ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2002
Seria: ELEKTRYKA z.182 Nr kol. 1551

Tomasz ADRIKOWSKI, Marian PASKO

UNORMOWANIE FILTRÓW ELIPTYCZNYCH

Streszczenie. W pracy pokazano właściwości filtrów eliptycznych przed i po unormowaniu. Unormowaniu została poddana funkcja filtracji F(ω) (wzór (1)). Przedstawiono sposób wyznaczenia biegunów i zer funkcji filtracji F(ω). Porównano właściwości filtrów przed i po unormowaniu. W ramach tego porównania zaprezentowano przebieg funkcji filtracji F(ω) (rys.1, rys.4) oraz charakterystykę amplitudową $|K(j\omega)|$ (rys.3, rys.5) dla obu przypadków. Celem pełniejszego porównania wprowadzono parametry określające właściwości filtrów: A_{pass}, A_{stop}, F_s oraz średnie nachylenie charakterystyki w paśmie przejściowym – szczegółowo opisane w pracy.

STANDARDIZATION OF ELIPTIC FILTER

Summary. In this paper properties of elliptic filters before and after standardization are shown. The filtering function F(ω) (expression (1)) is standarized. The way of determining poles and zeros of the filtering function F(ω) is also presented. The filter properties before and after standardization are compared, namely there are shown the courses of the filtering function F(ω) (Figs. 1 and 4) and the amplitude characteristics $|K(j\omega)|$ (Fig. 3 and 5) for the both cases. In order to make the comparison more complete there are introducted the following parameters describing the filter properties: A_{pass}, A_{stop}, F_s and the average slope of the characteristic within the pass band. They are described in detail.

1. WSTĘP

Transmitancja przejściowa filtrów Butterwortha, Czebyszewa oraz Bessela ma jedynie bieguny. W odróżnieniu od tych filtrów transmitancja filtrów eliptycznych ma zarówno bieguny, jak i zera. Występowanie zer powoduje z jednej strony pojawienie się zafalowań w paśmie zarówno przepustowym, jak i zaporowym, co ogranicza wartość realizowanego tłumienia w paśmie zaporowym. Z drugiej jednak strony, dobierając położenie zer względem biegunów, można uzyskać bardzo stromą charakterystykę przy przejściu z pasma przepustowego do zaporowego. W związku z tym filtry eliptyczne odznaczają się większą selektywnością niż filtry Butterwortha, Czebyszewa oraz Bessela.

2. FILTRY ELIPTYCZNE NIEUNORMOWANE

Moduł transmitancji znormalizowanego filtru eliptycznego może być określony zależnością:

$$|K(j\omega)| = K_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 F^2(\omega)}}. \tag{1}$$

Funkcja $F(\omega)$ jest zerowo-biegunową eliptyczną funkcją filtracji określoną w zależności od rzędu w następujący sposób:

– dla rzędu parzystego r = 2, 4, 6, 8...:

$$F(\omega) = \prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \frac{\omega_i^2 - \omega^2}{1-\omega_i^2\omega^2}, \tag{2}$$

– dla rzędu nieparzystego r = 3, 5, 7, 9...:

$$F(\omega) = \omega \prod_{i=1}^{\frac{r-1}{2}} \frac{\omega_i^2 - \omega^2}{1-\omega_i^2\omega^2}, \tag{3}$$

– dla rzędu r = 1:

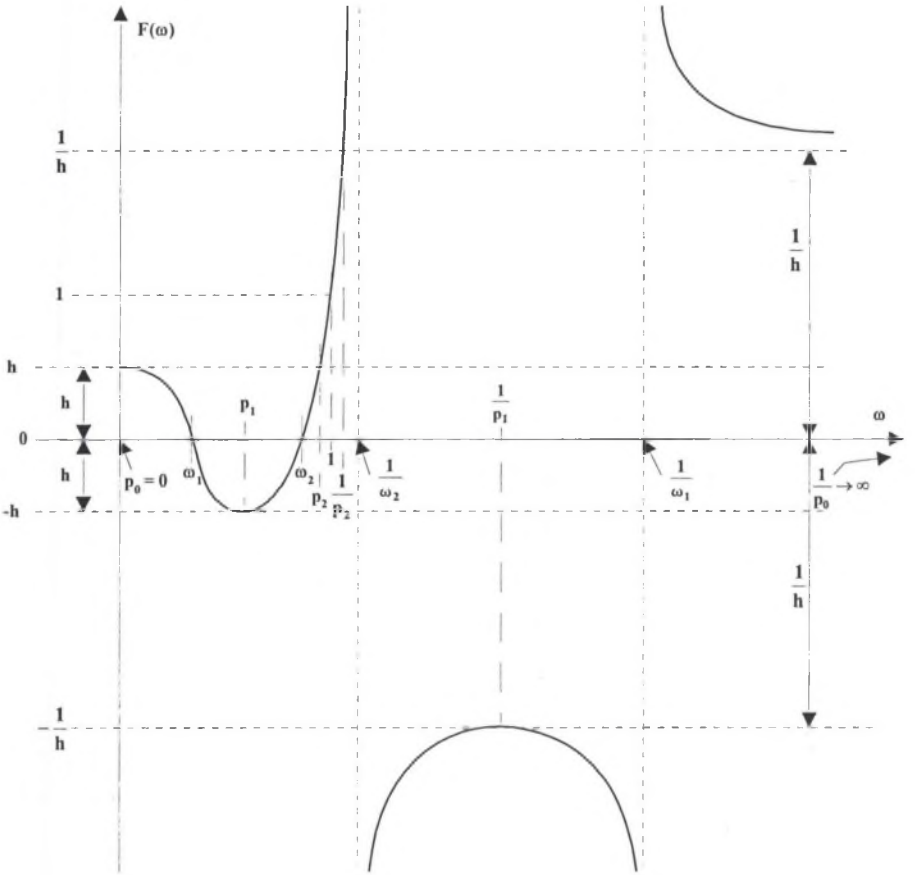
$$F(\omega) = \omega. \tag{4}$$

Funkcja filtracji $F(\omega)$ określona wzorami (2), (3), (4) jest funkcją rzeczywistą spełniającą właściwość:

$$F\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{F(\omega)}. \tag{5}$$

Funkcja filtracji powinna mieć tak dobrane zera oraz bieguny, aby była równomiernie falista wokół zera w paśmie przepustowym oraz aby była równomiernie falista względem nieskończoności w paśmie zaporowym. Jeżeli zera będą rozmieszczone w paśmie przepustowym $0 < \omega < 1$, to na mocy właściwości (5) bieguny będą leżały w paśmie zaporowym $1 < \omega < \infty$. Jeżeli ponadto zadba się, aby zera były równomiernie rozłożone, uzyska się automatycznie równomierne rozłożenie biegunów. Wtedy otrzyma się równomierną falistość wokół zera w paśmie przepustowym oraz równomierną falistość względem nieskończoności w paśmie zaporowym. Przykładowy przebieg funkcji filtracji $F(\omega)$ dla rzędu r = 4 przestawiono na rys. 1.

Funkcja $F(\omega)$ ma zafalowania w paśmie przepustowym o amplitudzie h, a zarazem w paśmie zaporowym zafalowania o amplitudzie $\frac{1}{h}$ (na mocy właściwości (5)). Zera funkcji ω_1, ω_2 leżące w paśmie $0 < \omega < 1$ przechodzą w bieguny $\frac{1}{\omega_2}, \frac{1}{\omega_1}$ leżące w paśmie $1 < \omega < \infty$. Maksima zafalowań o wartości h w paśmie przepustowym są osiągane w 3 punktach: p_0, p_1 i p_2. Z kolei maksima zafalowań o wartości $\frac{1}{h}$ w paśmie zaporowym są osiągane w punktach $\frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_0}$.



