ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2002
Seria: ELEKTRYKA z.182 Nr kol. 1551

Bernard BARON, Zygmunt PIĄTEK

METODY NUMERYCZNE ANALIZY DYFUZJI PODŁUŻNEGO POLA MAGNETYCZNEGO O CHARAKTERZE SINUSOIDY TŁUMIONEJ W WALCU PRZEWODZĄCYM

Streszczenie. W pracy wyznaczono nieustalone pole elektromagnetyczne w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej poprzez sprowadzenie równania dyfuzji do układu równań różniczkowych zwyczajnych. Do numerycznego rozwiązania powyższego układu równań zastosowano algorytm rekurencyjny oraz metodę Fehlberga. Pozwoliło to na wyznaczenie rozkładu przestrzenno-czasowego natężenia pola magnetycznego w walcu przewodzącym, a w szczególności przebiegów czasowych tego pola w różnych punktach walca.

NUMERICAL METHODS FOR ANALYSIS OF DIFFUSION OF LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD IN THE FORM OF A DAMPED SINUSOID INSIDE A CONDUCTING CYLINDER

Summary. In the paper we determine the transient electromagnetic field in a conducting cylinder placed in external magnetic field having the form of an damped sinusoid by means of reducing the diffusion equations to a system of ordinary differential equations. To perform the numerical calculations in order to solve the system of equations we use a recurrent algorithm along with Fehlberg method. That enables us to determine the space-time distribution of the magnetic field in the conducting cylinder, and in particular, the time curves of that field at different points inside the cylinder.

1. WSTĘP

W przypadku kształtowania walca przewodzącego impulsowym polem magnetycznym pole to ma charakter sinusoidy tłumionej, jest polem zewnętrznym w stosunku do walca, oraz ma jedną składową wzdłuż osi z (rys.1).

Zewnętrzne natężenia pola określa się następującym wzorem [2], [5], [10]:

$$\boldsymbol{H}^{zew}(t) = \mathbf{1}_z H_z^{zew}(t), \tag{1}$$

w którym składowa natężenia pola magnetycznego wzdłuż osi z

$$H_z^{zew}(t) = H_0\, e^{-\eta t} \sin(\varpi\, t + \xi)\, \mathbf{1}(t), \tag{1a}$$

gdzie: H_0 - amplituda pola magnetycznego w $A \cdot m^{-1}$,

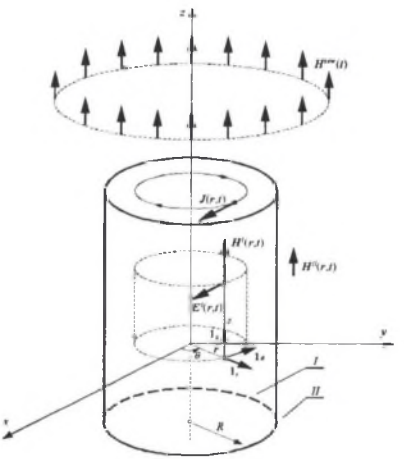
ω - pulsacja drgań własnych układu kształtowany element – głowica robocza – bateria kondensatorów w $rad \cdot s^{-1}$,

η - współczynnik tłumienia pola magnetycznego w s^{-1},

ξ - faza początkowa natężenia pola magnetycznego w rad,

$\mathbf{1}(t)$ - skok jednostkowy Heaviside'a.

Typowe, przeciętne wartości wymienionych wielkości występujące przy kształtowaniu metali impulsowym polem magnetycznym wynoszą [4]: $H_0 = 10^7\, A \cdot m^{-1}$, $\eta = 5 \cdot 10^3\, s^{-1}$, $\varpi = \pi \cdot 10^4\, rad \cdot s^{-1}$, $\xi = 0$.



