ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2002
Seria: ELEKTRYKA z.182 Nr kol. 1551

Bernard BARON, Zygmunt PIĄTEK, Joanna KOLAŃSKA

POLE MAGNETYCZNE NAPOWIETRZNEJ LINII PRZESYŁOWEJ DWUPRZEWODOWEJ

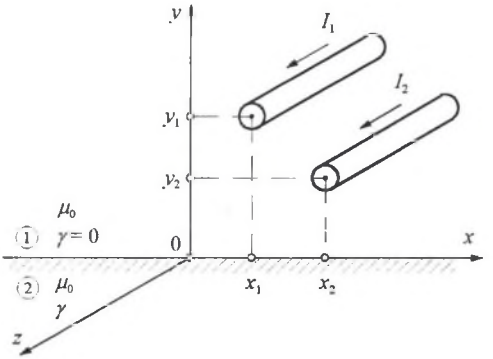
Streszczenie. Dla obwodów ziemnopowrotnych napowietrznej linii dwuprzewodowej wprowadzono wektorowy potencjał magnetyczny. Po przekształceniu wyraz po wyrazie w równaniach różniczkowych dla potencjału magnetycznego i przekształceniu warunków brzegowych za pomocą transformacji Fouriera otrzymuje się potencjał magnetyczny w powietrzu oraz w ziemi w postaci wzorów analitycznych. Potencjały te wyrażone są prze całki niewłaściwe. Po odpowiednich podstawieniach całki te sprowadza się do transformat Laplace'a. Ostatecznie otrzymuje się wzory analityczne opisujące pole magnetyczne w otoczeniu dwuprzewodowej napowietrznej linii przesyłowej. Do wizualizacji rozkładu pola magnetycznego opracowano projekt w Delphi.

MAGNETIC FIELD OF AN OVERHEAD DOUBLE WIRE TRANSMISSION LINE

Summary. For a circuit with ground return consisting of a long rectilinear overhead conductor the vector magnetic potential is introduced. Transformation of differential equations describing the magnetic potential by means of Fourrier transformation yields the vector potential in the form of analytical formula. The magnetic field strength represented by improper integrals is determined. Appropriate representation of those calculations reduces them to calculation of Laplace transformation, thus yielding analytical formulae describing the magnetic field in the circuit with ground return. Finally, a computer simulation in Delphi of the discussed question is presented.

1. WSTĘP

Analizowany układ składa się z dwóch bardzo długich równoległych przewodów prostoliniowych umieszczonych nad powierzchnią ziemi – rys.1.



Rys. 1. Dwuprzewodowa napowietrzna linia przesyłowa
Fig. 1. Double wire overhead transmission line

Prądy I_1 i I_2 w przewodach wracają przez ziemię do źródła. Układ tego rodzaju nazywa się obwodem ziemnopowrotnym lub pętlą ziemnopowrotną.

Zakłada się, że przewody są bardzo cienkie i są równoległe do powierzchni ziemi. Zakłada się ponadto, że grunt jest środowiskiem jednorodnym o przenikalności magnetycznej μ_0 i o stałej konduktywności γ oraz przyjmuje się, że powierzchnia ziemi jest płaszczyzną.

Jeśli pominie się zjawiska występujące w końcach układu, to pole elektromagnetyczne w analizowanym układzie jest dwuwymiarowe i ma taką samą postać w każdej płaszczyźnie prostopadłej do osi przewodu, tzn. jest funkcją dwóch zmiennych x oraz y.

