ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2002
Seria: ELEKTRYKA z.182 Nr kol. 1551

Zygmunt PIĄTEK, Bernard BARON, Andrzej KAŁUŻA

POLE ELEKTROMAGNETYCZNE WEWNĄTRZ WALCA PRZEWODZĄCEGO UMIESZCZONEGO W PODŁUŻNYM RÓWNOMIERNYM POLU MAGNETYCZNYM O CHARAKTERZE SINUSOIDY TŁUMIONEJ

Streszczenie. W pracy wyznaczono nieustalone pole elektromagnetyczne w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej poprzez rozwiązanie równania Bessela we współrzędnych walcowych z wykorzystaniem przekształcenia całkowego Laplace'a. Na podstawie otrzymanych wzorów wykonano obliczenia i rysunki rozkładów przestrzenno – czasowych, tłumienia i wnikania natężenia pola magnetycznego i gęstości prądu w walcu. Także dla przypadku zewnętrznego sinusoidalnie zmiennego pola magnetycznego rozpatrzono nieustalone i ustalone pole elektromagnetyczne w walcu przewodzącym. Otrzymane wzory opisujące pole elektromagnetyczne w walcu mogą być wykorzystane do opisu gęstości objętościowej sił i ciśnień w przypadku kształtowania metali impulsowym polem magnetycznym.

ELECTROMAGNETIC FIELD INSIDE A CONDUCTING CYLINDER PLACED IN LONGITUDINAL UNIFORM MAGNETIC FIELD IN THE FORM OF A DAMPED

Summary. In the paper we determine the transient electromagnetic field in a conducting cylinder placed in external magnetic field having the character of damped sinusoid, using the solution of Bessel equation in cylindrical co-ordinates, and also applying the integral Lapalce transformation. The resulting equations are the basis for calculation and graphs of space-time distributions, damping and diffusion of the magnetic field strength and of current density in the cylinder. Moreover, for the case of external sine-shaped magnetic field, we also take into consideration the transient and steady electromagnetic field in a conducting cylinder. The resulting equations describing the electromagnetic field in the cylinder can be used to describe the volume density of forces and pressures in the case of forming metals by means of impulse magnetic field.

1. WSTĘP

Pole magnetyczne o charakterze sinusoidy tłumionej używane jest przy kształtowaniu metali i polega na wykorzystaniu do ich formowania energii impulsowego pola magnetycznego. Impuls pola uzyskuje się w wyniku przepływu przez głowicę roboczą (cewkę cylindryczną lub płaską) prądu impulsowego wytworzonego przez wysokonapięciowy generator udarów prądowych [2], [3]. Układ generator udarów prądowych – głowica robocza wykorzystuje się również do wytwarzania ekstremalnie silnych impulsowych pól magnetycznych o indukcji kilkuset tesli i czasie trwania nie przekraczającym kilkudziesięciu mikrosekund [1]. Tak silne pola magnetyczne stwarzają unikalne warunki do prowadzenia badań, między innymi w inżynierii materiałowej i fizyce ciała stałego.

W przypadku kształtowania walca przewodzącego impulsowe pole magnetyczne jest polem zewnętrznym w stosunku do walca, ma jedną składową wzdłuż osi z (rys.1) i określa się je następującym wzorem [2], [3]:

$$\boldsymbol{H}^{zew}(t) = \mathbf{1}_z H_z^{zew}(t), \tag{1}$$

w którym składowa natężenia pola magnetycznego wzdłuż osi z

$$H_z^{zew}(t) = H_0\, \mathrm{e}^{-\eta t} \sin(\varpi t + \xi)\, \mathbf{1}(t), \tag{1a}$$

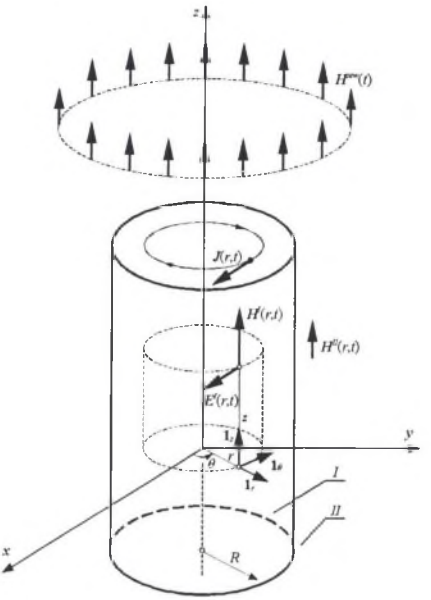
gdzie: H_0 – amplituda pola magnetycznego przy braku tłumienia w $\mathrm{A{\cdot}m^{-1}}$,
ω – pulsacja drgań własnych układu kształtowany element – głowica robocza – bateria kondensatorów w $\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$,
η – współczynnik tłumienia pola magnetycznego w $\mathrm{s^{-1}}$,
ξ – faza początkowa natężenia pola magnetycznego w rad,
$\mathbf{1}(t)$ – skok jednostkowy Heaviside'a.

Typowe, przeciętne wartości wymienionych wielkości występujące przy kształtowaniu metali impulsowym polem magnetycznym wynoszą [3]: $H_0 = 10^7\,\mathrm{A\cdot m^{-1}}$, $\eta = 5\cdot 10^3\,\mathrm{s^{-1}}$, $\varpi = \pi\cdot 10^4\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, $\xi = 0$.

Przy kształtowaniu metali impulsowym polem magnetycznym należy określić rozkład czasowo – przestrzenny ciśnienia w formowanym elemencie po uprzednim wyznaczeniu rozkładu czasowo – przestrzennego gęstości objętościowej sił ponderomotorycznych w metalu [2], [3]. Gęstość objętościową sił dla przypadku przewodu o skończonym przekroju z gęstością prądu $\boldsymbol{J}(r,t)$ i polem magnetycznym $\boldsymbol{H}^I(r,t)$ określa się [7] następującym wzorem:

$$\boldsymbol{f}(\mathrm{r},\mathrm{t}) = \boldsymbol{J}(\mathrm{r},\mathrm{t}) \times \mu\, \boldsymbol{H}^{\mathrm{I}}(\mathrm{r},\mathrm{t}) = \mu\, \mathrm{rot}\boldsymbol{H}^{\mathrm{I}}(\mathrm{r},\mathrm{t}) \times \boldsymbol{H}^{\mathrm{I}}(\mathrm{r},\mathrm{t}) \tag{2}$$

Określenie tej gęstości objętościowej sił wymaga zatem znajomości czasowo – przestrzennego rozkładu gęstości prądu $\boldsymbol{J}(r,t)$ i natężenia pola magnetycznego $\boldsymbol{H}^I(r,t)$ w kształtowanym elemencie.



Rys. 1. Walec przewodzący w zewnętrznym podłużnym równomiernym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej

Fig. 1. Conducting cylinder in the external longitudinal uniform magnetic field having a character of damped sinusoid

2. ROZKŁAD CZASOWO-PRZESTRZENNY NATĘŻENIA POLA MAGNETYCZNEGO

W przypadku nieskończenie długiego walca przewodzącego w zewnętrznym podłużnym polu magnetycznym (rys.1) wielkości charakteryzujące pole elektromagnetyczne, ze względu na symetrię układu, zależą tylko od współrzędnej r walcowego układu współrzędnych. Chodzi zatem o zagadnienie jednowymiarowe ze stałą przenikalnością magnetyczną walca $\mu = \mu_0$ i jego stałą konduktywnością γ. Ze względu na to, że pole $\boldsymbol{H}^{zew}(t)$ ma tylko jedną składową wzdłuż osi z, na mocy drugiego równania Maxwella $\mathbf{rot}\boldsymbol{E}^{zew}(r,t) = -\mu \dfrac{\partial \boldsymbol{H}^{zew}(t)}{\partial t}$, natężenie pola elektrycznego ma również jedną składową wzdłuż osi Θ, tzn. $\boldsymbol{E}^{zew}(r,t) = -\mathbf{1}_\Theta E_\Theta^{zew}(r,t)$. Wtedy też wektor Poyntinga

$$\boldsymbol{P}(r,t) = \boldsymbol{E}^{zew}(r,t) \times \boldsymbol{H}^{zew}(t) = -\mathbf{1}_r P_r(r,t), \tag{3}$$

co oznacza, że mamy do czynienia z zagadnieniem padania fali cylindrycznej na powierzchnię boczną walca przewodzącego.

