funkcje:

$$\frac{\partial E_g(i_\mu)}{\partial i_\mu} = \psi_\mu(i_\mu) \quad ; \quad \frac{\partial E_\sigma^s(i_{s,k})}{\partial i_{s,k}} = \psi_\sigma^s(i_{s,k}) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial E_\sigma^w(i_n)}{\partial i_n} = \psi_\sigma^w(i_n),$$

reprezentujące nieliniowości, odpowiednio głównego obwodu magnetycznego, obwodu strumienia rozproszenia fazy stojana oraz obwodu strumienia rozproszenia pręta klatki wirnika. Natomiast pochodne cząstkowe $\frac{\partial i_\mu}{\partial i_{s,k}}$, $\frac{\partial i_\mu}{\partial i_{o,n}}$ oraz $\frac{\partial i_\mu}{\partial \varphi}$ można wyliczyć z wyrażenia (4) definiującego

zastępczy prąd magnesujący silnika klatkowego, a pochodne $\frac{\partial i_{n-1}}{\partial i_{o,n}}$ oraz $\frac{\partial i_{n-1}}{\partial i_n}$ ze związków (7).

Po wykonaniu operacji matematycznych, zapisanych w równaniach Lagrange'a (9a,b,c), równania silnika klatkowego można przedstawić w następującej formie macierzowej:

$$\frac{d}{dt} \left(\Lambda(i_\mu) \begin{bmatrix} (v_s)^2 A_{ss} & (v_s v_w) A_{sw} \\ (v_s v_w) (A_{sw})^T & (v_w)^2 A_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_w \end{bmatrix} \right) + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{\sigma,s} \\ \Psi_{\sigma,w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_s \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10a)$$

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \left((v_s v_w) \Lambda(i_\mu) (i_s)^T \frac{\partial A_{sw}}{\partial \varphi} i_w \right) + T_m. \quad (10b)$$

W tych równaniach wprowadzono dodatkowo oznaczenia

$$u_s = \begin{bmatrix} u_{s,1} \\ u_{s,2} \\ u_{s,3} \end{bmatrix}, \quad R_s = \begin{bmatrix} R_s & & \\ & R_s & \\ & & R_s \end{bmatrix}; \quad \Psi_{\sigma,s} = \begin{bmatrix} \psi_\sigma^s(i_{s,1}) \\ \psi_\sigma^s(i_{s,2}) \\ \psi_\sigma^s(i_{s,3}) \end{bmatrix},$$

$$R_w = \begin{bmatrix} 2(R_{seg} + R_{pr}) & -R_{pr} & & & & -R_{pr} \\ -R_{pr} & 2(R_{seg} + R_{pr}) & -R_{pr} & & & \\ & -R_{pr} & 2(R_{seg} + R_{pr}) & -R_{pr} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ -R_{pr} & & & & -R_{pr} & 2(R_{seg} + R_{pr}) \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{\sigma,s} = \begin{bmatrix} 2L_{\sigma^{seg}} i_{o,1} - \psi_\sigma^w(i_{o,N} - i_{o,1}) + \psi_\sigma^w(i_{o,1} - i_{o,2}) \\ 2L_{\sigma^{seg}} i_{o,2} - \psi_\sigma^w(i_{o,1} - i_{o,2}) + \psi_\sigma^w(i_{o,2} - i_{o,3}) \\ 2L_{\sigma^{seg}} i_{o,3} - \psi_\sigma^w(i_{o,2} - i_{o,1}) + \psi_\sigma^w(i_{o,3} - i_{o,4}) \\ \vdots \\ 2L_{\sigma^{seg}} i_{o,N} - \psi_\sigma^w(i_{o,N-1} - i_{o,N}) + \psi_\sigma^w(i_{o,N} - i_{o,1}) \end{bmatrix}.$$

Nieliniową funkcję $\psi_\mu(i_\mu)$ zastąpiono w nich przez funkcję

$$\Lambda(i_\mu) = \frac{\psi_\mu(i_\mu)}{i_\mu} = \frac{\partial E_g(i_\mu)}{\partial i_\mu}, \quad (11)$$

którą należy interpretować jako nieliniową przewodność magnetyczną dla strumienia głównego.

