ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2002
Seria: ELEKTRYKA z.182 Nr kol. 1551

Krzysztof DĘBOWSKI, Marian PASKO

O MOŻLIWOŚCI OPTYMALIZACJI ZŁOŻONYCH SIECI ELEKTRYCZNYCH Z BEZINERCYJNYMI ODBIORNIKAMI NIELINIOWYMI

Streszczenie. Problemy prezentowane w artykule dotyczą złożonych sieci elektrycznych z sinusoidalnymi źródłami napięcia i bezinercyjnymi odbiornikami nieliniowymi. W modelu sieci elektrycznej zostały uwzględnione również parametry układu transmisyjnego. Rozwiązanie problemu oparte jest na dziedzinie częstotliwości. Prezentowana metoda może być stosowana dla układów z pewną klasą nieliniowych odbiorników, tzn. dla układów z elementami bezinercyjnymi, które pobierają moc czynną dla podstawowej harmonicznej napięcia źródła, oraz w których prądy układu są okresowe. Wspomniana moc czynna stanowi dodatkowy warunek prezentowanej optymalizacji. Rozwiązanie (prądy optymalne) otrzymywane jest za pomocą mnożników Lagrange'a i odpowiedniego eksperymentu pomiarowego. Ostatni etap metody polega na wyznaczeniu parametrów kompensatora, który włączony do rozpatrywanego układu spowoduje przepływ prądów optymalnych źródła. Ten punkt pracy może być uzyskany za pomocą liniowych kompensatorów LC, RLC lub (RLC,-R).

ABOUT POSSIBILITIES OF OPTIMISATION OF COMPLEX ELECTRICAL NETWORKS WITH INERTIALESS NONLINEAR LOADS

Summary. Problems presented in the paper deal with a three-phase three-wire system with sinusoidal voltage sources and nonlinear loads. In the model of the three-phase voltage source the inner impedance has been included. The solution of this problem is based on the frequency domain. This method can be used for systems with some classes of nonlinear loads, i.e. for inertialess elements that consume the active power of the voltage source basic harmonic, and when the system currents are periodic . The above mentioned power is an additional condition of the presented minimisation. The solution (the active currents) is obtained by means of Lagrange factors and a suitable measurement experiment. The last stage of this method is the determination of the parameters of a compensator that connected to the system under consideration causes the flow of the voltage source active currents. This working point for the three-phase three-wire system can be obtained by means of LC, RLC or (RLC,-R) compensators.

1. WPROWADZENIE

Celem artykułu jest prezentacja możliwości optymalizacji punktu pracy złożonych sieci elektrycznych z bezinercyjnymi nieliniowymi odbiornikami. Podejście optymalizacyjne dla układów liniowych prowadzące do wyznaczenia prądów optymalnych źródła napięcia, a następnie na podstawie znajomości prądów optymalnych i napięć na zaciskach odbiornika do wyznaczenia parametrów kompensatora prezentowane było w wielu publikacjach opartych zarówno na dziedzinie czasowej, jak i częstotliwościowej, np. [1], [2], [3], [4]. Artykuł jest kontynuacją wcześniejszych publikacji autorów dotyczących możliwości minimalizacji wartości skutecznej prądów fazowych w układach trójfazowych [6], [7]. Prezentowana metoda może być stosowana dla pewnej klasy nieliniowych odbiorników, tzn. dla układów z elementami bezinercyjnymi, które pobierają moc czynną dla podstawowej harmonicznej napięcia źródła, oraz w których prądy układu są okresowe. Rozwiązanie problemu optymalizacji (wyznaczenie prądu optymalnego) rozumiane jest jako wyznaczenie prądu źródła o minimalnej wartości skutecznej przy narzuconym warunku ubocznym na moc czynną P. Warunek uboczny na moc czynną P może mieć jedną z trzech postaci:

a) moc czynna wydawana przez źródło napięcia jest taka sama przed i po optymalizacji;
b) moc czynna pobierana przez odbiorniki sieci jest taka sama przed i po optymalizacji;
c) kompensator nie pobiera mocy czynnej.

Wspomniane rozwiązanie otrzymywane jest za pomocą mnożników Lagrange'a i odpowiedniego eksperymentu pomiarowego identyfikacji nieliniowych odbiorników i parametrów sieci. Otrzymanie rozwiązania w postaci analitycznej jest trudne i konieczne jest użycie algorytmu numerycznego. Ostatnim etapem metody jest wyznaczenie parametrów kompensatora, którego włączenie do układu wywołuje przepływ prądów optymalnych źródeł. Taki punkt pracy może być uzyskany za pomocą liniowych kompensatorów LC, RLC lub (RLC,-R). Zakłada się, że kompensator będzie włączany bezpośrednio na zaciski odbiornika.

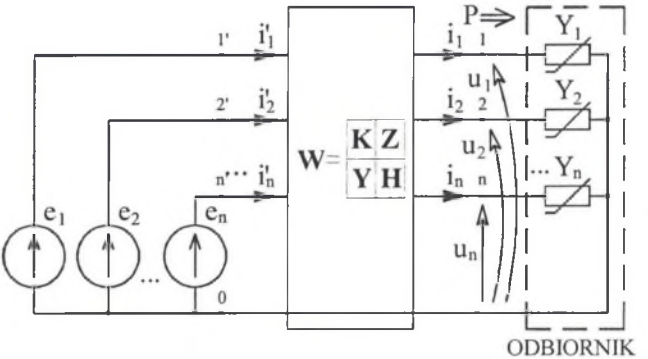
2. OPIS EMENTÓW SIECI I SFORMUŁOWANIE PROBLEMU OPTYMALIZACJI

Modelowana sieć przedstawiona jest na rys.1. Rozpatrywany układ zawiera skończoną liczbę sinusoidalnych źródeł napięcia SEM $e_1, e_2, ..., e_n, n \in N$. W stosunku do rozpatrywanego układu (rys.1) zakłada się, że:

a) źródła napięcia opisane są zależnością:

$$e_\alpha(t) = \sqrt{2}\mathrm{Re}\{E_\alpha \exp(j\omega t)\}, \alpha = 1, 2, ...n, n \in N; \tag{1}$$

gdzie: E_α – zespolona wartość skuteczna napięcia źródła;