W przypadku ogólnym przewodnika o dowolnym kształcie, umieszczonego w zmiennym polu elektromagnetycznym siłą rzeczy muszą powstać prądy, gdyż pole elektryczne całkowite nie może być równe zeru wszędzie w całym przewodniku. Prądy te noszą nazwę prądów Foucaulta [6] i są określone przez wektor gęstości prądu $\boldsymbol{J}(r,t)$ - rys.1. Prądy te wytwarzają tzw. pole magnetyczne oddziaływania zwrotnego $\boldsymbol{H}^{oz}(r,t)$, które w badanym układzie ma jedną składową wzdłuż osi z, czyli

$$\boldsymbol{H}^{oz}(r,t) = \mathbf{1}_z H_z^{oz}(r,t). \tag{4}$$

Zatem w obszarze *II*, tzn. dla $r > R$ całkowite natężenie pola magnetycznego

$$\boldsymbol{H}^{II}(r,t) = \boldsymbol{H}^{zew}(t) + \boldsymbol{H}^{oz}(r,t). \tag{5}$$

Konduktywność obszaru *II* (powietrze) jest równa zeru, a stąd pierwsze równanie Maxwella dla pola magnetycznego oddziaływania zwrotnego $\boldsymbol{H}^{oz}(r,t)$, przy jednoczesnym pominięciu prądów przesunięcia (pole quasi-statyczne), ma postać

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{H}^{oz}(r,t) = 0. \tag{6}$$

Po uwzględnieniu wzoru (4) równanie (6) sprowadza się do

$$\frac{\mathrm{d}H_z^{oz}(r,t)}{\mathrm{d}r} = 0, \tag{6a}$$

co oznacza, że składowa $H_z^{oz}(r,t)$ nie zależy od zmiennej r walcowego układu współrzędnych. Zatem ze wzoru (5) pole magnetyczne dla $r > R$

$$H_z^{II}(r,t) = H_z^{zew}(t) + H_z^{oz}(t). \tag{7}$$

Dla $r \to \infty$ pole $H_z^{II}(r,t) \to H_z^{zew}(t)$, a stąd wynika, że $H_z^{oz}(t) = 0$ i wtedy całkowite pole magnetyczne w rozważanym obszarze

$$\boldsymbol{H}^{II}(t) = \mathbf{1}_z H_z^{II}(t) = \boldsymbol{H}^{zew}(t) = \mathbf{1}_z H_z^{zew}(t). \tag{8}$$

Zerowa wartość pola magnetycznego oddziaływania zwrotnego w obszarze $r > R$ wynika z faktu, że linie gęstości prądu $\boldsymbol{J}(r,t)$ indukowanego w walcu są okręgami koncentrycznymi o osi Oz – rys.1. Zatem, nie wytwarzają one na zewnątrz walca żadnego pola magnetycznego podobnie jak prąd w nieskończenie długim solenoidzie.

Zewnętrzne pole magnetyczne możemy przedstawić jako część urojoną funkcji zespolonej pola zewnętrznego, tzn. w postaci wzoru

$$H_z^{zew}(t) = \mathrm{Im}\{\underline{H}_z^{zew}(t)\}, \tag{9}$$

w którym to wzorze

$$\underline{H}_z^{zew}(t) = \underline{H}_0\, \mathrm{e}^{-\eta t}\, \mathrm{e}^{j\varpi t}\, \mathbf{1}(t), \tag{9a}$$

gdzie amplituda zespolona pola magnetycznego zewnętrznego

$$\underline{H}_0 = H_0\, \mathrm{e}^{j\xi}. \tag{9b}$$

Podobnie przedstawimy poszukiwane natężenie pola magnetycznego $H_z^{I}(r,t)$ w obszarze *I* ($0 \le r \le R$), czyli

$$H_z^I(r,t) = \mathrm{Im}\{\underline{H}_z^I(r,t)\}, \tag{10}$$

gdzie $\underline{H}_z^I(r,t)$ jest funkcją zespoloną pola magnetycznego w walcu zmiennych rzeczywistych r oraz t. Funkcja ta spełnia skalarne równanie falowe we współrzędnych walcowych

$$\frac{\partial^2 \underline{H}_z^I(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \underline{H}_z^I(r,t)}{\partial r} - \mu\gamma\frac{\partial \underline{H}_z^I(r,t)}{\partial t} = 0. \tag{11}$$

Dla $r = R$ musi zachodzić ciągłość natężenia pola magnetycznego, tzn. mamy następujący warunek brzegowy dla wielkości zespolonych:

$$\underline{H}_z^I(R,t) = \underline{H}_z^{\mathrm{zew}}(t). \tag{12}$$

Ponadto zakłada się zerowy warunek początkowy, tzn. dla $t = 0$

$$\underline{H}_z^I(r,0) = 0. \tag{12a}$$

Rozwiązania równania (11) z warunkiem brzegowym (12) dokonamy stosując przekształcenie całkowe Laplace'a. W tym celu oznaczmy przez $\overline{H}_z^I(r,s)$ transformatę Laplace'a funkcji zespolonej $\underline{H}_z^I(R,t)$ względem zmiennej t, tzn.

$$\overline{H}_z^I(r,s) = \mathcal{L}_t\{\underline{H}_z^I(r,t)\} = \int_0^\infty \underline{H}_z^I(r,t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t. \tag{13}$$

Dokonując następnie przekształcenia Laplace'a wyraz po wyrazie równania różniczkowego (11), uwzględniając jednocześnie zerowe warunki początkowe $\underline{H}_z^I(r,0) = 0$, otrzymujemy równanie

$$\frac{\partial^2 \overline{H}_z^I(r,s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{H}_z^I(r,s)}{\partial r} - s\mu\gamma\,\overline{H}_z^I(r,s) = 0. \tag{14}$$

Po przekształceniu warunku brzegowego (12), uwzględniając także wzór (9a), znajdujemy

$$\overline{H}_z^I(R,s) = \underline{H}_0\frac{1}{s - s_0}, \tag{15}$$

gdzie

$$s_0 = -\eta + \mathrm{j}\varpi. \tag{15a}$$

Równanie (14) jest równaniem Bessela zerowego rzędu zmiennej r, którego rozwiązaniem jest funkcja [5]

$$\overline{H}_z^I(r,s) = \underline{A}_1\, I_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}\,r) + \underline{A}_2\, K_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}\,r), \tag{16}$$

gdzie funkcje $I_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}\,r)$ i $K_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}\,r)$ są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela zmiennej zespolonej $\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}\,r$ odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju zerowego rzędu, zaś $\underline{A}_1$ i $\underline{A}_2$ są zespolonymi stałymi całkowania.

Dla $r \to 0$ funkcja $K_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}\,r) \to \infty$, zaś pole magnetyczne musi być skończone, a stąd wynika, że stała $\underline{A}_2 = 0$. Zatem natężenie pola magnetycznego w obszarze I $(0 \le r \le R)$

$$\overline{H}^{I}_{z}(r,s) = \underline{A}_1 \, I_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}\, r). \tag{16a}$$

Z warunku brzegowego (15) wyznaczamy stałą $\underline{A}_1$ i ostatecznie natężenie pola magnetycznego w postaci operatorowej

$$\overline{H}^{I}_{z}(r,s) = \underline{H}_0 \frac{I_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}\, r)}{(s-s_0)\, I_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}\, R)}. \tag{16b}$$

Można wykazać, że mianownik we wzorze (16b)

$$M(s) = (s-s_0)\, I_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}\, R) \tag{16c}$$

jest funkcją analityczną w całej półpłaszczyźnie „s" oraz ma (oprócz zera $s = s_0$) pojedyncze zera $s_k = -\sigma_k$ $(\sigma_k > 0)$ na ujemnej półosi rzeczywistej.