2. POTENCJAŁ WEKTOROWY

W układzie przedstawionym na rys.1 magnetyczny potencjał wektorowy jest równoległy do osi przewodu, czyli $A(x, y) = \underline{1}_z A(x, y)$. W pracy [6] M. Krakowski podaje równanie Poissona (wzór (11.83), str. 257) w obszarze „1" nad ziemią oraz równanie Helmholtza (wzór (11.84), str. 258) w obszarze „2", czyli w ziemi. Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na rys.1, w szczególności po wprowadzeniu odległości x_k, równania te mają postać:

$$\frac{\partial^2 A^{(1)}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A^{(1)}(x,y)}{\partial y^2} = -\mu_0 \sum_{k=1}^{2} I_k \delta(x - x_k)\,\delta(y - y_k), \tag{1}$$

oraz

$$\frac{\partial^2 A^{(2)}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A^{(2)}(x,y)}{\partial y^2} = \beta^2 A^{(2)}(x,y), \tag{2}$$

gdzie $\delta(x - x_k)$ i $\delta(y - y_k)$ są funkcjami impulsowymi Diraca, natomiast

$$\beta^2 = \mathrm{j}\varpi\mu_0\gamma. \tag{2a}$$

Po przekształceniu wyraz po wyrazie w równaniach (1) i (2) za pomocą transformacji Fouriera względem zmiennej x oraz po sformułowaniu i przekształceniu warunków brzegowych i ostatecznie po wyznaczeniu odwrotnej transformaty Fouriera w sposób podany w pracy [6] (str.258-260) otrzymuje się potencjał wektorowy w obszarze „1" (wzór podobny do wzoru (11.59) z pracy [6] – str. 260).

$$A^{(1)}(x,y)=\frac{\mu_0}{\pi}\sum_{k=1}^{2}I_k Q_1+\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{k=1}^{2}I_k \ln\frac{(x-x_k)^2+(y+y_k)^2}{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}, \tag{3}$$

gdzie funkcja Q_1 określona jest wzorem

$$Q_1=\int_0^\infty \frac{e^{-\varpi(y+y_k)}\cos[\varpi(x-x_k)]}{\varpi+\sqrt{\varpi^2+\beta^2}}\,d\varpi\,. \tag{3a}$$

Po podstawieniu:

$$\left.\begin{aligned}&\varpi=\alpha u,\\&d\varpi=\alpha\,du,\\&\alpha=\sqrt{\varpi\,\mu_0\,\gamma},\\&\beta=\sqrt{j}\,\alpha\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

oraz

$$\left.\begin{aligned}&p=\alpha(y+y_k),\\&q=\alpha(x-x_k)\end{aligned}\right\}, \tag{4a}$$

funkcję Q_1 przedstawia się wzorem

$$Q_1(p,q)=\int_0^\infty \frac{e^{-pu}\cos qu}{u+\sqrt{u^2+j}}\,du\,. \tag{5}$$

3. POLE MAGNETYCZNE

Pole magnetyczne w obszarze „1" (nad ziemią) oblicza się ze wzoru [3]

$$\boldsymbol{H}^{(1)}(x,y)=\frac{1}{\mu_0}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}^{(1)}(x,y)=\mathbf{1}_x H_x^{(1)}(x,y)+\mathbf{1}_y H_y^{(1)}(x,y)\,, \tag{6}$$

gdzie składowe natężenia pola magnetycznego

$$\begin{aligned}H_x^{(1)}(x,y)&=\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A^{(1)}(x,y)}{\partial x}=\frac{\alpha}{\pi}\sum_{k=1}^{2}I_k\,dQ_{1p}[\alpha(y+y_k),\alpha(x-x_k)]+\\&+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{2}I_k\left[\frac{x-x_k}{(x-x_k)^2+(y+y_k)^2}-\frac{x-x_k}{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}\right]\end{aligned} \tag{6a}$$

oraz

$$\begin{aligned}H_y^{(1)}(x,y)&=-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A^{(1)}(x,y)}{\partial x}=\frac{\alpha}{\pi}\sum_{k=1}^{2}I_k\,dQ_{1q}[\alpha(y+y_k),\alpha(x-x_k)]-\\&-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{2}I_k\left[\frac{y+y_k}{(x-x_k)^2+(y+y_k)^2}-\frac{y-y_k}{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}\right],\end{aligned} \tag{6b}$$