Rys. 1. Rozpatrywany układ
Fig. 1. The considered system

b) operator **W** układu transmisyjnego jest macierzą hybrydową reprezentowaną przez cztery macierze **K, Z, Y, H** o wymiarach n x n, określające parametry układu transmisyjnego dla podstawowej harmonicznej napięcia źródeł; w oparciu o znajomość wspomnianych macierzy blokowych możliwe jest zapisanie zależności określających wartości zespolonych wartości skutecznych prądów i napięć na zaciskach odbiorników dla podstawowej harmonicznej napięcia źródła:

$$\mathbf{U} = \mathbf{KE} + \mathbf{ZI}', \tag{2a}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{YE} + \mathbf{HI}'; \tag{2b}$$

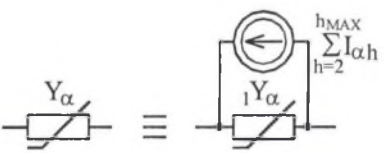
gdzie:

$\mathbf{U} = \mathrm{col}[U_1, U_2, ..., U_n]$ - napięcia fazowe (zespolone wartości skuteczne) na zaciskach odbiorników dla podstawowej harmonicznej napięcia źródła;

$\mathbf{I} = \mathrm{col}[I_1, I_2, ..., I_n]$ - prądy nieliniowych odbiorników (zespolone wartości skuteczne) dla podstawowej harmonicznej napięcia;

$\mathbf{E} = \mathrm{col}[E_1, E_2, ..., E_n]$ - napięcia fazowe (zespolone wart. skuteczne) idealnych sił elektromotorycznych źródła napięcia;

$\mathbf{I}' = \mathrm{col}[I_1', I_2', ..., I_n']$ - prądy fazowe (zespolone wartości skuteczne) idealnych sił elektromotorycznych źródła napięcia;



Rys. 2. Model nieliniowego odbiornika
Fig. 2. The model of nonlinear load

c) przebiegi czasowe prądów nieliniowych odbiorników są okresowe z dominującymi drganiami harmonicznymi, a każdy z rozpatrywanych odbiorników nieliniowych modelowany jest w sposób przedstawiony na rys. 2, tzn. element nieliniowy ${}_1Y_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, ..., n$) reprezentuje sobą admitancję dla podstawowej harmonicznej występującej w napięciu źródła (podejście to stanowi pewną analogię do metody funkcji opisującej [8]), natomiast

źródła prądowe reprezentują prądy wyższych harmonicznych generowanych przez element nieliniowy [6], [7].

Należy zaznaczyć, że admitancja odbiornika ${}_1Y_\alpha$ w odróżnieniu od wcześniej proponowanych podejść nie jest określona dla konkretnego punktu pracy (linearyzowana w okolicy punktu pracy), lecz znana jest charakterystyka admitancji elementu nieliniowego w funkcji wartości skutecznej napięcia na nim panującego:

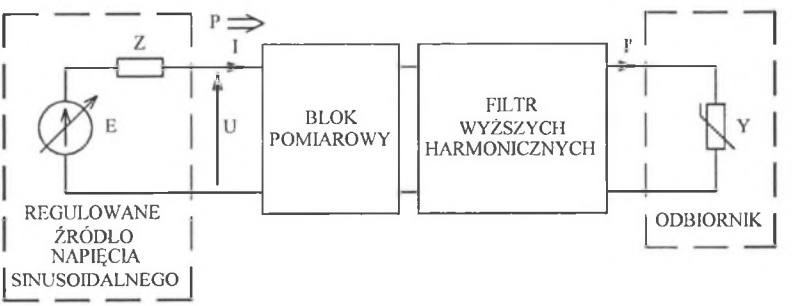
$$ {}_1Y_\alpha\big|_{|U_\alpha|} = {}_1G_\alpha\big|_{|U_\alpha|} + j\,{}_1B_\alpha\big|_{|U_\alpha|};\ \alpha = 1, 2, \ldots n,\ n \in N\ . \tag{3}$$

Aby uzyskać powyższą charakterystykę, należy wykonać eksperyment pomiarowy przedstawiony na rys.3, podobny do cyklu pomiarów mających na celu określenie kształtu charakterystyki napięciowo-prądowej elementu nieliniowego, mianowicie:

a) w bloku oznaczonym jako filtr wyższych harmonicznych zostają odfiltrowane wszystkie wyższe harmoniczne prądu generowane przez element nieliniowy tak, że w obwodzie źródła płynie tylko pierwsza harmoniczna prądu odpowiadająca częstotliwości napięcia źródła;
b) w bloku pomiarowym dla kolejnych wartości napięcia źródła dokonywany zostaje pomiar wartości skutecznej napięcia U, wartości skutecznej prądu I, mocy czynnej P oraz następuje obserwacja wartości przesunięcia czasowego φ pomiędzy przebiegami czasowymi prądu i napięcia;
c) na podstawie zmierzonych wartości poprzez aproksymację krzywych można wyznaczyć charakterystyki parametrów odbiornika nieliniowego dla podstawowej harmonicznej w oparciu o ogólnie znane zależności:

$$G_\alpha = G\big|_{|U|} = \frac{P}{|U|^2};\quad B_\alpha = B\big|_{|U|} = \frac{\sqrt{(|U||I|)^2 - P^2}}{|U|^2};\quad \alpha = a, b, c;$$

przy czym charakter susceptancji B (indukcyjny lub pojemnościowy) określić można z obserwacji przesunięcia czasowego φ pomiędzy przebiegami czasowymi prądu i napięcia.



Rys. 3. Układ pomiarowy
Fig. 3. Measuring system

Problem optymalizacji warunków pracy złożonej sieci elektrycznej rozumiany jest jako minimalizacja wartości skutecznej jej prądów fazowych:

$$\min_{i} J = \min_{(i)} \|i\|^2, \tag{4}$$

z zachowaniem jednego z warunków na moc czynną układu:

a) moc czynna wydawana przez trójfazowe źródło (z uwzględnieniem układu transmisyjnego) jest taka sama przed i po minimalizacji;
b) moc czynna pobierana przez nieliniowy odbiornik jest taka sama przed i po optymalizacji;
c) włączany do rozpatrywanego układu kompensator nie pobiera mocy czynnej.