Przedstawiając zmodyfikowaną funkcję Bessela

$$I_0(\sqrt{-\sigma_k}\sqrt{\mu\gamma}\, R) = I_0(\mathrm{j}\sqrt{\sigma_k}\sqrt{\mu\gamma}\, R) = I_0(\mathrm{j}\, x_k), \tag{17}$$

gdzie

$$x_k = \sqrt{\sigma_k}\sqrt{\mu\gamma}\, R \tag{17a}$$

i uwzględniając związek między zmodyfikowaną funkcją I_0 a funkcją J_0 pierwszego rodzaju zerowego rzędu

$$I_0(\mathrm{j}\, x) = J_0(x) \tag{17b}$$

oraz przyjmując, że punkty $\pm x_k$ są miejscami zerowymi funkcji Bessela $J_0(x)$, tzn.

$$J_0(\pm x_k) = 0, \tag{17c}$$

wyznaczamy miejsca zerowe funkcji $I_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}\, R)$, otrzymując

$$s_k = -\sigma_k = -\frac{x_k^2}{\mu\gamma R^2} < 0. \tag{18}$$

Miejsca zerowe x_k funkcji Bessela $J_0(x)$ pierwszego rodzaju zerowego rzędu oblicza się za pomocą wzoru przybliżonego ([5], s. 48, na podstawie wzoru (4))

$$x_k \cong \varphi_k + \frac{1}{8\varphi_k} - \frac{124}{3(8\varphi_k)^3} + \frac{120928}{158(8\varphi_k)^5} - \frac{401743168}{105(8\varphi_k)^7} + \ldots, \tag{19}$$

gdzie

$$\varphi_k = (k - \frac{1}{4})\pi, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{19a}$$

Do obliczenia oryginału $\underline{H}^{I}_{z}(r,t)$ funkcji operatorowej $\overline{H}^{I}_{z}(r,s)$ korzystamy z twierdzenia o rozkładzie

$$\underline{H}^{I}_{z}(r,t) = \mathcal{L}_t^{-1}\{\overline{H}^{I}_{z}(r,s)\} = \mathcal{L}_t^{-1}\{\underline{H}_0 \frac{I_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}\, r)}{(s-s_0)\, I_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}\, R)}\} = \sum_{0}^{\infty} \frac{L(s_k)}{M'(s_k)} \mathrm{e}^{s_k t}, \tag{20}$$

gdzie $L(s_k)$ jest wartością licznika, $M'(s_k)$ jest wartością pierwszej pochodnej mianownika funkcji (16b) względem zmiennej s dla $s = s_k$, zaś punkty s_k są miejscami zerowymi mianownika ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Dla $k = 0$ miejsce zerowe funkcji (16c) określone jest wzorem

(15a). Dla $k = 1, 2, 3,...$ miejsca zerowe s_k zmodyfikowanej funkcji Bessela $I_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}R)$ wyznaczamy ze wzoru (18).

Pochodna funkcji (16c) względem zmiennej s

$$M'(s) = \frac{\mathrm{d}M(s)}{\mathrm{d}s} = I_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}\,R) + \frac{s - s_0}{2\sqrt{s}}\sqrt{\mu\gamma}\,R\,I_1(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}\,R), \tag{21}$$

gdzie $I_1(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}\,R)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju pierwszego rzędu.

Jeśli uwzględnimy, że s_k, określone wzorem (18), jest miejscem zerowym zmodyfikowanej funkcji Bessela $I_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma}R)$ pierwszego rodzaju zerowego rzędu, czyli $I_0(s_k) = 0$, to

$$M'(s_k) = -\frac{\mathrm{j}}{2x_k}(x_k^2 + R^2\underline{\Gamma}^2)\,I_1(-\mathrm{j}\,x_k) = \underline{A}_k(x_k)\,I_1(-\mathrm{j}\,x_k), \tag{21a}$$

gdzie współczynnik zespolony

$$\underline{A}_k(x_k) = \frac{1}{2x_k}[R^2\varpi\mu\gamma + \mathrm{j}\,(R^2\eta\,\mu\,\gamma - x_k^2)] = A_k(x_k)\exp[\mathrm{j}\,\alpha_k(x_k)], \tag{21b}$$

gdzie moduł

$$A_k(x_k) = \frac{1}{2x_k}\sqrt{(R^2\varpi\mu\gamma)^2 + (R^2\eta\mu\gamma - x_k^2)^2} \tag{21c}$$

i argument

$$\alpha_k(x_k) = \mathrm{arc\,tg}\frac{R^2\eta\mu\gamma - x_k^2}{R^2\varpi\mu\gamma}. \tag{21d}$$

We wzorze (21a) kwadrat zespolonej stałej propagacji

$$\underline{\Gamma}^2 = -\eta\,\mu\,\gamma + \mathrm{j}\,\varpi\,\mu\,\gamma = \Gamma^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\varphi}. \tag{22}$$

Moduł stałej propagacji określony jest wzorem

$$\Gamma = \sqrt{\mu\gamma\sqrt{\eta^2 + \varpi^2}} \tag{22a}$$

zaś jej argument poprzez wzór

$$\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{arc\,tg}(-\frac{\varpi}{\eta}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{arc\,tg}\frac{\eta}{\varpi}. \tag{22b}$$

Wyznaczone miejsca zerowe mianownika we wzorze (16b) oraz wyznaczone wartości funkcji $M'(s_k)$ - wzór (21a) umożliwiają obliczenie oryginału zespolonego natężenia pola magnetycznego w obszarze I ($0 \le r \le R$)

$$\underline{H}_z^I(r,t) = \underline{H}_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I_0(\sqrt{s_k}\sqrt{\mu\gamma}r)}{M'(s_k)}\mathrm{e}^{s_k t} = \underline{H}_{z,0}^I(r,t) + \sum_{k=1}^{\infty}\underline{H}_{z,k}^I(r,t), \tag{23}$$

gdzie $\underline{H}_{z,0}^I(r,t)$ jest oryginałem funkcji (16b) w biegunie $s = s_0$ ($k = 0$), zaś $\underline{H}_{z,k}^I(r,t)$ jest oryginałem tej funkcji w biegunie $s = s_k$ ($k = 1, 2, 3,...$). Oryginały te są dane następującymi wzorami:

$$\underline{H}^{I}_{z,0}(r,t) = \underline{H}_0 \frac{I_0(\underline{\Gamma} r)}{I_0(\underline{\Gamma} R)} \mathrm{e}^{-\eta t} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varpi t}, \tag{23a}$$

oraz

$$\underline{H}^{I}_{z,k}(r,t) = \underline{H}_0 \frac{I_0(-\mathrm{j}\, x_k \frac{r}{R})}{\underline{A}_k(x_k)\, I_1(-\mathrm{j}\, x_k)} \exp[-\frac{x_k^2}{\mu \gamma R^2} t]. \tag{23b}$$

Postać wykładnicza funkcji Bessela występujących we wzorach (23a) i (23b)

$$\left.\begin{aligned} &I_0(\underline{\Gamma} r) = M_0(\underline{\Gamma} r) \exp[\mathrm{j}\, \beta_0(\underline{\Gamma} r)], \\ &I_0(\underline{\Gamma} R) = M_0(\underline{\Gamma} R) \exp[\mathrm{j}\, \beta_0(\underline{\Gamma} R)], \\ &I_0(-\mathrm{j}\, x_k \frac{r}{R}) = M_{0,k}(-\mathrm{j}\, x_k \frac{r}{R}) \exp[\mathrm{j}\, \beta_{0,k}(-\mathrm{j}\, x_k \frac{r}{R})], \\ &I_1(-\mathrm{j}\, x_k) = M_{1,k}(-\mathrm{j}\, x_k) \exp[\mathrm{j}\, \beta_{1,k}(-\mathrm{j}\, x_k)]. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

umożliwia zapis funkcji (23a) i (23b) w postaciach rzeczywistych, tzn. jako funkcji rzeczywistych zmiennej r walcowego układu współrzędnych oraz czasu t. Odpowiednio otrzymujemy

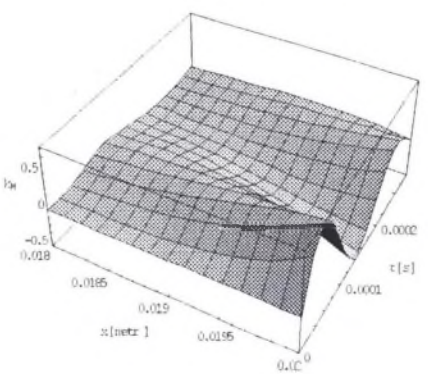
$$H^{I}_{z,0}(r,t) = \mathrm{Im}\{\underline{H}^{I}_{z,0}(r,t)\} = H_0 \frac{M_0(\underline{\Gamma} r)}{M_0(\underline{\Gamma} R)} \mathrm{e}^{-\eta t} \sin[\varpi t + \beta_0(\underline{\Gamma} r) - \beta_0(\underline{\Gamma} R) + \xi], \tag{25}$$

oraz

$$\begin{aligned} H^{I}_{z,k}(r,t) &= \mathrm{Im}\{\underline{H}^{I}_{z,k}(r,t)\} = \\ &= H_0 \frac{M_0(-\mathrm{j}\, x_k \frac{r}{R})}{A_k(x_k)\, M_1(-\mathrm{j}\, x_k)} \exp[-\frac{x_k^2}{\mu \gamma R^2} t] \sin[\beta_{0,k}(-\mathrm{j}\, x_k \frac{r}{R}) - \beta_{1,k}(-\mathrm{j}\, x_k) - \alpha_k(x_k) + \xi] \end{aligned} \tag{26}$$