We wzorze (6a) pochodna funkcji Q_1 względem zmiennej p

$$dQ_{1p}(p,q)=\frac{\partial Q_1(p,q)}{\partial p}=-\int_0^\infty \frac{u e^{-pu}\cos qu}{u+\sqrt{u^2+j}}\,du\,, \tag{6c}$$

zaś we wzorze (6b) pochodna funkcji Q_1 względem zmiennej q

$$\mathrm{d}Q_{1q}(p,q) = \frac{\partial Q_1(p,q)}{\partial q} = -\int_0^\infty \frac{u\mathrm{e}^{-pu}\sin qu}{u+\sqrt{u^2+\mathrm{j}}}\,\mathrm{d}u\,. \tag{6d}$$

Podstawiając we wzorach (6c) i (6d) za

$$\left.\begin{aligned} \sin qu &= \frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}qu} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}qu}) \\ \cos qu &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}qu} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}qu}) \\ \frac{-u}{u+\sqrt{u^2+\mathrm{j}}} &= \mathrm{j}(u\sqrt{u^2+\mathrm{j}} - u^2) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

otrzymuje się odpowiednio:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Q_{1q}(p,q) = \frac{1}{2}\Bigg\{ &\int_0^\infty (u\sqrt{u^2+j} - u^2)\,\mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}u\Bigg|_{s=p-jq} - \\ &- \int_0^\infty (u\sqrt{u^2+j} - u^2)\,\mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}u\Bigg|_{s=p+jq}\Bigg\}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Q_{1q}(p,q) = \frac{1}{2}j\Bigg\{ &\int_0^\infty (u\sqrt{u^2+j} - u^2)\,\mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}u\Bigg|_{s=p-jq} + \\ &+ \int_0^\infty (u\sqrt{u^2+j} - u^2)\,\mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}u\Bigg|_{s=p+jq}\Bigg\}, \end{aligned} \tag{9}$$

Dla $\mathcal{R}_e\{s\} = p > 0$ całka we wzorach (8) i (9) jest transformatą Laplace'a funkcji podcałkowej, tzn.

$$\int_0^\infty (u\sqrt{u^2+\mathrm{j}} - u^2)\,\mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}u = \mathcal{L}\left\{u\sqrt{u^2+\mathrm{j}} - u^2\right\} = \mathcal{L}\left\{u\sqrt{u^2+\mathrm{j}}\right\} - \mathcal{L}\left\{u^2\right\}. \tag{10}$$

Transformata

$$\mathcal{L}\left\{u^2\right\} = \frac{2}{s^3}, \tag{10a}$$

zaś transformata (Mathematica 3.0)

$$\mathcal{L}\left\{u\sqrt{u^2+\mathrm{j}}\right\}=\frac{\mathrm{j}\left[\sqrt{\mathrm{j}}\,s-2\mathcal{J}_1(\sqrt{\mathrm{j}}\,s)\right]}{2\sqrt{\mathrm{j}}\,s^2}-\frac{-2+2\mathcal{J}_0(\sqrt{\mathrm{j}}\,s)+\sqrt{\mathrm{j}}\,s\,\mathcal{J}_1(\sqrt{\mathrm{j}}\,s)}{s^3}+$$

$$+\frac{1}{12s^3}\{24+6\mathrm{j}\,s^2+3\pi\,s^2\,\mathcal{J}_2\left[(-1)^{\frac{1}{4}}\,s\right]-4(-1)^{\frac{3}{4}}\,s^3\,\mathrm{F}\left(1,\frac{1}{2};\frac{5}{2};-\frac{\mathrm{j}\,s^2}{4}\right)+$$

$$+6\mathrm{j}\,s^2\,\mathcal{J}_2\left[(-1)^{\frac{1}{4}}\,s\right]\ln 4-12\mathrm{j}\,s^2\,\mathcal{J}_2\left[(-1)^{\frac{1}{4}}\,s\right]\ln s\}-\frac{1}{16}\,s\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{j})^n\,2^{2-2n}\,s^{2n}\,\psi(1+n)}{\Gamma(1+n)\,\Gamma(3+n)}; \tag{10b}$$

gdzie:

$\mathrm{J}_0(\sqrt{\mathrm{j}}\,s)$, $\mathrm{J}_1(\sqrt{\mathrm{j}}\,s)$ i $\mathrm{J}_2\left[(-1)^{\frac{1}{4}}\,s\right]$ są funkcjami Bessela pierwszego rodzaju, odpowiednio zerowego, pierwszego i drugiego rzędu,

$\mathrm{F}\left(1,\frac{1}{2};\frac{5}{2};-\frac{\mathrm{j}s^2}{4}\right)$ jest funkcją hipergeometryczną,

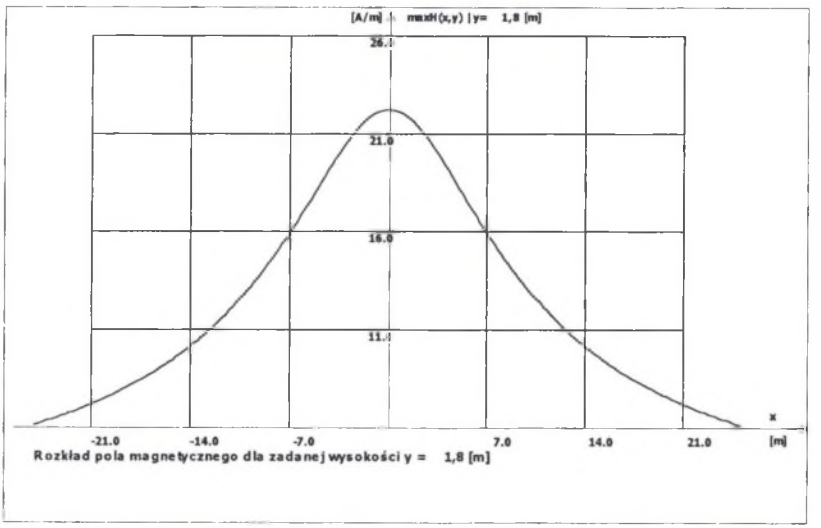
$\psi(1+n)$ jest funkcją psi Eulera,

$\Gamma(1+n)$ i $\Gamma(3+n)$ są funkcjami gamma Eulera.

W ten sposób składowe natężenia pola magnetycznego zostały wyrażone poprzez wzory analityczne, co umożliwia obliczenie wektora $\boldsymbol{H}^{(1)}(x,y)$ w dowolnym punkcie obszaru „1" nad powierzchnią ziemi.