Rys. 1. Walec przewodzący w zewnętrznym podłużnym równomiernym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej

Fig. 1. Conducting cylinder in the external longitudinal uniform magnetic field having the form of a damped sinusoid

W przypadku ogólnym przewodnika o dowolnym kształcie, który został umieszczony w zmiennym polu elektromagnetycznym, muszą powstać prądy, gdyż pole elektryczne całkowite nie może być równe zeru w każdym punkcie przewodnika. Prądy te noszą nazwę prądów Foucaulta [2], [10] i są określone przez wektor gęstości prądu $\boldsymbol{J}(r,t)$. Linie gęstości prądu $\boldsymbol{J}(r,t)$ indukowanego w walcu są okręgami koncentrycznymi o osi Oz – rys.1. Nie wytwarzają one na zewnątrz walca żadnego pola magnetycznego, podobnie jak prąd w nieskończenie długim solenoidzie. Stąd wynika, że w obszarze II ($r \geq R$) nie ma tzw. oddziaływania zwrotnego indukowanych prądów wirowych i wtedy całkowite pole magnetyczne w rozważanym obszarze

$$\boldsymbol{H}^{II}(t) = \mathbf{1}_z H_z^{II}(t) = \boldsymbol{H}^{zew}(t) = \mathbf{1}_z H_z^{zew}(t). \tag{2}$$

Poszukiwane natężenia pola magnetycznego $H_z^I(r,t)$ w obszarze I ($0 \le r \le R$) jest funkcją zmiennych r oraz t i spełniają skalarne równanie dyfuzji we współrzędnych walcowych

$$\frac{\partial^2 H_z^I(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z^I(r,t)}{\partial r} - \mu\gamma\frac{\partial H_z^I(r,t)}{\partial t} = 0. \tag{3}$$

Rozwiązanie równania (3) powinno spełniać warunek początkowy

$$H_z^I(r,0) = 0, \tag{4}$$

a także, dla $t > 0$, warunek brzegowy pierwszego rodzaju

$$H_z^I(R,t) = H_z^{zew}(t) \tag{4a}$$

oraz warunek brzegowy drugiego rodzaju

$$\left.\frac{\partial H_z^I(r,t)}{\partial r}\right|_{r=0} = 0. \tag{4b}$$

W pracy [10] autorzy sprowadzili zagadnienie walca przewodzącego w zewnętrznym podłużnym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej (1a) do zagadnienia padania fali cylindrycznej na powierzchnię boczną walca (dyfuzji pola magnetycznego przez powierzchnię boczną walca). Wyprowadzone wtedy równanie falowe (3) dla natężenia pola magnetycznego wewnątrz walca rozwiązali stosując przekształcenie całkowe Laplace'a. W pracy [2] autorzy rozwiązali równanie dyfuzji (3) w walcu przewodzącym za pomocą metody rozdzielenia zmiennych Fouriera. W niniejszej pracy przedstawimy rozwiązanie równania dyfuzji w walcu przewodzącym poprzez sprowadzenie tego równania do układu równań różniczkowych zwyczajnych i ich numeryczne rozwiązanie.

2. TRANSFORMACJA RÓWNANIA DYFUZJI DO UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

Do rozwiązania równania cząstkowego (3) można zastosować pewne pomysły dotyczące analizy stabilności rozwiązania i metod opracowanych dla równań różniczkowych zwyczajnych [8]. W tym celu aproksymuje się równanie (3) układem równań różniczkowych zwyczajnych. Dla zmiennej r walcowego układu współrzędnych przyjmuje się krok całkowania $\Delta r = \frac{R}{N}$ i poszukuje się przybliżonych wartości natężenia pola magnetycznego w punktach $r = r_k = k\,\Delta r$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, N$)

$$H_{z,k}^I(t) = H_z^I(r_k,t). \tag{5}$$

W tym celu pierwszą pochodną względem zmiennej r natężenia pola magnetycznego w punkcie r_k aproksymuje się ilorazem różnicowym

$$\left.\frac{\partial H_z^I(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_k} \approx \frac{H_z^I(r_{k+1},t)-H_z^I(r_{k-1},t)}{2\,\Delta r} \tag{6}$$

oraz odpowiednio drugą pochodną

$$\left.\frac{\partial^2 H_z^I(r,t)}{\partial r^2}\right|_{r=r_k} \approx \frac{H_z^I(r_{k+1},t)-2H_z^I(r_k,t)+H_z^I(r_{k-1},t)}{(\Delta r)^2} \tag{6a}$$