Ostatecznie natężenie pola magnetycznego w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej ma postać

$$H^{I}_{z}(r,t) = H^{I}_{z,0}(r,t) + \sum_{k=1}^{\infty} H^{I}_{z,k}(r,t). \tag{27}$$



Rys. 2. Rozkład czasowo – przestrzenny natężenia pola magnetycznego w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym równomiernym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\eta = 5\cdot10^{3}$ s^{-1}, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

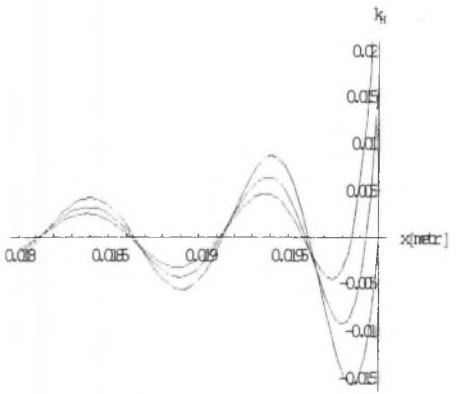
Fig. 2. Time-space distribution of the magnetic field in a conducting cylinder placed in the external longitudinal uniform magnetic field having a character of adamped sinusoid; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\eta = 5\cdot10^{3}$ s^{-1}, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Rozkład czasowo – przestrzenny natężenia pola magnetycznego w walcu przewodzącym przedstawiono (obliczenia i rysunki wykonano w *Mathematica* 3.0) na rys.2 w jednostkach względnych jako funkcję

$$k_H(r,t) = \frac{H_z^I(r,t)}{H_0} \tag{27a}$$

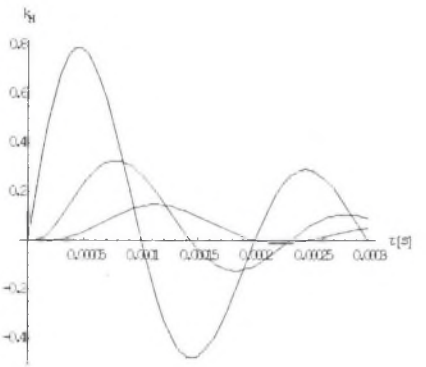
Tłumienie pola magnetycznego do walca przewodzącego umieszczonego w zewnętrznym podłużnym równomiernym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej dla kilku wartości ωt = const przedstawiono na rys.3.

Wnikanie pola magnetycznego wewnątrz walca przewodzącego umieszczonego w zewnętrznym podłużnym równomiernym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej dla kilku wartości r = const przedstawiono na rys.4.



Rys. 3. Tłumienie pola magnetycznego w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym równomiernym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej dla ωt = const; 1 – ωt_1 = 0, 2 – ωt_2 = 0,005 π, 3 – ωt_3 = 0,01 π; R = $2\cdot10^{-2}$ m, $\eta = 5\cdot10^3$ s^{-1}, $\omega = \pi\cdot10^4$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 3. Damping of the magnetic field in a conducting cylinder placed in the external longitudinal uniform magnetic field having a character of damped sinusoid for ωt = const; 1 – ωt_1 = 0, 2 – ωt_2 = 0,005 π, 3 – ωt_3 = 0,01 π; R =$2\cdot10^{-2}$ m, η = $5\cdot10^3$ s^{-1}, ω = $\pi\cdot10^4$ rad·s^{-1}, γ = $58\cdot10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$



Rys. 4. Wnikanie pola magnetycznego wewnątrz walca przewodzącego umieszczonego w zewnętrznym podłużnym równomiernym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej dla r = const; 1 – r_1 = R = $20\cdot10^{-3}$ m, r_2 = $19\cdot10^{-3}$ m, r_3 = $18\cdot10^{-3}$ m; R =$2\cdot10^{-2}$ m, $\eta = 5\cdot10^3$ s^{-1}, $\omega = \pi\cdot10^4$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 4. Diffusion of the magnetic field inside a conducting cylinder placed in the external longitudinal uniform magnetic field having a character of an attenuated sinusoid for r = const.; 1 – r_1 = R = $20\cdot10^{-3}$ m, r_2 = $19\cdot10^{-3}$ m, r_3 = $18\cdot10^{-3}$ m; R =$2\cdot10^{-2}$ m, η = $5\cdot10^3$ s^{-1}, ω = $\pi\cdot10^4$ rad·s^{-1}, γ = $58\cdot10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

3. ROZKŁAD CZASOWO – PRZESTRZENNY GĘSTOŚCI PRĄDU

W walcu przewodzącym zespolone natężenie pola magnetycznego $\underline{\boldsymbol{H}}^{l}(r,t) = \mathbf{1}_z\, \underline{H}_z^{l}(r,t)$ związane jest z zespoloną gęstością prądu $\underline{\boldsymbol{J}}(r,t) = \mathbf{1}_\Theta\, \underline{J}_\Theta(r,t)$ pierwszym równaniem Maxwella

$$\mathbf{rot}\, \underline{\boldsymbol{H}}^{l}(r,t) = \underline{\boldsymbol{J}}(r,t), \tag{28}$$

skąd po uwzględnieniu, że powyższe wektory mają tylko po jednej składowej, otrzymujemy

$$\underline{J}_\Theta(r,t) = -\frac{\mathrm{d}\underline{H}_z^{l}(r,t)}{\mathrm{d}r} = \underline{J}_{\Theta,0}(r,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \underline{J}_{\Theta,k}(r,t), \tag{29}$$

gdzie

$$\underline{J}_{\Theta,0}(r,t) = -\frac{\mathrm{d}\underline{H}_{z,0}^{l}(r,t)}{\mathrm{d}r} = -\underline{H}_0 \frac{\underline{\Gamma}\, I_1(\underline{\Gamma}\, r)}{I_0(\underline{\Gamma}\, R)}\, \mathrm{e}^{-\eta t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varpi t}, \tag{29a}$$

oraz

$$\underline{J}_{\Theta,k}(r,t) = -\frac{\mathrm{d}\underline{H}_{z,k}^{l}(r,t)}{\mathrm{d}r} = -\underline{H}_0 \frac{-\mathrm{j}\dfrac{x_k}{R}\, I_1(-\mathrm{j}\, x_k \dfrac{r}{R})}{\underline{A}_k(x_k)\, I_1(-\mathrm{j}\, x_k)} \exp[-\frac{x_k^2}{\mu\gamma R^2} t]. \tag{29b}$$

Wzory (29a) i (29b) umożliwiają wyznaczenie gęstości prądu jako funkcji rzeczywistej zmiennej r walcowego układu współrzędnych oraz czasu t, w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej. Znak minus w tych wzorach oznacza, że zwrot wektora gęstości prądu $\underline{\boldsymbol{J}}(r,t)$ jest przeciwny do zwrotu wektora jednostkowego $\mathbf{1}_\Theta$ walcowego układu współrzędnych – rys.1. Wtedy składowa gęstości prądu

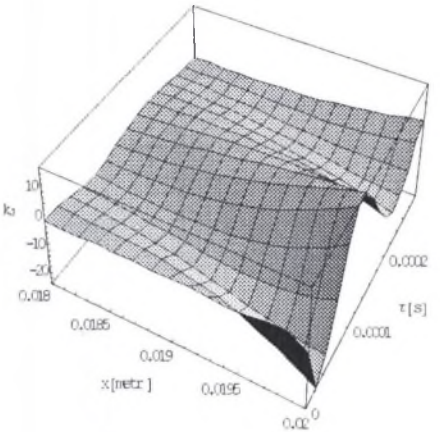
$$J_\Theta(r,t) = J_{\Theta,0}(r,t) + \sum_{k=1}^{\infty} J_{\Theta,k}(r,t), \tag{30}$$

gdzie

$$\begin{aligned} J_{\Theta,0}(r,t) &= \mathrm{Im}\{\underline{J}_{\Theta,0}(r,t)\} = \\ &= -H_0 \frac{M_1(\underline{\Gamma}\, r)}{M_0(\underline{\Gamma}\, R)}\, \Gamma\, \mathrm{e}^{-\eta t} \sin[\varpi t + \beta_1(\underline{\Gamma}\, r) - \beta_0(\underline{\Gamma}\, R) + \varphi + \xi] \end{aligned} \tag{30a}$$

gdzie $M_1(\underline{\Gamma}r)$ i $\beta_1(\underline{\Gamma}r)$ są odpowiednio modułem i argumentem zmodyfikowanej funkcji Bessela pierwszego rodzaju pierwszego rzędu $I_1(\underline{\Gamma}r) = M_1(\underline{\Gamma}r)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1(\underline{\Gamma}r)}$ oraz

$$\begin{aligned} J_{\Theta,k}(r,t) &= \mathrm{Im}\{\underline{J}_{\Theta,k}(r,t)\} = \\ &= H_0 \frac{M_1(-\mathrm{j}\, x_k \dfrac{r}{R})}{A_k(x_k)\, M_1(-\mathrm{j}\, x_k)} \frac{x_k}{R} \exp[-\frac{x_k^2}{\mu\gamma R^2} t] \cos[\beta_{1,k}(-\mathrm{j}\, x_k \frac{r}{R}) - \beta_{1,k}(-\mathrm{j}\, x_k) - \alpha_k(x_k) + \xi] \end{aligned} \tag{30b}$$