Zakładając istnienie macierzy odwrotnej $\mathbf{H}^{-1}$ oraz wykorzystując równania (2a,b), poszczególne warunki na moc czynną układu P mogą być zapisane w dziedzinie częstotliwości w następującej postaci:

$$\text{a) } P = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{U}^T\mathbf{I}^*\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left[\left(\mathbf{K}-\mathbf{ZH}^{-1}\mathbf{Y}\right)\mathbf{E}\right]^T\mathbf{I}^* + \left[\mathbf{ZH}^{-1}\mathbf{I}\right]^T\mathbf{I}^*\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left[\mathbf{FE}\right]^T\mathbf{I}^* + \left[\mathbf{NI}\right]^T\mathbf{I}^*\right\}, \tag{5a}$$

$$\text{b) } P = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{U}^T\,{}_1\mathbf{Y}^*\Big|_{|U|}\mathbf{U}^*\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left[\mathbf{FE}+\mathbf{NI}\right]^T\,{}_1\mathbf{Y}^*\Big|_{|U|}\left[\mathbf{FE}+\mathbf{NI}\right]^*\right\}, \tag{5b}$$

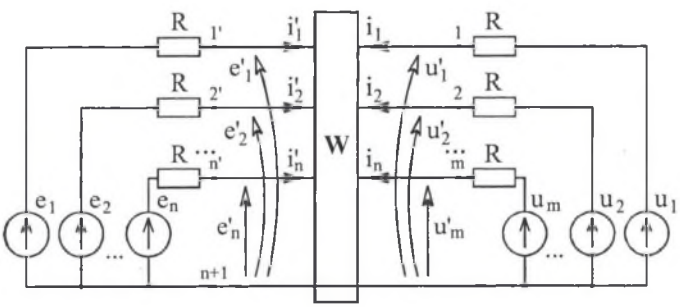
$$\text{c) } \mathrm{Re}\left\{\mathbf{U}^T\mathbf{I}^*\right\} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{U}^T\,{}_1\mathbf{Y}^*\Big|_{|U|}\mathbf{U}^*\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left[\mathbf{FE}\right]^T\mathbf{I}^* + \left[\mathbf{NI}\right]^T\mathbf{I}^*\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left[\mathbf{FE}+\mathbf{NI}\right]^T\,{}_1\mathbf{Y}^*\Big|_{|U|}\left[\mathbf{FE}+\mathbf{NI}\right]^*\right\}, \tag{5c}$$

gdzie: $\mathbf{F} = \mathbf{K} - \mathbf{ZH}^{-1}\mathbf{Y};\ \mathbf{N} = \mathbf{ZH}^{-1}$. (6)

Wówczas problem optymalizacyjny (4), przykładowo dla warunku na moc czynną w postaci (5c), może być zapisany w dziedzinie częstotliwości dla podstawowej harmonicznej napięcia źródła, jako następujący funkcjonał Lagrange'a:

$$L_c(\mathbf{I},\lambda) = \mathbf{I}^T\mathbf{I}^* + \lambda\left[\mathrm{Re}\left\{\left[\mathbf{FE}\right]^T\mathbf{I}^* + \left[\mathbf{NI}\right]^*\mathbf{I}^*\right\}\right] - \lambda\left[\mathrm{Re}\left\{\left[\mathbf{FE}+\mathbf{NI}\right]^T\,{}_1\mathbf{Y}\Big|_{|U|}^*\left[\mathbf{FE}+\mathbf{NI}\right]^*\right\}\right]. \tag{7}$$

W celu wyznaczenia minimum funkcjonału (7) konieczne jest określenie parametrów macierzy $\mathbf{K},\mathbf{Z},\mathbf{Y},\mathbf{H}$. Poniżej przedstawiona zostanie idea algorytmu numerycznego identyfikacji takiej macierzy [5], który pozwoli wygenerować nieznane operatory macierzowe $\mathbf{K},\mathbf{Z},\mathbf{Y},\mathbf{H}$ dla dowolnie złożonej struktury wewnętrznej operatora $\mathbf{W}$ za pomocą serii odpowiednich pomiarów. Modelowana sieć modyfikowana jest do postaci przedstawionej na rys. 4, przy czym ogólnie zakłada się $n \neq m$ (n-liczba przewodów fazowych od strony źródeł, m-liczba przewodów fazowych od strony odbiorników).



Rys. 4. Identyfikacja operatora **W**
Fig. 4. Identification of the operator **W**

Bezpośrednie wyznaczenie parametrów macierzy $\mathbf{K}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{H}$ nie jest możliwe, ponieważ wielkości $\mathbf{E}, \mathbf{I}'$ nie są wielkościami niezależnymi. Dlatego generacja tych macierzy odbywa się w trzech etapach.

Etap I. W pierwszym etapie układ opisany jest równaniem:

$$\begin{bmatrix} I_1' \\ \cdot \\ I_{n1}' \\ \hline I_1 \\ \cdot \\ I_m \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \hline \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{array}\right]}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} E_1' \\ \cdot \\ E_n' \\ \hline U_1' \\ \cdot \\ U_m' \end{bmatrix}, \tag{8}$$

a poszukiwane są wartości macierzy $\mathbf{A}$ (macierz $\mathbf{A}_1$ o wymiarach n x n, $\mathbf{A}_2$ o wymiarach n x m, $\mathbf{A}_3$ o wymiarach m x n, $\mathbf{A}_4$ o wymiarach m x m). Macierz $\mathbf{A}$ określana jest w wyniku kolejnego wyznaczania wartości parametrów jej wierszy. Wyznaczenie wartości parametrów pierwszego wiersza macierzy $\mathbf{A}$ dokonywane jest następująco:

a) w sposób losowy zadaje się wartości wektorów $\mathbf{E}, \mathbf{U}$;

b) metodą węzłową wyznacza się wartości prądów $\mathbf{I}, \mathbf{I}'$ oraz napięć $\mathbf{E}', \mathbf{U}'$;

c) równanie pierwszego wiersza zależności (8) ma postać:

$$I_1^{(1)} = \mathbf{A}_1(1,1)E_1'^{(1)} + \mathbf{A}_1(1,2)E_2'^{(1)} + \ldots + \mathbf{A}_1(1,n)E_n'^{(1)} + \mathbf{A}_2(1,1)U_1'^{(1)} + \mathbf{A}_2(1,2)U_2'^{(1)} + \ldots + \mathbf{A}_2(1,m)U_m'^{(1)}; \tag{9}$$

d) powtarza się pomiary modyfikując losowo wartości $\mathbf{E}, \mathbf{U}$; otrzymuje się wówczas równanie pierwszego wiersza o poniższej postaci (10):

$$I_1^{(2)} = \mathbf{A}_1(1,1)E_1'^{(2)} + \mathbf{A}_1(1,2)E_2'^{(2)} + \ldots + \mathbf{A}_1(1,n)E_n'^{(2)} + \mathbf{A}_2(1,1)U_1'^{(2)} + \mathbf{A}_2(1,2)U_2'^{(2)} + \ldots + \mathbf{A}_2(1,m)U_m'^{(2)}; \tag{10}$$

e) modyfikacja pomiarów polegająca na losowym zadawaniu wartości $\mathbf{E}, \mathbf{U}$ powtarzana jest n+m razy; otrzymuje się następujący układ równań o postaci (11):

$$\begin{aligned} I_1^{(1)} &= \mathbf{A}_1(1,1)E_1'^{(1)} + \mathbf{A}_1(1,2)E_2'^{(1)} + \ldots + \mathbf{A}_1(1,n)E_n'^{(1)} + \mathbf{A}_2(1,1)U_1'^{(1)} + \mathbf{A}_2(1,2)U_2'^{(1)} + \ldots + \mathbf{A}_2(1,m)U_m'^{(1)} \\ I_1^{(2)} &= \mathbf{A}_1(1,1)E_1'^{(2)} + \mathbf{A}_1(1,2)E_2'^{(2)} + \ldots + \mathbf{A}_1(1,n)E_n'^{(2)} + \mathbf{A}_2(1,1)U_1'^{(2)} + \mathbf{A}_2(1,2)U_2'^{(2)} + \ldots + \mathbf{A}_2(1,m)U_m'^{(2)} \\ &\ldots \\ I_1^{(n+m)} &= \mathbf{A}_1(1,1)E_1'^{(n+m)} + \mathbf{A}_1(1,2)E_2'^{(n+m)} + \ldots + \mathbf{A}_1(1,n)E_n'^{(n+m)} + \\ &\quad + \mathbf{A}_2(1,1)U_1'^{(n+m)} + \mathbf{A}_2(1,2)U_2'^{(n+m)} + \ldots + \mathbf{A}_2(1,m)U_m'^{(n+m)} \end{aligned} \tag{11}$$

f) z rozwiązania układu równań (11) wyznacza się parametry pierwszego wiersza macierzy $\mathbf{A}$;

g) następnie należy powtórzyć czynności a-f dla pozostałych wierszy macierzy $\mathbf{A}$, wyznaczając w ten sposób wszystkie jej parametry.

Etap II. W etapie drugim układ opisany jest równaniem:

$$\begin{bmatrix} E_1' \\ \cdot \\ E_n' \\ \hline U_1' \\ \cdot \\ U_m' \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{array}\right]}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} I_1' \\ \cdot \\ I_n' \\ \hline I_1 \\ \cdot \\ I_m \end{bmatrix}, \tag{12}$$

a poszukiwane są parametry macierzy **B** (macierz $\mathbf{B}_1$ o wymiarach n x n, $\mathbf{B}_2$ o wymiarach n x m, $\mathbf{B}_3$ o wymiarach m x n, $\mathbf{B}_4$ o wymiarach m x m). W tym przypadku wartości $\mathbf{I}, \mathbf{I}'$ stanowią wymuszenia siłami prądomotorycznymi. W rzeczywistości etap II jest odwróceniem etapu I (zamianą wymuszeń i odpowiedzi); na jego potrzeby można wykorzystać wartości $\mathbf{I}, \mathbf{I}', \mathbf{E}', \mathbf{U}'$ z etapu I i w analogiczny sposób jak dla etapu I wyznaczyć kolejno wszystkie wiersze macierzy **B**.

Etap III. Z równania (12) otrzymuje się zależność:

$$\mathbf{U}' = \mathbf{B}_3\mathbf{I}' + \mathbf{B}_4\mathbf{I}. \tag{13}$$

Z równania (8) można zapisać:

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}_3\mathbf{E}' + \mathbf{A}_4\mathbf{U}'. \tag{14}$$

Po rozwiązaniu układu równań (13), (14) otrzymuje się zależności podobne do równań o postaci (2.a,b):

$$\mathbf{U}' = \left[(1 - \mathbf{B}_4\mathbf{A}_4)^{-1}\mathbf{B}_4\mathbf{A}_3\right]\mathbf{E}' + \left[(1 - \mathbf{B}_4\mathbf{A}_4)^{-1}\mathbf{B}_3\right]\mathbf{I}',$$
$$\mathbf{I} = \left[(1 - \mathbf{A}_4\mathbf{B}_4)^{-1}\mathbf{A}_3\right]\mathbf{E}' + \left[(1 - \mathbf{A}_4\mathbf{B}_4)^{-1}\mathbf{A}_4\mathbf{B}_3\right]\mathbf{I}'.$$

Stąd:

$$\mathbf{K} = (1 - \mathbf{B}_4\mathbf{A}_4)^{-1}\mathbf{B}_4\mathbf{A}_3;\quad \mathbf{Z} = (1 - \mathbf{B}_4\mathbf{A}_4)^{-1}\mathbf{B}_3;\quad \mathbf{Y} = (1 - \mathbf{A}_4\mathbf{B}_4)^{-1}\mathbf{A}_3;\quad \mathbf{H} = (1 - \mathbf{A}_4\mathbf{B}_4)^{-1}\mathbf{A}_4\mathbf{B}_3. \tag{15}$$

Przedstawiona zależność (6) zakłada, że istnieje macierz odwrotna $\mathbf{H}^{-1}$ oraz że n=m. Przedstawiony algorytm pozwala wyznaczyć wartości macierzy $\mathbf{K}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{H}$ dla przypadku ogólnego $n \neq m$. Ponieważ dla $n \neq m$ nie istnieje macierz $\mathbf{H}^{-1}$, zatem dla przypadku ogólnego ulegnie modyfikacji warunek uboczny na moc czynną (5) funkcjonału (7).