Po podstawieniu wzorów (6) i (6a) do równania (3) otrzymuje się dla wszystkich $k = 1, 2,\ldots, N\text{-}1$ i uwzględnieniu wzoru (5) układ N-1 równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{\mathrm{d}H_{z,k}^I(t)}{\mathrm{d}t} = a\,(1-\frac{1}{2k})H_{z,k-1}^I(t) - 2\,a\,H_{z,k}^I + a\,(1+\frac{1}{2k})H_{z,k+1}^I(t), \tag{7}$$

gdzie

$$a = \frac{1}{\mu\,\gamma\,(\Delta r)^2}. \tag{7a}$$

Z warunku brzegowego (4a) i wzoru (1a) dla $\xi = 0$ otrzymuje się równanie

$$H_z^I(R,t) = H_{z,N}^I(t) = H_0\,\mathrm{e}^{-\eta t}\sin\varpi\,t, \tag{8}$$

które dołączone do N-1 równań typu (7) jest w układzie N tak wyprowadzonych równań „członem wymuszającym".

Warunek brzegowy (4b) aproksymuje się równaniem różnicowym

$$\left.\frac{\partial H_z^I(r,t)}{\partial r}\right|_{r=0} \approx \frac{H_z^I(\Delta r,t)-H_z^I(0,t)}{\Delta r} = \frac{H_{z,1}^I(t)-H_{z,0}^I(t)}{\Delta r} = 0, \tag{9}$$

a stąd mamy

$$H_{z,0}^I(t) = H_{z,1}^I(t). \tag{9a}$$

Uwzględniając warunki (8) i (9a) w N-1 równaniach typu (7), otrzymuje się układ N-1 równań (dla $k = N$-1), który w postaci wektorowej ma następującą postać:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_z^I(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{H}_z^I(t) + \boldsymbol{f}(t), \tag{10}$$

w którym wektor poszukiwanych natężeń pola magnetycznego

$$\boldsymbol{H}_z^I(t) = \left[H_{z,1}^I \quad H_{z,2}^I \quad \ldots \quad H_{z,k}^I \quad \ldots \quad H_{z,N-1}^I\right]^T, \tag{10a}$$

oraz macierz współczynników

$$A = a\,[a_{ij}]_{(N-1)\cdot(N-1)} = a\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1-\frac{1}{4} & -2 & 1+\frac{1}{4} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{1}{6} & -2 & 1+\frac{1}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1}{8} & -2 & 1+\frac{1}{8} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\frac{1}{2(N-2)} & -2 & 1+\frac{1}{2(N-2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-\frac{1}{2(N-1)} & -2 \end{bmatrix} \tag{10b}$$

Wektor wymuszeń jest dany w następujący sposób:

$$f(t) = a\,(1+\frac{1}{2(N-1)})\left[0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad H^{I}_{z,N}(t)\right]^{T}. \tag{10c}$$

Jeżeli Δr jest małe, to wtedy układ równań (10) jest tzw. „układem sztywnym". Na mocy twierdzenia Gerschgorina [4] wszystkie wartości własne macierzy kwadratowej A leżą w sumie okręgów

$$|\lambda - a_{ii}| \le r_i, \tag{11}$$

gdzie

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N-1} |a_{ij}|. \tag{11a}$$

Z konstrukcji macierzy A wynika, że wszystkie wartości własne tej macierzy znajdują się w kole o średnicy

$$\left|\lambda + \frac{2}{\mu\,\gamma\,(\Delta r)^2}\right| \le \frac{2}{\mu\,\gamma\,(\Delta r)^2}, \tag{12}$$

mają niedodatnie części rzeczywiste i że jej promień spektralny (największy z modułów wartości własnych) jest mniejszy od $\frac{4}{\mu\,\gamma\,(\Delta r)^2}$. W istocie wszystkie wartości własne są rzeczywiste i ujemne, a jedna z nich jest bliska $-\frac{4}{\mu\,\gamma\,(\Delta r)^2}$.