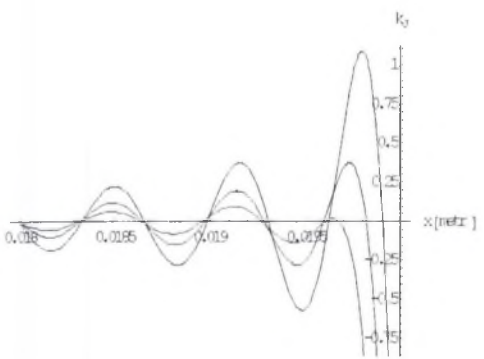


Rys. 5. Rozkład czasowo – przestrzenny gęstości prądu w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym równomiernym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\eta = 5\cdot10^{3}$ s^{-1}, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 5. Time-space distribution of the current density in a conducting cylinder placed in the external longitudinal uniform magnetic field having a character of a damped sinusoid; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\eta = 5\cdot10^{3}$ s^{-1}, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

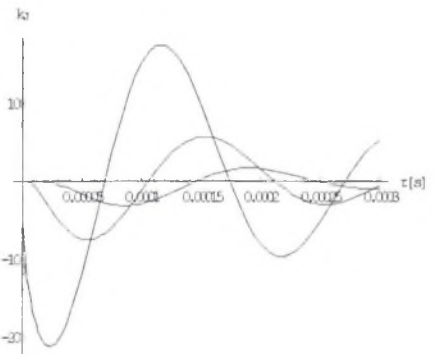
Rozkład gęstości prądu (30) wygodnie jest przedstawiać w postaci bezwymiarowej za pomocą funkcji

$$k_J(r,t) = \frac{R\,J(r,t)}{H_0}. \tag{31}$$



Rys. 6. Tłumienie gęstości prądu w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym równomiernym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej dla ωt = const; 1 – ωt_1 = 0, 2 – ωt_2 = 0,005 π, 3 – ωt_3 = 0,01 π; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\eta = 5\cdot10^{3}$ s^{-1}, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 6. Damping of the current density in a conducting cylinder placed in the external longitudinal uniform magnetic field having a character of an damped sinusoid for ωt = const; 1 – ωt_1 = 0, 2 – ωt_2 = 0,005 π, 3 – ωt_3 = 0,01 π; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\eta = 5\cdot10^{3}$ s^{-1}, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$



Rys. 7. Wnikanie gęstości prądu wewnątrz walca przewodzącego umieszczonego w zewnętrznym podłużnym równomiernym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej dla r = const.; 1 – $r_1 = R = 20\cdot10^{-3}$ m, $r_2 = 19\cdot10^{-3}$ m, $r_3 = 18\cdot10^{-3}$ m; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\eta = 5\cdot10^{3}$ s^{-1}, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 7. Diffusion of the current density in a conducting cylinder placed in the external longitudinal uniform magnetic field having a character of an damped sinusoid for r = const.; 1 – $r_1 = R = 20\cdot10^{-3}$ m, $r_2 = 19\cdot10^{-3}$ m, $r_3 = 18\cdot10^{-3}$ m; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\eta = 5\cdot10^{3}$ s^{-1}, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Rozkład gęstości prądu w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej z punktu widzenia tłumienia całkowitego jest podobny do rozkładu natężenia pola magnetycznego, z tym że zachodzi przesunięcie fazowe gęstości prądu w stosunku do natężenia pola magnetycznego. Ilustrują to rysunki 5, 6 i 7.

4. ZAKOŃCZENIE

Jeżeli współczynnik tłumienia zewnętrznego pola magnetycznego $\eta \approx 0$ (tak można przyjąć, gdy $\eta << \omega$), to argument zespolonej stałej propagacji $\varphi = \frac{\pi}{4}$ i wtedy $\alpha = \beta = k$, zaś zespolona stała propagacji

$$\underline{\Gamma} = \alpha + \mathrm{j}\beta = k + \mathrm{j}k = \sqrt{\varpi\,\mu\gamma}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\mathrm{j}}\,m, \tag{32}$$

gdzie współczynnik

$$m = \sqrt{\varpi\,\mu\gamma}\,. \tag{32a}$$

a kwadrat zespolonej stałej propagacji

$$\underline{\Gamma}^2 = \mathrm{j}\varpi\,\mu\gamma = \mathrm{j}m^2. \tag{33}$$

Wtedy też równanie operatorowe (14) i warunek brzegowy (15) pozostają niezmienione, przy czym $s_0 = \mathrm{j}\varpi$. Odpowiada to poszukiwaniu przebiegu nieustalonego natężenia pola magnetycznego w walcu przewodzącym po „włączeniu", podłużnego w stosunku do walca, zewnętrznego sinusoidalnie zmiennego pola magnetycznego, czyli

$$H_z^{zew}(t) = H_0 \sin(\varpi t + \xi)\,\mathbf{1}(t). \tag{34}$$

Otrzymane poprzednio rozwiązania dla pola elektromagnetycznego ulegną pewnym uproszczeniom, zaś zespolone natężenie pola magnetycznego można wtedy przedstawić jako sumę dwóch składników: składowej ustalonej i składowej przejściowej, tzn.

$$\underline{H}_z^I(r,t) = \underline{H}_{z,ust.}^I(r,t) + \underline{H}_{z,przej.}^I(r,t). \tag{35}$$

Zespolona składowa ustalona pola magnetycznego

$$\underline{H}_{z,ust.}^I(r,t) = \underline{H}_{z,0}^I(r,t) = \underline{H}_0 \frac{I_0(\sqrt{\mathrm{j}}\,m\,r)}{I_0(\sqrt{\mathrm{j}}\,m\,R)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varpi t}, \tag{35a}$$

oraz składowa przejściowa

$$\underline{H}^{I}_{z,przej}(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\underline{H}^{I}_{z,k}(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\underline{H}_{0}\frac{I_0(-\mathrm{j}\,x_k\frac{r}{R})}{\underline{A}_k(x_k)I_1(-\mathrm{j}\,x_k)}\exp[-\frac{x_k^2}{\mu\gamma R^2}t], \tag{35b}$$

przy czym współczynnik zespolony $\underline{A}_k(x_k)$ jest wtedy dany wzorem

$$\underline{A}_k(x_k)=\frac{1}{2x_k}(R^2\varpi\mu\gamma-\mathrm{j}\,x_k^2)=A_k(x_k)\exp[\mathrm{j}\,\alpha_k(x_k)], \tag{35c}$$

gdzie moduł

$$A_k(x_k)=\frac{1}{2x_k}\sqrt{(R^2\varpi\mu\gamma)^2+x_k^4} \tag{35d}$$

i argument

$$\alpha_k(x_k)=-\mathrm{arc\,tg}\frac{x_k^2}{R^2\varpi\mu\gamma}. \tag{35e}$$

Natężenie pola magnetycznego jako funkcja rzeczywista zmiennej r walcowego układu współrzędnych i czasu t wyraża się następująco:

$$H^{I}_{z}(r,t)=H^{I}_{z,ust.}(r,t)+H^{I}_{z,przej.}(r,t), \tag{36}$$

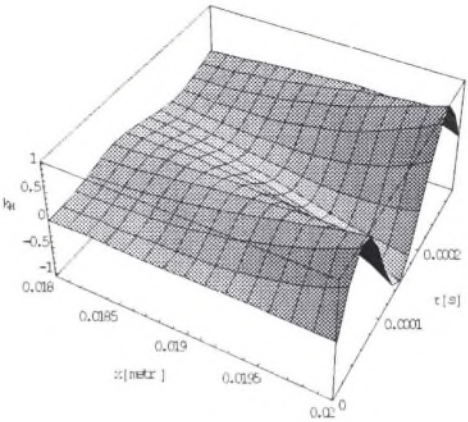
gdzie rzeczywista składowa ustalona pola magnetycznego