Równania (10) są na tyle oczywiste, że nie wymagają specjalnego komentarza. Należy jednak zwrócić uwagę na dość zasadnicze trudności ich rozwiązywania za sprawą nieliniowego charakteru obwodów magnetycznych rozproszeń. Gdy pominię się zjawisko nasycania się tych obwodów, można wprowadzić odpowiednie indukcyjności rozproszeń i jedyną nieliniową funkcją w równaniach (10) będzie funkcja nieliniowej przewodności dla strumienia głównego $\Lambda(i_{\mu})$. W równaniach (10)

występuje ona jednak przed macierzą określającą sprzężenia uzwojeń silnika. Macierz ta ma jednak układ elementów taki sam jak macierz indukcyjności własnych i wzajemnych przy założeniu liniowości głównego obwodu magnetycznego. Poprzez zmianę współrzędnych może doprowadzić do uproszczenia struktury tej macierzy, analogicznie do przypadków liniowego obwodu magnetycznego. Dodatkowo, należy jedynie wyrazić zastępczy prąd magnesujący przez nowe współrzędne. Skuteczność takich operacji pokazano, między innymi, w pracach [7], [8], [9]. Gdy jednak uwzględnimy się nieliniowy charakter obwodów rozproszeń, wówczas technika transformowania prądów i napięć nie daje żadnych ułatwień, lecz wręcz komplikuje opis matematyczny.

Pozostaje jedynie rozwiązywać układ równań (10) dla współrzędnych naturalnych, tj. poszukując bezpośrednio prądów faz stojana i oczek klatki. Nie jest to jednak całkiem proste, gdyż, sprowadzenie równań (10) do tzw. postaci normalnej, tj. do układu równań rzędu pierwszego z pochodnymi po jednej stronie, napotyka na zasadnicze trudności za sprawą strumieni rozproszeń prętów klatki. Nasycanie się zębów wirnika pod wpływem prądów w prętach klatki jest jednym z głównych efektów w silnikach klatkowych i powinien on być uwzględniany w modelu silnika na równi z nasycaniem się głównego obwodu magnetycznego.

4. WNIOSKI

Rozważania zawarte w pracy doprowadziły do zapisania równań modelu matematycznego silników klatkowych, które pozwalają na uwzględnianie nasycania się zarówno głównego obwodu magnetycznego, jak i obwodów magnetycznych strumieni rozproszeń. Dyskusja struktury równań modelu wykazała, że powszechnie stosowane transformacje napięć i prądów są tym przypadku całkowicie nieprzydatne, gdyż komplikują jedynie opis matematyczny. Równania muszą więc być rozwiązywane ze względu na naturalne prądy uzwojeń silnika, a zastępczy prąd magnesujący jest przy tym wielkością bardzo pomocną.

LITERATURA

1. Vas P.; Generalized analysis of saturated AC machines, Archiv fur Elektrotechnik, Vol.63, 1981, pp.(57-62).
2. Brown J.E., Kovacs K.P., Vas P.; A method of including the effects of main flux saturation in the generalized equations of AC machines, IEEE Trans. on PAS, Vol.103, 1982, pp.(96-103).
3. Nehl T.W., Fouad F.A., Demerdash N.A.; Determination of saturated values of rotating machinery incremental and apparent inductances by an energy perturbation method, IEEE Trans. on PAS, Vol. PAS-101, No.12, 1982, pp.(4441-4451).
4. Vas P., Hallenius K.E., Brown J.E.; Cross-saturation in smooth air-gap electrical machines, IEEE Trans. on Energy Conversion, Vol.1, No.1,1986.
5. Boldea I., Nasar S.A.; Unified treatment of core losses and saturation in the orthogonal-axis model of electrical machines, IEE Proc., B, Vol.134, 1987, pp.(355-363).
6. Sobczyk T.J.: An energy-based approach to modelling the magnetic non-linearity in ac machines, Proceedings of International Conference on Electrical Machines, Vol.3, Vigo, 1996, pp.68-73.
7. Sobczyk T.J.: An analytical expression for the total magnetising current and its application to creating AC machine equations, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Elektryka Nr 91, 1998, str. 157-161.
8. Sobczyk T.J.: An Energy-Based Approach to Modelling the Magnetic Non-Linearity in AC Machines, Part II - General equations of AC machines accounting for saturation due to the main