Forma rozwiązania układu równań różniczkowych liniowych (10) zależy od wartości własnych macierzy [4]. W całkowaniu numerycznym układu (10) istotną rzeczą jest więc dobór kroku całkowania T_0 ($t_i = i\,T_0$) w celu zagwarantowania stabilności numerycznej.

W celu oszacowania kroku całkowania gwarantującego stabilność rozwiązania przyjmuje się krok T_0 równy modułowi odwrotności maksymalnej wartości własnej, czy [1]

$$T_0 = \frac{1}{|\lambda_{\max}|}. \tag{13}$$

W tabeli 1 przedstawiono odwrotności modułu maksymalnych wartości własnych w zależności od kroku Δr dla $R = 20$ mm oraz $\gamma = 5{,}6 \cdot 10^7\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$.

Tabela 1

Zależność kroku całkowania T_0 od kroku Δr

Δr	mm	1,000	0,500	0,333	0,250	0,200	0,167	0,125	0,100
$T_r = \frac{1}{\lvert\lambda_{\max}\rvert}$	μs	18,87	4,620	2,040	1,140	0,733	0,508	0,286	0,183

Największą co do modułu wartość własną $|\lambda_{\max}|$ danej macierzy A wyznaczono na mocy twierdzenia von Misessa według następującego algorytmu [4]

$$|\lambda_{\max}| = \lim_{k \to \infty} \frac{\left\| \boldsymbol{H}_z^{I,(k+1)} \right\|}{\left\| \boldsymbol{H}_z^{I,(k)} \right\|}, \tag{14}$$

gdzie:

$\boldsymbol{H}_z^{I,(k+1)} = \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{H}_z^{I,(k)}$,

$\boldsymbol{H}_z^{I,(0)}$ - niezerowy wektor początkowy,

$\left\| \boldsymbol{H}_z^{I,(k)} \right\| = \max\limits_{1 \le j \le N-1} \left| H_{z,j}^{I,(k)} \right|$ - norma maksimum wektora.

3. ZASTOSOWANIE ALGORYTMU REKURENCYJNEGO

Do numerycznego rozwiązania układu równań różniczkowych liniowych (10) można zastosować równanie różnicowe [1]

$$\boldsymbol{H}_z^I[(k+1)\,T_0] = \exp[\boldsymbol{A}\,T_0]\,\boldsymbol{H}_z^I(k\,T_0) + \exp[\boldsymbol{A}\,(\mathrm{k}+1)\,T_0] \int_{kT_0}^{(k+1)T_0} \exp[-\boldsymbol{A}\,\tau]\,\boldsymbol{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{15}$$

Jeżeli wymuszenie $f(t)$ w równaniu (10) aproksymuje się funkcjami przedziałami liniowymi, to proces różnicowy (15) przyjmuje postać

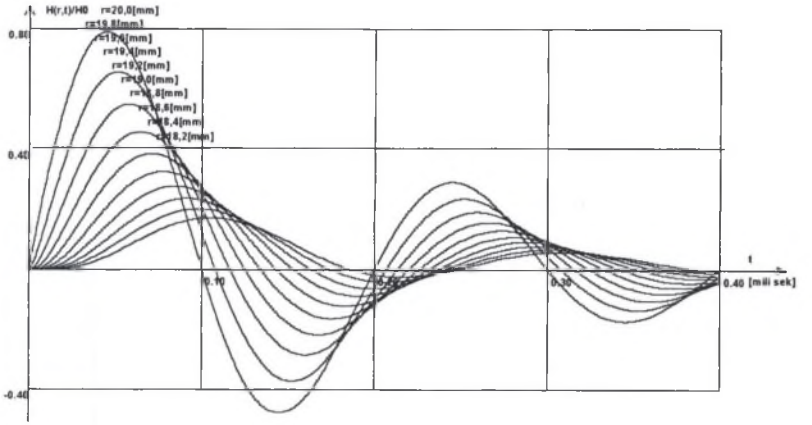
$$\boldsymbol{H}_z^I[(k+1)\,T_0] = \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{H}_z^I(k\,T_0) + \boldsymbol{G}_1\,\boldsymbol{f}(kT_0) + \boldsymbol{H}\,\boldsymbol{f}[(k+1)T_0], \tag{16}$$