$$\begin{aligned}H^{I}_{z,ust.}(r,t)&=\mathrm{Im}\{\underline{H}^{I}_{z,ust.}(r,t)\}=\\&=H_0\frac{M_0(\sqrt{\mathrm{j}}\,m\,r)}{M_0(\sqrt{\mathrm{j}}\,m\,R)}\sin[\varpi\,t+\beta_0(\sqrt{\mathrm{j}}\,m\,r)-\beta_0(\sqrt{\mathrm{j}}\,m\,R)+\xi],\end{aligned} \tag{36a}$$

oraz rzeczywista składowa przejściowa pola magnetycznego

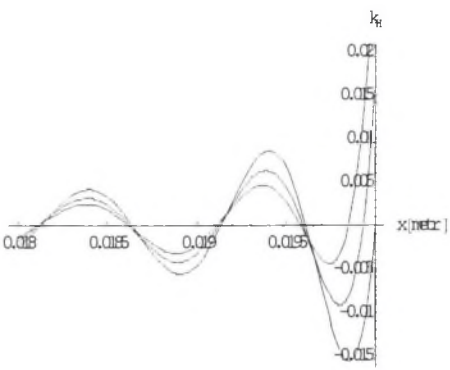
$$\begin{aligned}H^{I}_{z,przej.}(r,t)&=\mathrm{Im}\{\underline{H}^{I}_{z,przej.}(r,t)\}=\\&=\sum_{k=1}^{\infty}H_0\frac{M_0(-\mathrm{j}\,x_k\frac{r}{R})}{A_k(x_k)M_1(-\mathrm{j}\,x_k)}\exp[-\frac{x_k^2}{\mu\gamma R^2}t]\sin[\beta_{0,k}(-\mathrm{j}\,x_k\frac{r}{R})-\beta_{1,k}(-\mathrm{j}\,x_k)-\alpha_k(x_k)+\xi].\end{aligned} \tag{36b}$$

Rozkład czasowo – przestrzenny, wnikanie i tłumienie pola magnetycznego w walcu przewodzącym w przypadku $\eta\approx 0$, w postaci funkcji $k_H(r,t)=\frac{H^{I}_{z}(r,t)}{H_0}$, przedstawiono odpowiednio na rysunkach 8, 9 i10.



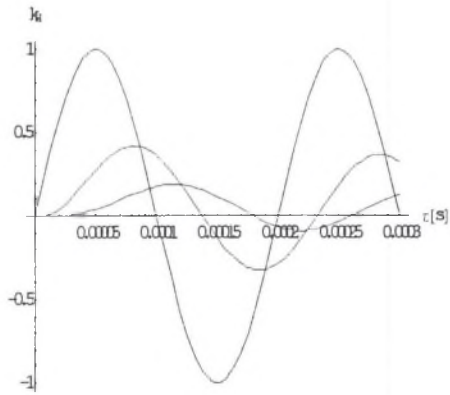
Rys. 8. Rozklad czasowo – przestrzenny natężenia pola magnetycznego w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym sinusoidalnie zmiennym równomiernym polu magnetycznym; $R = 2\cdot10^{-2}$m, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 8. Time-space distribution of the magnetic field strength in a conducting cylinder placed in the external longitudinal sine-shaped uniform magnetic field; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$



Rys. 9. Tlumienie pola magnetycznego w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym sinusoidalnie zmiennym równomiernym polu magnetycznym dla ωt = const; 1 – $\omega t_1 = 0$, 2 – $\omega t_2 = 0{,}005\,\pi$, 3 – $\omega t_3 = 0{,}01\,\pi$; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 9. Damping of the magnetic field inside a conducting cylinder placed in the external longitudinal sine-shaped uniform magnetic field for ωt = const; 1 – $\omega t_1 = 0$, 2 – $\omega t_2 = 0{,}005\,\pi$, 3 – $\omega t_3 = 0{,}01\,\pi$; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$



Rys. 10. Wnikanie pola magnetycznego wewnątrz walca przewodzącego umieszczonego w zewnętrznym podłużnym sinusoidalnie zmiennym równomiernym polu magnetycznym dla r = const; 1 – $r_1 = R = 20\cdot10^{-3}$ m, $r_2 = 19\cdot10^{-3}$ m, $r_3 = 18\cdot10^{-3}$ m; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 10. Diffusion of the magnetic field inside a conducting cylinder placed in the external longitudinal sine-shaped uniform magnetic field for r = const.; 1 – $r_1 = R = 20\cdot10^{-3}$ m, $r_2 = 19\cdot10^{-3}$ m, $r_3 = 18\cdot10^{-3}$ m; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

W przypadku zewnętrznego pola magnetycznego określonego wzorem (34) gęstość prądu w walcu przewodzącym może być, podobnie jak natężenie pola magnetycznego, przedstawiona jako suma składowej ustalonej i przejściowej, tzn.

$$\underline{J}_{\Theta}(r,t) = \underline{J}_{\Theta,ust.}(r,t) + \underline{J}_{\Theta,przej.}(r,t). \tag{37}$$

Zespolona składowa ustalona gęstości prądu

$$\underline{J}_{\Theta,ust.}(r,t) = \underline{J}_{\Theta,0}(r,t) = -\underline{H}_0 \frac{\sqrt{\mathrm{j}}\, m\, I_1(\sqrt{\mathrm{j}}\, m\, r)}{I_0(\sqrt{\mathrm{j}}\, m\, R)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varpi t}, \tag{37a}$$

oraz zespolona składowa przejściowa gęstości prądu

$$\underline{J}_{\Theta,przej.}(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{J}_{\Theta,k}(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{H}_0 \frac{\mathrm{j}\frac{x_k}{R} I_1(-\mathrm{j}\, x_k \frac{r}{R})}{\underline{A}_k(x_k)\, I_1(-\mathrm{j}\, x_k)} \exp[-\frac{x_k^2}{\mu\gamma R^2} t]. \tag{37b}$$

Gęstość prądu w walcu przewodzącym, jako funkcję rzeczywistą zmiennej r walcowego układu współrzędnych i czasu t, wyraża się następująco:

$$J_{\Theta}(r,t) = J_{\Theta,ust.}(r,t) + J_{\Theta,przej.}(r,t), \tag{38}$$

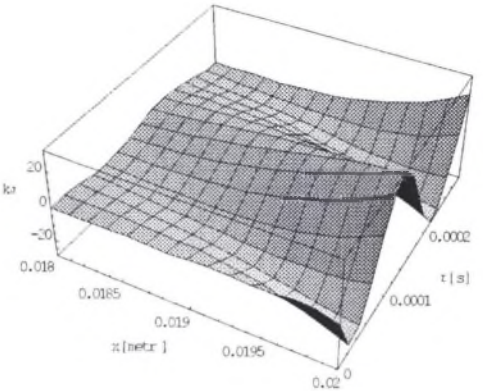
gdzie rzeczywista składowa ustalona gęstości prądu

$$\begin{aligned} J_{\Theta,ust.}(r,t) &= \mathrm{Im}\{\underline{J}_{\Theta,ust.}(r,t)\} = \\ &= -H_0 \frac{m\, M_1(\sqrt{\mathrm{j}}\, m\, r)}{M_0(\sqrt{\mathrm{j}}\, m\, R)} \sin[\varpi t + \beta_1(\sqrt{\mathrm{j}}\, m\, r) - \beta_0(\sqrt{\mathrm{j}}\, m\, R) + \frac{\pi}{4} + \xi], \end{aligned} \tag{38a}$$

oraz rzeczywista składowa przejściowa gęstości prądu

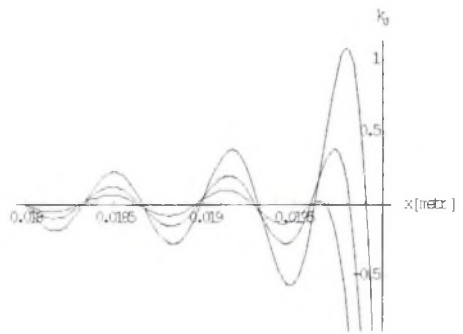
$$\begin{aligned} J_{\Theta,przej.}(r,t) &= \mathrm{Im}\{\underline{J}_{\Theta,przej.}(r,t)\} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} H_0 \frac{M_1(-\mathrm{j}\, x_k \frac{r}{R})}{A_k(x_k)\, M_1(-\mathrm{j}\, x_k)} \frac{x_k}{R} \exp[-\frac{x_k^2}{\mu\gamma R^2} t] \cos[\beta_{1,k}(-\mathrm{j}\, x_k \frac{r}{R}) - \beta_{1,k}(-\mathrm{j}\, x_k) - \alpha_k(x_k) + \xi]. \end{aligned} \tag{38b}$$

Rozkład gęstości prądu w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym sinusoidalnie zmiennym polu magnetycznym przedstawiono na rys.11, rys.12 i rys.13 za pomocą funkcji $k_J(r,t) = \frac{R\, J(r,t)}{H_0}$.