Opierając się na znajomości wyznaczonych macierzy **A** i **B**, z zależności (8) i (12) można zapisać następujące równania:

$$\mathbf{U} = \mathbf{B}_3\mathbf{I}' + \mathbf{B}_4\mathbf{I}, \tag{16}$$

$$\mathbf{I}' = \mathbf{A}_1\mathbf{E} + \mathbf{A}_2\mathbf{U}, \tag{17}$$

na podstawie których otrzymuje się zależność:

$$\mathbf{U} = (1 - \mathbf{B}_3\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_3\mathbf{A}_1\mathbf{E} + (1 - \mathbf{B}_3\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_4\mathbf{I}, \tag{18}$$

lub w zwięzłej postaci: $\mathbf{U} = \mathbf{FE} + \mathbf{NI}$; (19)

gdzie:

$\mathbf{F} = (\mathbf{1} - \mathbf{B}_3\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_3\mathbf{A}_1$ - macierz o wymiarach m x n; (20)

$\mathbf{N} = (\mathbf{1} - \mathbf{B}_3\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_4$ - macierz o wymiarach m x m; (21)

ponadto spełniony jest warunek:

$$\bigwedge_{\alpha,\beta} \mathrm{Re}\{N_{\alpha\beta}\} \le 0, \alpha, \beta \in \{1,2,...,m\}. \tag{22}$$

Wówczas dla przypadku ogólnego $n \neq m$ warunek uboczny na moc czynną (5c) w dziedzinie częstotliwości będzie opisany następującą zależnością:

$$\mathrm{Re}\{\mathbf{U}^T\mathbf{I}^*\} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{U}^T\,{}_1\mathbf{Y}^*\Big|_{|\mathbf{U}|}\mathbf{U}^*\right\} = \mathrm{Re}\{[\mathbf{FE}]^T\mathbf{I}^* + [\mathbf{NI}]^T\mathbf{I}^*\} = \mathrm{Re}\left\{[\mathbf{FE}+\mathbf{NI}]^T\,{}_1\mathbf{Y}^*\Big|_{|\mathbf{U}|}[\mathbf{FE}+\mathbf{NI}]^*\right\} \tag{23}$$

a postać funkcjonału Lagrange'a (7) pozostanie bez zmian.

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Na potrzeby wykazania istnienia jednoznacznego rozwiązania rozpatrywanego problemu ze względu na parametr λ wygodnie jest dokonać rozdzielenia warunku (5) na dwie zależności - poprzez wprowadzenie parametru mocy czynnej P - i zależności te rozważyć niezależnie. Wówczas zmodyfikowany warunek na moc czynną układu przyjmie następującą postać:

$$P = \mathrm{Re}\{[\mathbf{FE}]^T\mathbf{I}^* + [\mathbf{NI}]^T\mathbf{I}^*\} = F(\lambda), \tag{5c'}$$

$$P = \mathrm{Re}\left\{[\mathbf{FE}+\mathbf{NI}]^T\,{}_1\mathbf{Y}^*\Big|_{|\mathbf{U}|}[\mathbf{FE}+\mathbf{NI}]^*\right\} = K(\lambda). \tag{5c''}$$

Funkcjonał Lagrange'a $L_{c'}$ dla warunku opisanego równaniem (5c') ma postać :

$$L_{c'}(\mathbf{I},\lambda) = \mathbf{I}^T\mathbf{I}^* + \lambda\left[P - \mathrm{Re}\{[\mathbf{FE}]^T\mathbf{I}^* + [\mathbf{NI}]^T\mathbf{I}^*\}\right]. \tag{24}$$

Funkcjonał Lagrange'a $L_{1c'}$ związany z przyrostem prądu o ΔI wyraża zależność:

$$L_{1c'}(\mathbf{I}+\Delta\mathbf{I},\lambda) = (\mathbf{I}+\Delta\mathbf{I})^T(\mathbf{I}+\Delta\mathbf{I})^* + \lambda\left[P - \mathrm{Re}\{[\mathbf{FE}]^T(\mathbf{I}+\Delta\mathbf{I})^* + [\mathbf{N}(\mathbf{I}+\Delta\mathbf{I})]^T(\mathbf{I}+\Delta\mathbf{I})^*\}\right] \tag{25}$$

Wówczas przyrost funkcjonału Lagrange'a $L_{c'}$ (24) wynosi:

$$\Delta L_{c'} = L_{1c'}(\mathbf{I}+\Delta\mathbf{I},\lambda) - L_{c'}(\mathbf{I},\lambda) = \Delta\mathbf{I}^T(\mathbf{1} - \lambda\,\mathrm{Re}\{\mathbf{N}\})\Delta\mathbf{I}^* + \mathrm{Re}\{(2\mathbf{I}^T(\mathbf{1} - \lambda\,\mathrm{Re}\{\mathbf{N}\}) - \lambda[\mathbf{FE}]^T)\Delta\mathbf{I}^*\}. \tag{26}$$

gdzie: $\mathbf{1}$ – macierz jednostkowa.

Warunkiem wystarczającym istnienia minimum funkcjonału $L_{c'}$ określonego zależnością (24) jest dodatnia określoność formy kwadratowej:

$$\Delta\mathbf{I}^T(\mathbf{1} - \lambda\,\mathrm{Re}\{\mathbf{N}\})\Delta\mathbf{I}^* > 0, \tag{27}$$

która na podstawie relacji (22) spełniona jest zawsze dla $\lambda \ge 0$.