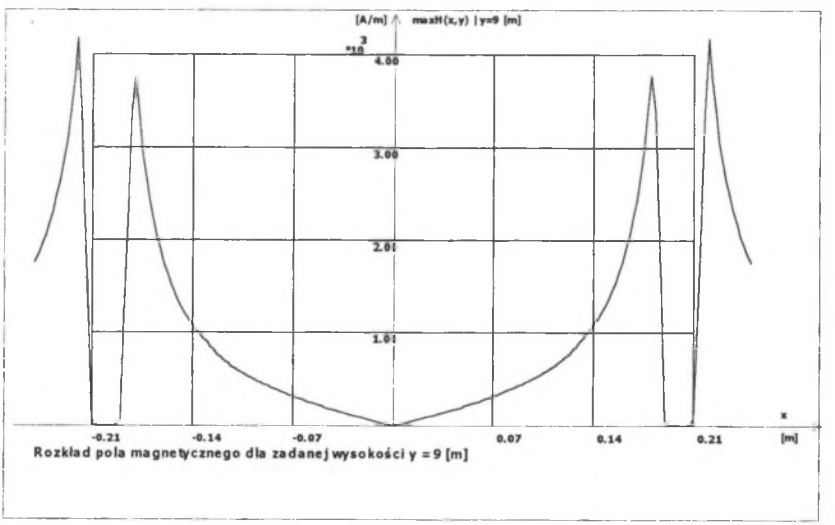
4. ZAKOŃCZENIE

Do wyznaczania pola magnetycznego przewodu nad ziemią opracowano projekt w Delphi. Do obliczeń wybrano przewody dwuwarstwowe AFL-20-840 umieszczone na wysokościach $y_1 = y_2 = 9$ m, zaś odległość między nimi jest równa $d = x_2 - x_1 = 0{,}4$ m ($x_1 = 0{,}2$ m, $x_2 = -\ 0{,}2$ m). Na rysunkach 3, 4, 5 przedstawiono rozkłady natężeń pól magnetycznych wzdłuż wybranych prostych w układzie linia dwuprzewodowa o przewodach dwuwarstwowych – ziemia.



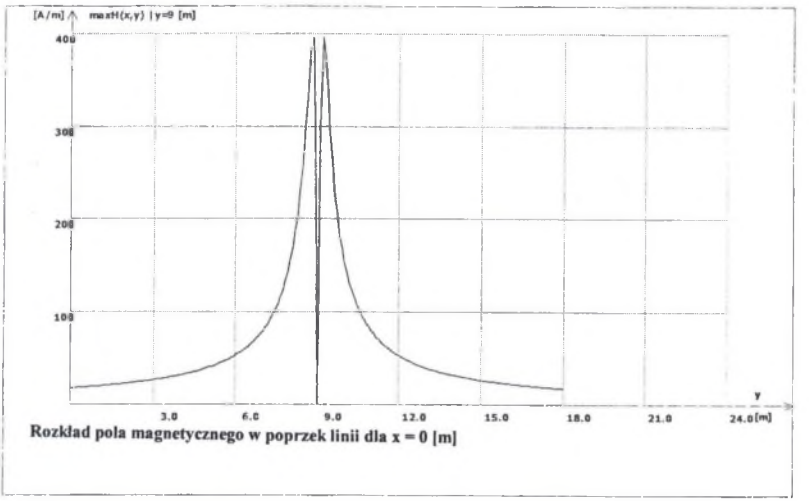
Rys. 2. Rozkład pola magnetycznego wzdłuż prostej $y = 1{,}8$ m; $y_1 = y_2 = 9$ m, $d = x_2 - x_1 = 0{,}4$ m, $x_1 = 0{,}2$ m, $x_2 = -0{,}2$ m, $I_1 = I_2 = 1$ kA

Fig. 2. Distribution of the magnetic field along the straight line $y = 1{,}8$ m; $y_1 = y_2 = 9$ m, $d = x_2 - x_1 = 0{,}4$ m, $x_1 = 0{,}2$ m, $x_2 = -0{,}2$ m, $I_1 = I_2 = 1$ kA



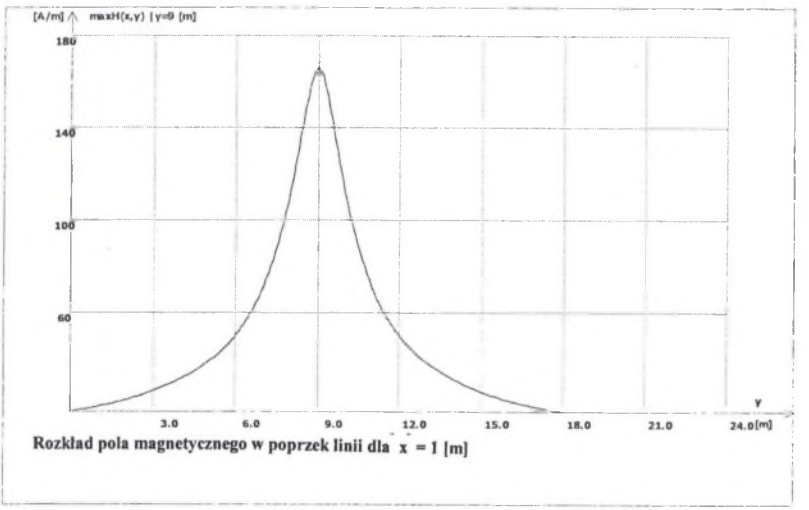
Rys. 3. Rozkład pola magnetycznego wzdłuż prostej $y = 9$ m, tzn. przechodzącej przez środki przewodów dwuwarstwowych; $y_1 = y_2 = 9$ m, $d = x_2 - x_1 = 0{,}4$ m, $x_1 = 0{,}2$ m, $x_2 = -0{,}2$ m, $I_1 = I_2 = 1$ kA