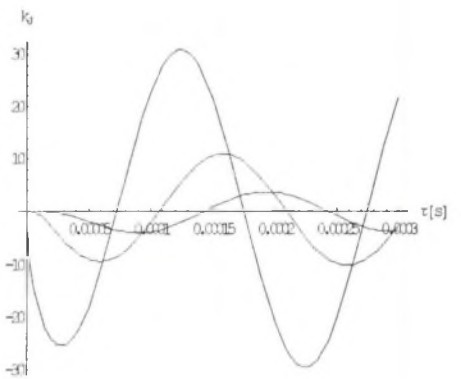
Rys. 11. Rozkład czasowo – przestrzenny gęstości prądu w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym sinusoidalnie zmiennym równomiernym polu magnetycznym; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 11. Time-space distribution of the current density in a conducting cylinder placed in the external longitudinal sine-shaped uniform magnetic field; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$



Rys. 12. Tłumienie gęstości prądu w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym sinusoidalnie zmiennym równomiernym polu magnetycznym dla ωt = const; 1 – $\omega t_1 = 0$, 2 – $\omega t_2 = 0{,}005\ \pi$, 3 – $\omega t_3 = 0{,}01\ \pi$; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 12. Damping of the current density in a conducting cylinder placed in the external longitudinal sine-shaped uniform magnetic field for ωt = const; 1 – $\omega t_1 = 0$, 2 – $\omega t_2 = 0{,}005\ \pi$, 3 – $\omega t_3 = 0{,}01\ \pi$; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$



Rys. 13. Wnikanie gęstości prądu wewnątrz walca przewodzącego umieszczonego w zewnętrznym podłużnym sinusoidalnie zmiennym równomiernym polu magnetycznym dla r = const; 1 – $r_1 = R = 20\cdot10^{-3}$ m, $r_2 = 19\cdot10^{-3}$ m, $r_3 = 18\cdot10^{-3}$ m; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 13. Diffusion of the current density inside a conducting cylinder placed in the external longitudinal sine-shaped uniform magnetic field for r = const ; 1 – $r_1 = R = 20\cdot10^{-3}$ m, $r_2 = 19\cdot10^{-3}$ m, $r_3 = 18\cdot10^{-3}$ m; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\omega = \pi\cdot10^{4}$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^{6}$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Jeżeli dla $\eta = 0$ (przypadek nietłumionego zewnętrznego pola magnetycznego) pominiemy stan przejściowy, tzn. jeżeli będziemy rozpatrywać walec przewodzący w zewnętrznym podłużnym ustalonym sinusoidalnie zmiennym polu magnetycznym, to składowe przejściowe znikną i pozostaną tylko składowe ustalone. Zespolone pole magnetyczne jest wtedy określone wzorem

$$\underline{H}_z^I(r,t) = \underline{H}_{z,ust}^I(r,t) = \underline{H}_z^I(r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}, \tag{39}$$

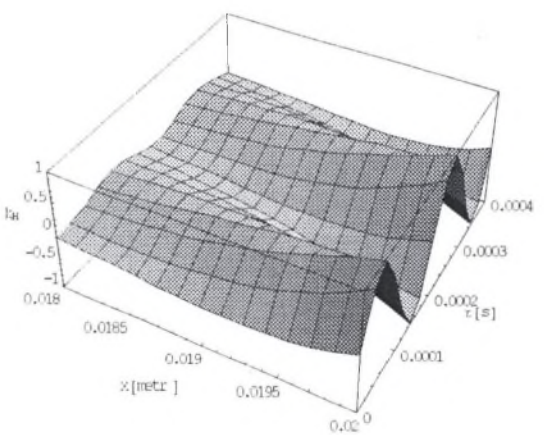
gdzie na podstawie wzoru (35a)

$$\underline{H}_z^I(r) = \underline{H}_0 \frac{I_0(\sqrt{\mathrm{j}}\, m\, r)}{I_0(\sqrt{\mathrm{j}}\, m\, R)}, \tag{39a}$$

co jest rozwiązaniem (podanym w [4], s. 199, wzór (9.109)) równania Besela ([4], s. 198, równanie (9.105))

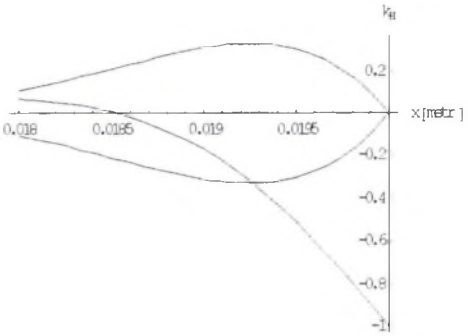
$$\frac{\mathrm{d}^2 \underline{H}_z^I(r)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\underline{H}_z^I(r)}{\mathrm{d}r} - \mathrm{j}\, m^2 \underline{H}_z^I(r) = 0. \tag{39b}$$

Natężenie pola magnetycznego, jako funkcja rzeczywista zmiennej r walcowego układu współrzędnych i czasu t, odpowiadające rozwiązaniu (39) dane jest wtedy wzorem (36a). Rozkład czasowo – przestrzenny, wnikanie i tłumienie pola magnetycznego w walcu przewodzącym w przypadku ustalonego sinusoidalnie zmiennego zewnętrznego pola magnetycznego , w postaci funkcji $k_H(r,t) = \dfrac{H_z^I(r,t)}{H_0}$, przedstawiono odpowiednio na rysunkach 14, 15 i 16.



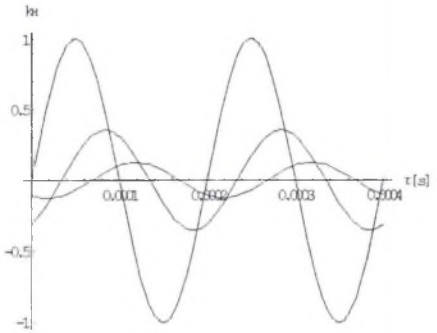
Rys. 14. Rozkład czasowo – przestrzenny natężenia pola magnetycznego w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym ustalonym sinusoidalnie zmiennym równomiernym polu magnetycznym; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\omega = \pi\cdot10^4$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 14. Time-space distribution of the magnetic field in a conducting cylinder placed in the external longitudinal steady sine-shaped uniform magnetic field; $R = 2\cdot10^{-2}$ m, $\omega = \pi\cdot10^4$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$



Rys. 15. Tłumienie pola magnetycznego w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym ustalonym sinusoidalnie zmiennym równomiernym polu magnetycznym dla ωt = const; 1 – ωt_1 = 0, 2 – ωt_2 = 0,005 π, 3 – ωt_3 = 0,01 π; R =2·10^{-2} m, ω = π·10^4 rad·s^{-1}, γ = 58·10^6 S·m^{-1}, ξ = 0

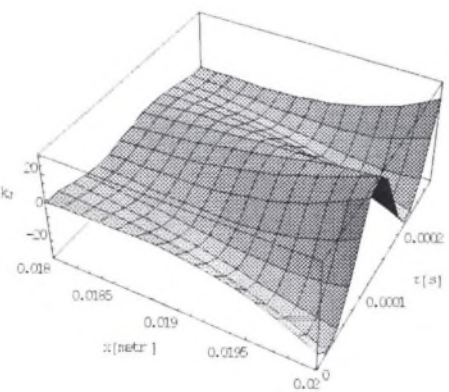
Fig. 15. Damping of the magnetic field in a conducting cylinder placed in the external longitudinal steady sine-shaped uniform magnetic field for ωt = const; 1 – ωt_1 = 0, 2 – ωt_2 = 0,005 π, 3 – ωt_3 = 0,01 π; R =2·10^{-2} m, ω = π·10^4 rad·s^{-1}, γ = 58·10^6 S·m^{-1}, ξ = 0