Warunek konieczny istnienia minimum ma postać:

$$2\mathbf{I}^T(\mathbf{1} - \lambda\,\mathrm{Re}\{\mathbf{N}\}) - \lambda\mathbf{FE} = 0. \tag{28}$$

Współczynnik λ wyznacza się z warunku mocowego (5c'). Bezpośrednie wyznaczenie z tej zależności wartości λ jest trudne. Jednak, podobnie jak to uczyniono w pracy [7] (oraz w

jej pozycjach bibliograficznych), można wykazać monotoniczne narastanie $F(\lambda)$ dla $\lambda > 0$. Wykres funkcji $F(\lambda)$ został przedstawiony na rys.5. Natomiast funkcjonał Lagrange'a $L_{c''}$ dla warunku opisanego równaniem (5c'') ma postać:

$$L_{c''}(\mathbf{I},\lambda) = \mathbf{I}^T\mathbf{I}^* + \lambda\left[P - \mathrm{Re}\left\{[\mathbf{FE}+\mathbf{NI}]^T\left[{}_1\mathbf{Y}^*_{|\mathbf{U}|} + \Delta_1\mathbf{Y}^*_{|\mathbf{U}|}\right][\mathbf{FE}+\mathbf{NI}]^*\right\}\right]. \tag{29}$$

Funkcjonał Lagrange'a $L_{1c''}$ związany z przyrostem prądu o ΔI wyraża zależność:

$$L_{1c''}(\mathbf{I}+\Delta\mathbf{I},\lambda) = (\mathbf{I}+\Delta\mathbf{I})^T(\mathbf{I}+\Delta\mathbf{I})^* + \lambda P - \lambda\,\mathrm{Re}\left\{[\mathbf{FE}+\mathbf{N}(\mathbf{I}+\Delta\mathbf{I})]^T\left[{}_1\mathbf{Y}^*_{|\mathbf{U}|} + \Delta_1\mathbf{Y}^*_{|\mathbf{U}|}\right][\mathbf{FE}+\mathbf{N}(\mathbf{I}+\Delta\mathbf{I})]^*\right\} \tag{30}$$

Wówczas przyrost funkcjonału Lagrange'a $L_{c''}$ (29), przy założeniu że:

$$\Delta_1\mathbf{G}|_{|\mathbf{U}|} = \mathrm{Re}\left\{\Delta_1\mathbf{Y}|_{|\mathbf{U}|}\right\} << {}_1\mathbf{G}|_{|\mathbf{U}|} = \mathrm{Re}\left\{{}_1\mathbf{G}|_{|\mathbf{U}|}\right\}, \tag{31}$$

opisany jest zależnością:

$$\begin{aligned}\Delta L_{c''} &= L_{1c''}(\mathbf{I}+\Delta\mathbf{I},\lambda) - L_{c''}(\mathbf{I},\lambda) = \Delta\mathbf{I}^T\left(\mathbf{1} + \lambda\mathbf{N}^T\,{}_1\mathbf{G}|_{|\mathbf{U}|}\mathbf{N}^*\right)\Delta\mathbf{I}^* + \\ &+ \mathrm{Re}\left\{\left[2\mathbf{I}^T\left(\mathbf{1} + \lambda\mathbf{N}^T\,{}_1\mathbf{G}|_{|\mathbf{U}|}\mathbf{N}^*\right) - 2\lambda\mathbf{N}^*\,{}_1\mathbf{G}|_{|\mathbf{U}|}\mathbf{FE}\right]\Delta\mathbf{I}^*\right\} + \lambda\left[\mathrm{Re}\left\{[\mathbf{FE}+\mathbf{NI}]^T\Delta_1\mathbf{G}|_{|\mathbf{U}|}[\mathbf{FE}+\mathbf{NI}]^*\right\}\right].\end{aligned} \tag{32}$$

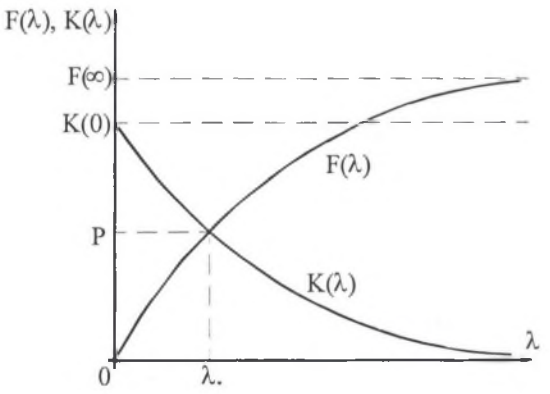
Warunkiem wystarczającym istnienia minimum funkcjonału $L_{c''}$ określonego zależnością (29) jest dodatnia określoność formy kwadratowej:

$$\Delta\mathbf{I}^T\left(\mathbf{1} + \lambda\mathbf{N}^T\,{}_1\mathbf{G}|_{|\mathbf{U}|}\mathbf{N}^*\right)\Delta\mathbf{I}^* > 0, \tag{33}$$

która spełniona jest zawsze dla $\lambda \geq 0$. Natomiast warunek konieczny istnienia minimum ma postać:

$$2\mathbf{I}^T\left(\mathbf{1} + \lambda\mathbf{N}^T\,{}_1\mathbf{G}|_{|\mathbf{U}|}\mathbf{N}^*\right) + 2\lambda\mathbf{N}^*\,{}_1\mathbf{G}|_{|\mathbf{U}|}\mathbf{FE} = 0. \tag{34}$$

Współczynnik λ wyznacza się z warunku mocowego (5c''). Bezpośrednie wyznaczenie z tej zależności wartości λ jest trudne. Jednak, podobnie jak dla funkcji $F(\lambda)$, można wykazać monotoniczne opadanie $K(\lambda)$ dla $\lambda > 0$ [7]. Wykres funkcji $K(\lambda)$ przedstawia rys. 5.



Rys. 5. Wykres funkcji $F(\lambda)$ i $K(\lambda)$
Fig. 5. $F(\lambda)$ and $K(\lambda)$ graphs

Poszukiwaną wartość parametru λ_* stanowi punkt przecięcia charakterystyk funkcji $F(\lambda)$ i $K(\lambda)$ z rys.5. Wartość parametru λ_* wyznacza się w sposób numeryczny, np. za pomocą metody wariacji lokalnych Hooke'a-Jeevesa z punktem startowym λ_0, który może być określony następująco:

$$\lambda_0 = \frac{P}{\|e\|^2}, \tag{35}$$

gdzie: P - moc czynna pobierana przez nieliniowy odbiornik przed optymalizacją.