gdzie:

$$\boldsymbol{F} = \exp[\boldsymbol{A}\,T_0], \qquad \boldsymbol{G}_1 = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{A}\,T_0)^n}{n!\,(n+2)}, \qquad \boldsymbol{H} = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{A}\,T_0)^n}{(n+2)!}. \tag{17}$$

Według [1] w celu zagwarantowania stabilności numerycznej krok czasowy całkowania T_0 i liczba wyrazów obliczania funkcji $\exp[A\ T_0]$ muszą być tak dobrane, ażeby największa co do modułu wartość własna macierzy będącej przybliżeniem macierzy $\exp[A\ T_0]$ była mniejsza od jedności. Wykazano eksperymentalnie, że dla kroku całkowania obliczonego zgodnie ze wzorami (13) i (14), największa co do modułu wartość własna macierzy $\exp[A\ T_0]$ nie przekracza jedności.

Do tego typu algorytmu obliczeniowego opracowano zgodnie ze wzorami (13), (14), (16) i (17) program obliczeniowy w Delphi, wykorzystując bibliotekę matematyczną zawartą w pracy [1]. Przebiegi czasowe natężenia pola (w jednostkach względnych jako $k_H(r,t) = \dfrac{H_z^I(r,t)}{H_0}$) w różnych punktach walca przedstawiono na rys.2.



Rys. 2. Przebiegi czasowe natężenia pola magnetycznego w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej w różnych punktach walca; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\eta = 5\cdot10^{3}$ s^{-1}, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 2 Time curves of the magnetic field strength in a conducting cylinder placed in external longitudinal magnetic field in the form of a damped sinusoid at different points inside the cylinder; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\eta = 5\cdot10^{3}$ s^{-1}, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

4. ZASTOSOWANIE METODY FEHLBERGA

Słabą stroną algorytmu rekurencyjnego (16) jest duży koszt numerycznych obliczeń kroku całkowania, a szczególnie zmiana tego kroku przy zachowaniu zadanego błędu całkowania. W celu zmniejszenia sumarycznego kosztu numerycznego całkowania proponuje się zastosowanie do rozwiązania układu równań różniczkowych (10) metody Fehlberga [1]. Istotą tej metody jest tworzenie pary metod włożonych rzędu k – tego i M – etapowej oraz (k+1) - ego rzędu i (M+1) – etapowej. Zgodnie z ogólnym określeniem metod Rungego – Kutty [1] najpierw oblicza się wektory $\boldsymbol{K}_j$ (j = 1, 2,..., M+1)

$$\boldsymbol{K}_j = h_j\, \boldsymbol{F}[\boldsymbol{H}_i + \sum_{l=1}^{j-1} \beta_{jl}\, \boldsymbol{K}_l, t_i + \alpha_l h_i], \tag{18}$$

gdzie:

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{H}_z^I(t), t] = \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{H}_z^I(t) + \boldsymbol{f}(t), \tag{19}$$

oraz $h_i = t_{i+1} - t_i$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_{1l} = 0$.

Oznaczmy przez $\boldsymbol{H}_{i+1}$ wyniki obliczeń za pomocą metody $(M+1)$ – etapowej

$$\boldsymbol{H}_{i+1} = \boldsymbol{H}_i + \sum_{j=1}^{M+1} w_j \boldsymbol{K}_j , \tag{20}$$

natomiast przez $\boldsymbol{H}^*_{i+1}$ wyniki obliczeń za pomocą metody M – etapowej

$$\boldsymbol{H}^*_{i+1} = \boldsymbol{H}^*_i + \sum_{j=1}^{M} w^*_j \boldsymbol{K}_j , \tag{21}$$

przy czym wektory K_j są wspólne dla wzorów (20) i (21).