Rys. 16. Wnikanie pola magnetycznego wewnątrz walca przewodzącego umieszczonego w zewnętrznym podłużnym ustalonym sinusoidalnie zmiennym równomiernym polu magnetycznym dla r = const ; 1 – r_1 = R = 20·10^{-3} m, r_2 = 19·10^{-3} m, r_3 = 18·10^{-3} m; R = 2·10^{-2} m, ω = π·10^4 rad·s^{-1}, γ = 58·10^6 S·m^{-1}, ξ = 0

Fig. 16. Diffusion of the magnetic field inside a conducting cylinder placed in the external longitudinal staeady sine-shaped uniform magnetic field for r = const ; 1 – r_1 = R = 20·10^{-3} m, r_2 = 19·10^{-3} m, r_3 = 18·10^{-3} m; R =2·10^{-2} m, ω = π·10^4 rad·s^{-1}, γ = 58·10^6 S·m^{-1}, ξ = 0

Dla wyżej wymienionego przypadku, ustalonego sinusoidalnie zmiennego zewnętrznego pola magnetycznego, zespolona gęstość prądu w walcu przewodzącym jest równa:



Rys. 17. Rozkład czasowo – przestrzenny gęstości prądu w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym ustalonym sinusoidalnie zmiennym równomiernym polu magnetycznym; R = 2·10^{-2} m, ω = π·10^4 rad·s^{-1}, γ = 58·10^6 S·m^{-1}, ξ = 0

Fig. 17. Time-space distribution of the current density in a conducting cylinder placed in the external longitudinal stable sine-shaped uniform magnetic field; R = 2·10^{-2} m, ω = π·10^4 rad·s^{-1}, γ = 58·10^6 S·m^{-1}, ξ = 0

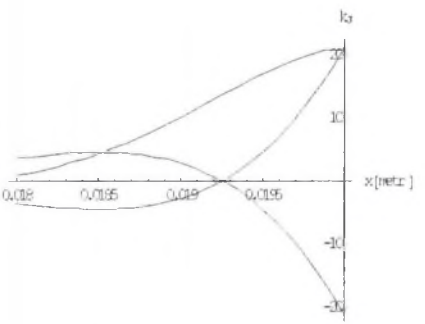
$$\underline{J}_{\Theta}(r,t) = \underline{J}_{\Theta,ust}(r,t) = \underline{J}_{\Theta}(r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,, \tag{40}$$

gdzie

$$\underline{J}_{\Theta}(r) = -\underline{H}_0 \frac{\sqrt{\mathrm{j}}\, m\, I_1(\sqrt{\mathrm{j}}\, m\, r)}{I_0(\sqrt{\mathrm{j}}\, m\, R)}\,, \tag{40a}$$

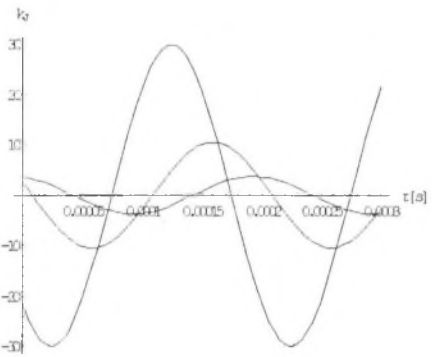
co odpowiada rozwiązaniu podanym przez M. Krakowskiego w pracy [4] (wzór (9.110), s. 199).

Gęstość prądu, jako funkcja rzeczywista zmiennej r walcowego układu współrzędnych i czasu t, odpowiadająca rozwiązaniu (40), dana jest wtedy wzorem (38a). Rozkład gęstości prądu w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym ustalonym sinusoidalnie zmiennym polu magnetycznym przedstawiono na rysunkach 17, 18 i 19 za pomocą funkcji $k_J(r,t) = \dfrac{R\,J(r,t)}{H_0}$.



Rys. 18. Tlumienie gęstości prądu w walcu przewodzącym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym ustalonym sinusoidalnie zmiennym równomiernym polu magnetycznym dla ωt = const; 1 – $\omega t_1 = 0$, 2 – $\omega t_2 = 0{,}005\,\pi$, 3 – $\omega t_3 = 0{,}01\,\pi$; $R = 2\cdot 10^{-2}$ m, $\omega = \pi\cdot 10^4$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot 10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 18. Damping of the current density in a conducting cylinder placed in the external longitudinal steable sine-shaped uniform magnetic field for ωt = const; 1 – $\omega t_1 = 0$, 2 – $\omega t_2 = 0{,}005\,\pi$, 3 – $\omega t_3 = 0{,}01\,\pi$; $R = 2\cdot 10^{-2}$ m, $\omega = \pi\cdot 10^4$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot 10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$



Rys. 19. Wnikanie gęstości prądu wewnątrz walca przewodzącego umieszczonego w zewnętrznym podłużnym ustalonym sinusoidalnie zmiennym równomiernym polu magnetycznym dla r = const; 1 – $r_1 = R = 20\cdot 10^{-3}$ m, $r_2 = 19\cdot 10^{-3}$ m, $r_3 = 18\cdot 10^{-3}$ m; $R = 2\cdot 10^{-2}$ m, $\omega = \pi\cdot 10^4$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot 10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 19. Diffusion of the current density in a conducting cylinder placed in the external longitudinal steable sine-shaped uniform magnetic field for r = const; 1 – $r_1 = R = 20\cdot 10^{-3}$ m, $r_2 = 19\cdot 10^{-3}$ m, $r_3 = 18\cdot 10^{-3}$ m; $R = 2\cdot 10^{-2}$ m, $\omega = \pi\cdot 10^4$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58\cdot 10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

LITERATURA

1. Bednarek S.: *Konstrukcja cewki do nieniszczącego wytwarzania ekstremalnie silnych impulsowych pól magnetycznych*. Przegląd Elektrotechniczny, Rok: LXXVII, Nr 1, 2001.
2. Dobrogowski J., Kołaczkowski Z., Tychowski F.: *Tłoczenie metali impulsowym polem magnetycznym*. PWN, Warszawa – Poznań 1979.
3. Kołaczkowski Z.: *Kształtowanie wybranych biomateriałów i materiałów protetyki medycznej przy wykorzystaniu wysokonapięciowego generatora udarów prądowych*. Wyd. Akad. Wych. Fiz., Seria: Monografie, Nr 344, Poznań 2000.
4. Krakowski M.: *Elektrotechnika teoretyczna. Tom 2. Pole elektromagnetyczne*. Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 1995.
5. McLachlan N. W.: *Funkcje Bessela dla inżynierów*. PWN, Warszawa 1964.
6. Szulkin P., Pogorzelski S.: *Podstawy teorii pola elektromagnetycznego*. WNT, Warszawa 1964.
7. Tamm I. E.: *Podstawy teorii elektryczności*. WNT, Warszawa 1967.
8. Turowski J.: *Elektrodynamika techniczna*. WNT, Warszawa 1993.

Wpłynęło do Redakcji dnia 5 stycznia 2002 r.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Ryszard Nawrowski

Abstract

During the process of the magnetic forming of metals e.g. of the conducting cylinder shown in Fig.1, external magnetic field is longitudinal in relation to the cylinder and it has the character of a damped sinusoid - see equation (1a). The magnetic field strength inside the cylinder ($0 \le r \le R$) is then defined by the differential equation (11) with boundary condition (12) and initial rest condition (12a). Applying Laplace transformation in relation to time t to equation (11) yields Bessel equation (14) of zero order in relation to variable of the cylindrical coordinate system.

Complex solution (17) of this equation enables, after using inverse Laplace transformation, the determination of the magnetic field strength inside the cylinder as a function of the real variable r and time t - equations (25), (26) and (27). The time-space distribution of this magnetic field strength is shown in Fig. 2, its curve as a function of variable r in Fig.3, as a in function of time t in Fig.4.

The determined magnetic field strength is the basis for determination of the current density- equations (30), (30a) and (30b), whose distribution is shown in Figs. 5, 6 and 7.

Assuming a very small damping the external magnetic field ($\eta \approx 0$) enables us to reduce the discussed question to the case of transient magnetic field with sine-shaped external field. Then, we can determine the magnetic field strength- equations (36), (36a) and (36b) together with relevant graphs- Figs. 8, 9 and 10, as well as the current density- equations (38), (38a) and (38b) with relevant graphs- Figs. 11, 12 and 13.

Next, we reduce further considerations to the steady state of the electromagnetic field in a cylinder placed in sine-shaped longitudinal external magnetic field. Then the magnetic field strength in the cylinder is determined- equation (39a), together with relevant distribution graphs- see Figs. 14, 15 and 16, and the current density- equation (40a) and its distribution- see Figs. 17, 18 and 19.