W analogiczny sposób jak dla warunków (5c') i (5c''), wykorzystując postać funkcjonału Lagrange'a (7), można wyznaczyć wartość prądu optymalnego dla rozpatrywanego problemu optymalizacyjnego (5c). Wykonując odpowiednie przekształcenia, z zależności warunku koniecznego istnienia minimum funkcjonału Lagrange'a (7) uzyskuje się równanie:

$$\mathbf{I}^{opt} = \frac{\lambda_*}{2}\left[\mathbf{1} + \lambda_*\left(\mathbf{N}^T\,{}_1\mathbf{G}\big|_{|\mathbf{U}|}\mathbf{N}^* - \mathrm{Re}\{\mathbf{N}\}\right)\right]^{-1}\left(\mathbf{1} - 2\mathbf{G}\mathbf{N}^*\right)^T\mathbf{F}\mathbf{E}. \tag{36}$$

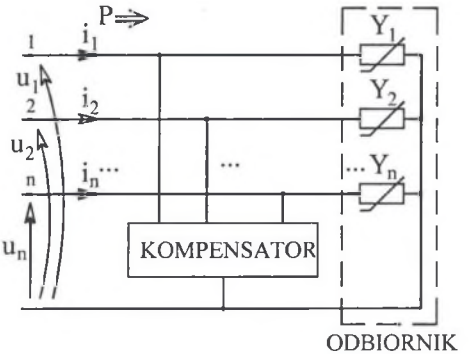
Prąd optymalny jest funkcją konduktancji ${}_1G_\alpha\big|_{|U_\alpha|}$ poszczególnych odbiorników nieliniowych. Wartość admitancji tych odbiorników ${}_1Y_\alpha\big|_{|U_\alpha|}$ ma natomiast wpływ na wartość admitancji kompensatorów $Y_{\alpha k}$. Po wyznaczeniu prądu optymalnego $\mathbf{I}^{opt}$ napięcie optymalne $\mathbf{U}^{opt}$ na zaciskach odbiornika może być wyznaczone z równania (19) po podstawieniu za prąd $\mathbf{I}$ wartości prądu optymalnego $\mathbf{I}^{opt}$. Na podstawie tych wielkości można wyznaczyć wartość prądu kompensatorów włączanych na napięcia fazowe równolegle do zacisków odbiorników:

$$I_{\alpha k} = I_\alpha^{opt} - {}_1Y_\alpha\Big|_{|U_\alpha^{opt}|}U_\alpha^{opt}. \tag{37}$$

Admitancję kompensatorów $Y_{\alpha k}$ dla podstawowej harmonicznej napięcia źródła można wyznaczyć z równości:

$$Y_{\alpha k} = \frac{I_{\alpha k}}{U_\alpha^{opt}}, \alpha = 1, 2, ..., m; m \in N. \tag{38}$$

Wyliczona wcześniej wartość prądu optymalnego pozwala z zależności ${}_1Y_\alpha\big|_{|U_\alpha|} = {}_1G_\alpha\big|_{|U_\alpha|} + j\,{}_1B_\alpha\big|_{|U_\alpha|}$ wyznaczyć admitancję nieliniowego odbiornika ${}_1Y_\alpha\big|_{|U_\alpha|}$, a następnie wartość admitancji kompensatora $Y_{\alpha k}$. Włączany kompensator może być pasywny (tzn. mieć strukturę (LC lub RLC)) lub aktywny (struktura (RLC,-R)), lecz zawsze będzie liniowy. Częstotliwości wyższych harmonicznych generowanych przez nieliniowe odbiorniki (wyznaczone podczas eksperymentu pomiarowego) narzucają na kompensatory dodatkowe warunki, tzn. warunki zerowej impedancji kompensatorów dla tych częstotliwości. Pełny kompensator ma zatem dwa składniki: elementy o parametrach wyznaczonych dla podstawowej harmonicznej (38) i filtr wyższych harmonicznych generowanych przez nieliniowy odbiornik. Idea kompensacji została przedstawiona na rys.6.



Rys.6. Idea kompensacji
Fig. 6. The idea of compensation

W tabeli 1 zostały zestawione wyniki analiz dla każdego z dodatkowych warunków na moc czynną P:

- warunek mocy czynnej,
- prąd aktywny,
- napięcie na zaciskach odbiornika,
- admitancje kompensatora.

Tabela 1

Wyniki analizy dla każdego z warunków na moc czynną układu

Wariant A
Warunek mocy czynnej: $P = \mathrm{Re}\left\{[\mathbf{FE}]^T \mathbf{I}^* + [\mathbf{NI}]^T \mathbf{I}^*\right\}$
Prąd aktywny: $\mathbf{I}^{opt} = \frac{\lambda_*}{2}\left[\mathbf{1} - \lambda\,\mathrm{Re}\{\mathbf{N}\}\right]^{-1}\mathbf{FE}$
Napięcie na zaciskach odbiornika: $\mathbf{U}^{opt} = \mathbf{FE} + \mathbf{NI}^{opt}$
Admitancje kompensatora: $Y_{\alpha k} = \frac{I_{\alpha k}}{U_\alpha^{opt}}, \alpha = 1, 2, ..., m; m \in N$

Wariant B
Warunek mocy czynnej: $P = \mathrm{Re}\left\{[\mathbf{FE} + \mathbf{NI}]^T\, {}_1\mathbf{Y}^*\big\|_{\|U\|}\, [\mathbf{FE} + \mathbf{NI}]^*\right\}$
Prąd aktywny: $\mathbf{I}^{opt} = \lambda_*\left[\mathbf{1} + \lambda \mathbf{N}^T\, {}_1\mathbf{G}\big\|_{\|U\|}\mathbf{N}^*\right]^{-1}\mathbf{N}^*\, {}_1\mathbf{G}\big\|_{\|U\|}\mathbf{FE}$
Napięcie na zaciskach odbiornika: $\mathbf{U}^{opt} = \mathbf{FE} + \mathbf{NI}^{opt}$
Admitancje kompensatora: $Y_{\alpha k} = \frac{I_{\alpha k}}{U_\alpha^{opt}}, \alpha = 1, 2, ..., m; m \in N$