Wykazuje się, że błąd aproksymacji w pierwszym przybliżeniu dla metody rzędu $k+1$ w punkcie $t_i + h$ jako funkcja h wyraża się wzorem

$$\boldsymbol{E}^*(t_i + h; h) = \boldsymbol{H}^I_z(t_i + h) - \widetilde{\boldsymbol{H}}^I_z(t_i + h; h) \cong \sum_{j=1}^{M+1} (w_j - w^*_j)\, \boldsymbol{K}_j , \tag{22}$$

gdzie:

$w^*_{M+1} = 0$, $\boldsymbol{H}^I_z(t_i + h)$ - rozwiązanie dokładne, $\widetilde{\boldsymbol{H}}^I_z(t_i + h; h)$ - rozwiązanie przybliżone.

Zatem zgodnie z metodą Fehlberga wykonujemy taki krok całkowania h, aby norma wektora błędu $\boldsymbol{E}^*(t_i + h; h)$ określona wzorem (22) była mniejsza od z góry zadanego ε, tzn.

$$\left\| \boldsymbol{E}^*(t_i + h; h) \right\| < \varepsilon . \tag{23}$$

Współczynniki $\alpha_i, \beta_{jl}, w_j, w^*_j$ we wzorach (18), (20), (21) i (22) metod Fehlberga można znaleźć w literaturze krajowej, np. w pracach [1].

Należy zauważyć, że oszacowanie błędu aproksymacji zgodnie ze wzorem (22) nie wymaga dodatkowych obliczeń wartości funkcji $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{H}^I_z(t), t]$, tzn. funkcji prawej strony równań różniczkowych (10) i (19). Ponadto w celu minimalizacji działań arytmetycznych przy wyznaczaniu funkcji $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{H}^I_z(t), t]$, jako iloczynu macierzy $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{H}^I_z(t) + \boldsymbol{f}(t)$, można ograniczyć się tylko do działań na niezerowych elementach macierzy A. Składowe $f_i[\boldsymbol{H}^I_z(t), t)]$ wektora $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{H}^I_z(t), t]$ można więc, zgodnie ze wzorami (7), wyrazić wzorem

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{H}^I_z(t), t] = \begin{bmatrix} f_1[\boldsymbol{H}^I_z(t), t] \\ f_2[\boldsymbol{H}^I_z(t), t] \\ \cdots\cdots \\ f_k[\boldsymbol{H}^I_z(t), t] \\ \cdots\cdots \\ f_{N-1}[\boldsymbol{H}^I_z(t), t] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a[-\frac{3}{2}H^I_{z,1}(t) + \frac{3}{2}H^I_{z,2}(t)] \\ a[\frac{3}{4}H^I_{z,1}(t) - 2H^I_{z,2}(t) + \frac{5}{4}H^I_{z,3}(t)] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a[(1 - \frac{1}{2k})H^I_{z,k-1}(t) - 2H^I_{z,k}(t) + (1 + \frac{1}{2k})H^I_{z,k+1}(t)] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a[(1 - \frac{1}{2(N-1)})H^I_{z,N-2}(t) - 2H^I_{z,N-1}(t) + (1 + \frac{1}{2(N-1)})H^I_{z,N}(t)] \end{bmatrix}, \tag{24}$$