- MMF harmonic, Archives of Electrical Engineering, Vol. 48, PWN, Warszawa, 1999, Bull. 3, pp. 279-294.
9. Sobczyk T.J.: Równania maszyn prądu przemiennego z nasyconym obwodem magnetycznym, Energetyka, Izwiestija Akademii Nauk, Rosyjska Akademia Nauk, Moskwa, 2000, No.1, pp.19-30, (po rosyjsku).
 10. Sobczyk T.J.: Modelling magnetic circuit non-linearity of AC machines using equivalent magnetic currents, Materiały Konferencji: Electromagnetic Phenomena in Non-Linear Circuits, Kraków, 2000, pp. 1-6.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Krystyn Pawluk

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 lutego 2001 r.

Abstract

In the paper a mathematical model of induction cage motors accounting for both saturation of the main magnetic and saturation of leakage zones is presented. Because the level of saturation of the main magnetic circuit depends on all currents, the equivalent magnetising current has been introduced as a substitution variable of the coenergy function of this circuit. The equivalent magnetising current is a positive value proportional to the amplitude of the total MMF of all machine windings, and its square is given* by the quadratic form

$$(i_{\mu})^2 = \begin{bmatrix} i_s^T & i_w^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (v_s)^2 A_{ss} & (v_s v_w) A_{sw} \\ (v_s v_w) (A_{ws})^T & (v_w)^2 A_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_w \end{bmatrix}$$

in which i_s and i_w are vectors of stator phase currents and cage meshes, respectively. Matrices A_{ss} , A_{ww} and A_{sw} depend on winding angular positions on machine circumference. It has been assumed that leakage zones are saturated by individual currents of stator phases and rotor bars.

To create such a model the Lagrange formalism was applied, which required the coenergy function to be used. In the paper the coenergy function is divided into two parts, the coenergy function of the main magnetic circuit depending on the equivalent magnetising current and the coenergy of leakage zones depending on individual currents. Then, the coenergy function takes the form

$$E_{ko} = E_g(i_{\mu}) + E_{\sigma,s} + E_{\sigma,w} = E_g(i_{\mu}) + \sum_{k=1}^3 E_{\sigma}^s(i_{s,k}) + \sum_{n=1}^N E_{\sigma}^w(i_n) + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} L_{\sigma}^{sg}(i_{o,n})^2.$$

The modified Lagrange equations

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_g}{\partial i_{\mu,p}} \frac{\partial i_{\mu,p}}{\partial i_m} + \frac{\partial E_g}{\partial (p\alpha)} \frac{\partial (p\alpha)}{\partial i_m} \right) + \frac{d}{dt} \frac{\partial E_{\sigma,m}}{\partial i_m} = u_m - R_m i_m \quad ; \quad \text{for } m=1, \dots, M$$

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \left(\frac{\partial E_g}{\partial i_{\mu,p}} \frac{\partial i_{\mu,p}}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_g}{\partial (p\alpha)} \frac{\partial (p\alpha)}{\partial \varphi} \right) + T_m$$

lead to the final form of equations for induction cage motors

$$\frac{d}{dt} \left(\Lambda(i_\mu) \begin{bmatrix} (v_s)^2 A_{ss} & (v_s v_w) A_{sw} \\ (v_s v_w) A_{sw}^T & (v_w)^2 A_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_w \end{bmatrix} \right) + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{\sigma,s} \\ \Psi_{\sigma,w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_s \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \left((v_s v_w) \Lambda(i_\mu) (i_s)^T \frac{\partial A_{sw}}{\partial \varphi} i_w \right) + T_m.$$

The resulting mathematical model makes it possible to predict effects due to saturation that are unpredictable by circuital models of induction motors being in use at present.