Wariant C
Warunek mocy czynnej: $\mathrm{Re}\left\{[\mathbf{FE}]^T\mathbf{I}^* + [\mathbf{NI}]^T\mathbf{I}^*\right\} = \mathrm{Re}\left\{[\mathbf{FE}+\mathbf{NI}]^T\,{}_1\mathbf{Y}^*\big\|_{\|\mathbf{U}\|}[\mathbf{FE}+\mathbf{NI}]^*\right\}$
Prąd aktywny: $\mathbf{I}^{opt} = \frac{\lambda_*}{2}\left[\mathbf{1} + \lambda_*\left(\mathbf{N}^T\,{}_1\mathbf{G}\big\|_{\|\mathbf{U}\|}\mathbf{N}^* - \mathrm{Re}\{\mathbf{N}\}\right)\right]^{-1}\left(\mathbf{1} - 2\mathbf{G}\mathbf{N}^*\right)^T\mathbf{FE}$
Napięcie na zaciskach odbiornika: $\mathbf{U}^{opt} = \mathbf{FE} + \mathbf{NI}^{opt}$
Admitancje kompensatora: $Y_{\alpha k} = \frac{I_{\alpha k}}{U_\alpha^{opt}}, \alpha = 1, 2, \ldots, m; m \in \mathbf{N}$

4. WNIOSKI

Zaprezentowaną metodę można zastosować w układach sieci z bezinercyjnymi nieliniowymi odbiornikami. Pozwala ona zminimalizować wartości skuteczne prądów sieci oraz zminimalizować odkształcenia tych prądów od przebiegów sinusoidalnych wywołane przez nieliniowe odbiorniki. Mniejsze wartości skuteczne prądów źródła powodują mniejsze straty w torach transmisyjnych układów przesyłowych, a więc pozwalają lepiej wykorzystać zarówno możliwości przepustowości układu transmisyjnego, jak i moce czynne wytwarzane w generatorach. Osiągnięcie optymalnego stanu pracy sieci możliwe jest poprzez włączenie odpowiedniego kompensatora – układu wymuszającego optymalny punkt pracy sieci. Przedstawione w artykule rozumowanie i zaprezentowane zależności pozwalają wnioskować, że otrzymywany kompensator może być pasywny (tzn. mieć strukturę (LC lub RLC)) lub aktywny (struktura (RLC,-R)), lecz zawsze będzie liniowy, a jego struktura będzie zawierać w sobie dwa składniki: elementy o parametrach wyznaczonych dla podstawowej harmonicznej i filtr wyższych harmonicznych generowanych przez nieliniowy odbiornik.

LITERATURA

1. Mayer D., Pav M.: Contribution to the compensation of a three phase nonlinear power consumer. *El. Obzor 77* (1988) No.2, pp.75-78.
2. Mayer D.: Power transmission in periodic nonsinusoidal networks as an optimization problem. *Journ. of El. Eng. 44*, 1993, No.7, pp.201-203.
3. Siwczyński M., Kłosiński R.: The square functional of real source power losses minimizing algorithms. *XIV Nat. Conf. Circuit Theory and Electronic Circuit*, Waplewo 1991, pp.65-70.
4. Kingston R., Baghzouz Y.: Power factor and harmonic compensation in industrial power systems with nonlinear loads. *1994 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Technical Conference. Conference Record. Papers Presented at the 1994 Annual Meeting. IEEE.* 1994, pp.235-9. New York 1994, pp.235-239

5. Pasko M., Dębowski K.: An identification of the spectral representation of the impedance operator of the node structure network. *Proc. of AMTEE*, Plzeň, Czech Republic, 1995, pp. 191-195.
6. Dębowski K., Pasko M.: About certain method of active current determination in one phase systems with nonlinear loads. Proc. of *XXI IC_SPETO*, Gliwice-Ustroń, Poland, 1998, ss.405-408.
7. Pasko M., Dębowski K.: About certain method of the determination of active current in three phase systems with nonlinear loads. *Proc. of X ISTET,* Magdeburg, Germany, 1999, pp.635-638.
8. Mikołajuk K., Trzaska Z.: Elektrotechnika teoretyczna. Część II, *PWN*, Warszawa 1987.

Wpłynęło do Redakcji dnia 2 czerwca 2002 r.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Kazimierz Mikołajuk

Abstract

The aim of the paper is present possibilities of optimization of the working point of complex electrical networks with inertialess nonlinear loads. The optimization approach for linear systems leading to harmonic compensation and determination of voltage source optimal currents, and next on the basis of knowledge of optimal currents and voltages across the load terminals to determination of compensatory parameters has been presented in many papers based on the time domain as well as on the frequency domain. The paper is a continuation of the authors' earlier papers concerning the possibilities of minimization of the RMS value of phase currents in three phases systems. This method can be used for some classes of nonlinear loads, i.e. for inertialess elements that consume the active power of the voltage source basic harmonic. This power is an additional condition during the presented minimization. In the paper the minimization of the RMS value of phase currents is carried out for three cases of additional condition on the active power:

a) active powers generated by the source before and after optimization are the same;
b) active powers consumed by the load before and after optimization are the same;
c) active power consumed by the connected compensator is equal to zero.

The solution of this problem is based on the frequency domain and it is obtained by means of Lagrange's factors and the suitable measurement identifications of nonlinear loads and network parameters. In the presented problem obtaining the solution (active currents) in an analytical form is difficult and a numerical algorithm has to be used. The last stage of this method is determination of compensator parameters, that connected to the system causes the flow of active currents of the voltage sources. It is assumed that the compensator will be connected directly to the load terminals. The compensator can be a passive one (then it has an LC or RLC structure) or an active one (then it has a structure (RLC,-R)); but it will always be a linear one. Moreover, the frequencies of higher harmonics (which have been determined during the measurement experiment) provide additional conditions for the compensator, i.e. the condition of the compensator zero impedance for these harmonics. The whole compensator has two components: elements with parameters determined for the basic harmonic (39) and the filter for elimination of the higher harmonics caused by nonlinear loads.