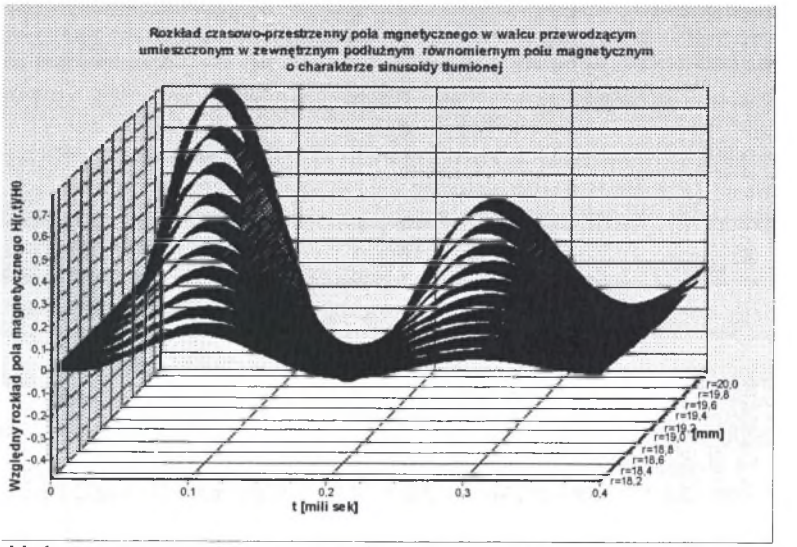
gdzie $H^I_{z,N}(t)$ jest zadanym wymuszeniem danym wzorem (8).

Do rozwiązania układu równań różniczkowych (10), który zgodnie z równaniem (24) ma postać

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}^I_z(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{H}^I_z(t), t] \tag{25}$$

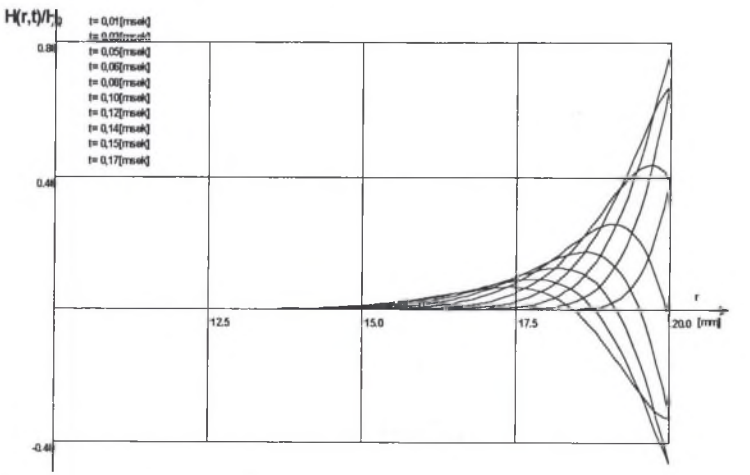
opracowano program obliczeniowy w Delphi, wykorzystując bibliotekę matematyczną z pracy [1] dotyczącą metody Fehlberga. Wyniki obliczeń przeprowadzono dla błędu

względnego $\varepsilon_w = 10^{-7}$ oraz absolutnego $\varepsilon_a = 10^6$. Prezentację graficzną rozwiązania przedstawiono na rys.3 i rys.4.



Rys. 3. Rozkład przestrzenno-czasowy natężenia pola magnetycznego w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\eta = 5\cdot10^3$ s^{-1}, $\omega = \pi\cdot10^4$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 3. Time-space distribution of the magnetic field in a conducting cylinder placed in the external longitudinal uniform magnetic field having the form of a damped sinusoid; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\eta = 5\cdot10^3$ s^{-1}, $\omega = \pi\cdot10^4$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$



Rys. 4. Rozkład natężenia pola magnetycznego w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej dla różnych wartości czasu t; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\eta = 5\cdot10^3$ s^{-1}, $\omega = \pi\cdot10^4$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 4. Distribution of the magnetic field strength inside a conducting cylinder placed in the external longitudinal magnetic field in the form of a damped sinusoid for different values of time t; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\eta = 5\cdot10^3$ s^{-1}, $\omega = \pi\cdot10^4$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