Fig. 3. Distribution of the magnetic field along the straight line $y = 9$ m, i.e. the one passing through the centres of the two-layer conductors; $y_1 = y_2 = 9$ m, $d = x_2 - x_1 = 0{,}4$ m, $x_1 = 0{,}2$ m, $x_2 = -0{,}2$ m, $I_1 = I_2 = 1$ kA



Rys. 4. Rozkład pola magnetycznego wzdłuż prostej $x = 0$; $y_1 = y_2 = 9$ m, $d = x_2 - x_1 = 0{,}4$ m, $x_1 = 0{,}2$ m, $x_2 = -0{,}2$ m, $I_1 = I_2 = 1$ kA

Fig. 4. Distribution of the magnetic field along the straight line $x = 0$; $y_1 = y_2 = 9$ m, $d = x_2 - x_1 = 0{,}4$ m, $x_1 = 0{,}2$ m, $x_2 = -0{,}2$ m, $I_1 = I_2 = 1$ kA



Rys. 5. Rozkład pola magnetycznego wzdłuż prostej $x = 1$ m; $y_1 = y_2 = 9$ m, $d = x_2 - x_1 = 0{,}4$ m, $x_1 = 0{,}2$ m, $x_2 = -0{,}2$ m, $I_1 = I_2 = 1$ kA

Fig. 5. Distribution of the magnetic field along the straight line $x = 1$ m; $y_1 = y_2 = 9$ m, $d = x_2 - x_1 = 0{,}4$ m, $x_1 = 0{,}2$ m, $x_2 = -0{,}2$ m, $I_1 = I_2 = 1$ kA

LITERATURA

1. Baron B., Marcol A., Pawlikowski S.: *Metody numeryczne w Delphi 4*. Helion, Gliwice 1999.
2. Baron B., Piątek Z., Kolańska J., Kaleta K.: *Magnetic field of an overhead conductor*. XXIV SPETO'2001, Gliwice – Ustroń 2001, pp. 121-124.
3. Dědek L., Dědkowa J.: *Elektromagnetismus*. VUTIUM, Brno 1998.
4. Kowalczyk D.: *Mathematica*. Wyd. Lynx-SFT (in Polish), Warszawa 1997.
5. Krakowski M.: *Obwody ziemnopowrotne*. WNT, Warszawa 1979.
6. Krakowski M.: *Elektrotechnika teoretyczna. Tom 2. Pole elektromagnetyczne*. PWN, Warszawa 1995.

Wpłynęło do Redakcji dnia 5 stycznia 2002 r.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Ryszard Nawrowski

Abstract

For a double wire overhead transmission line the vector magnetic potential is defined by a system of equations (1) and (2), with the solution for air in the form of formula (3). That enables the determination of the magnetic field (6) whose components are given by the equations (6a) and (6b). Derivatives of the function $\mathrm{d}\underline{Q}_{1p}(p,q)$ appearing in the formula (6c) and of the function $\mathrm{d}\underline{Q}_{1q}(p,q)$ in the relationship (6d), after the appropriate representation of the calculation, are presented as Laplace transforms (10), (10a) and (10b). Thus the components of the magnetic field strength are presented in the form of analytical formulae, which enables calculation of the vector H.. at any point of the area above the ground- Figs. 2, 3 and 4.