5. ZAKOŃCZENIE

Z przeprowadzonych eksperymentów numerycznych wynika, że zastosowanie metody różnic skończonych w połączeniu z metodą Fehlberga całkowania numerycznego względem czasu, do obliczeń dyfuzji pola magnetycznego – równanie (3) – daje bardzo efektywne narzędzie obliczeniowe. Dzięki zastosowanej metodzie Fehlberga otrzymuje się wielokrotne przyśpieszenie obliczeń numerycznych w porównaniu z metodami rekurencyjnymi (16). Wynika to z faktu, że sumaryczny koszt obliczeniowy iteracji w metodzie rekurencyjnej (16) sprowadza się do trzech iloczynów macierzy (17) o wymiarach $(M_r - 1) \times (M_r - 1)$ przez wektor, natomiast w metodzie Fehlberga jako pary metod włożonych czwartego i piątego rzędu stosowanych w eksperymencie, wykonuje się tylko sześć obliczeń funkcji wektorowej (24) w jednym kroku całkowania. Ponadto w metodzie Fehlberga istnieje możliwość automatycznego doboru kroku całkowania, co znacząco zmniejsza ilość kroków całkowania. Natomiast w metodzie rekurencyjnej, po oszacowaniu stałego kroku całkowania gwarantującego stabilność rozwiązania, utrzymywany stały krok całkowania dodatkowo zwiększa liczbę kroków, a tym samym zwiększa koszt obliczeń. Oznacza to również istnienie dużego zapotrzebowania na pamięć operacyjną niezbędną do zapamiętywania wektorów stanu w poszczególnych iteracjach.

LITERATURA

1. Baron B., Marcol A., Pawlikowski S.: *Metody numeryczne w Delphi 4*. Wyd. Helion, Gliwice 1999.
2. Baron B., Piątek Z.: *Zagadnienie Fouriera pierwszego rodzaju odpowiadające dyfuzji podłużnego pola magnetycznego o charakterze sinusoidy tłumionej do walca przewodzącego*. ZKwE'2002, Poznań 2002.
3. Ciok Z.: *Metody obliczania pól elektromagnetycznych i przepływowych*. Wyd. Pol. Warszawskiej, Warszawa 1985.
4. Dahlquist G., Björek A.: *Metody numeryczne*. PWN, Warszawa 1983.
5. Dobrogowski J., Kołaczkowski Z., Tychowski F.: *Tłoczenie metali impulsowym polem magnetycznym*. PWN, Warszawa – Poznań 1979.
6. Kącki E.: *Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki*. WNT, Warszawa 1992.
7. Krakowski M.: *Elektrotechnika teoretyczna. Tom 2. Pole elektromagnetyczne*. Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 1995.
8. Krupowicz A.: *Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych*. PWN, Warszawa 1986.
9. Krzyżański M.: *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*. PWN, Warszawa 1957.
10. Piątek Z., Baron B.: *Walec przewodzący w zewnętrznym podłużnym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej*. ZKwE'2002, Poznań 2002.
11. Turowski J.: *Elektrodynamika techniczna*. WNT, Warszawa 1993.

Wpłynęło do Redakcji dnia 5 stycznia 2002 r.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Andrzej Jordan

Abstract

In the case of forming a conducting cylinder by using an impulse magnetic field, the external magnetic field has the form of a damped sinusoid and is defined by formula (1a). Inside the cylinder the magnetic field satisfies equation (3) with boundary conditions (4), (4a) and (4b). Using the finite differences method, equation (3) is reduced to a system of differential equations (7), while the boundary conditions to relationships (8) and (9a) respectively. Thus, we obtain N-1 equations (10) where the values to be determined the magnetic field strengths in the loops of the discretising grid- the vector (10a). To solve the system of equations we use a recurrent algorithm, thus obtaining the differential equation (15) where the input $f(t)$ is approximated by functions linear in the intervals.

In order to reduce the costs of numerical calculations we use Fehlberg method, thus obtaining the system of equations (25).

The methods we apply enable us to determine the time curves of the magnetic field strength inside the conducting cylinder at its different points, distribution of the field at different moments of time, as well as its space-time distribution.