Rys. 1. Przykładowy przebieg funkcji filtracji F(ω) dla rzędu r = 4
Fig. 1. Examplary course of the filtering function F(ω) for the order r = 4

Precyzyjne określenie rozmieszczenia zer funkcji F(ω), tak aby miała ona przebieg równomiernie falisty, można ustalić wykorzystując właściwości funkcji sinus eliptyczny Jacobiego sn(u). Przebieg tej funkcji można porównać do przebiegu funkcji sinus trygonometryczny sin(Φ) ze spłaszczonymi maksimami. Istnieje ścisła zależność między argumentem u sinusa eliptycznego a argumentem Φ sinusa trygonometrycznego [1], [2]:

$$u(\Phi, k) = \int_0^{\Phi} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}, \tag{6}$$

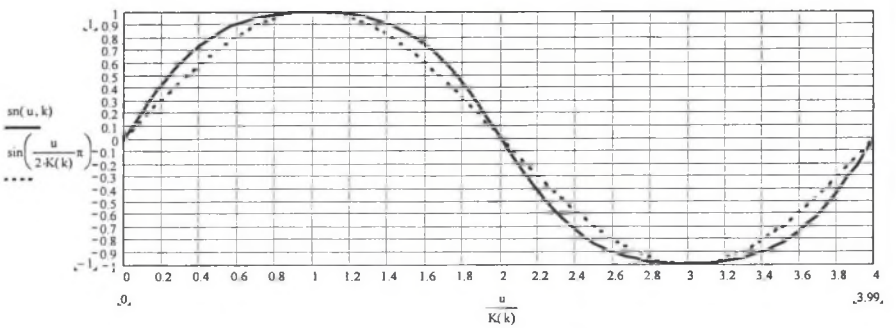
przy

$$sn(u) = \sin(\Phi). \tag{7}$$

Zależność (6) jest nazywana całką eliptyczną 1 rodzaju. Współczynnik k jest modułem całki eliptycznej i może być zadawany w przedziale od 0 do 1. Wielkość K, odpowiadająca wartości u dla $\Phi = \frac{\pi}{2}$, przy zadanym k, nosi nazwę wartości pełnej całki eliptycznej i jest określona zależnością:

$$K = u\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}. \tag{8}$$

Okres powtarzania funkcji sn(u) wynosi 4K. Przebieg funkcji sinus eliptyczny dla k = 0,9 w porównaniu z przebiegiem sinusa trygonometrycznego przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Przebieg funkcji sinus eliptyczny Jacobiego sn(u)
Fig. 2. Jacobi elliptic sinus function sn(u)

Wyznaczenie wartości ω_i, p_i, h funkcji filtracji w zależności od rzędu może przebiegać w następujący sposób [1]:

– dla rzędu r parzystego r = 2, 4, 6, 8, ...:

$$\omega_i = \sqrt{k}\, sn\left(\frac{(2i-1)K(k)}{r}\right),\ i = 1, 2 \ldots \frac{r}{2}, \tag{9}$$

$$p_i = \sqrt{k}\, sn\left(\frac{2i\,K(k)}{r}\right),\ i = 0, 1, 2 \ldots \frac{r}{2}, \tag{10}$$

$$h = \prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \omega_i^2, \tag{11}$$

– dla rzędu r nieparzystego r = 3, 5, 7, 9, ...:

$$\omega_i = \sqrt{k}\, sn\left(\frac{2i\,K(k)}{r}\right),\ i = 1, 2 \ldots \frac{r-1}{2}, \tag{12}$$

$$p_i = \sqrt{k}\, sn\left(\frac{(2i+1)K(k)}{r}\right),\ i = 0, 1, 2 \ldots \frac{r-1}{2}, \tag{13}$$

$$h = \prod_{i=0}^{\frac{r-3}{2}} p_i^2 , \tag{14}$$

– dla rzędu r = 1:

$$\omega_1 = 0 , \tag{15}$$

$$p_1 = \sqrt{k}\,\underbrace{sn(K(k))}_{1} = \sqrt{k} , \tag{16}$$

$$h = k . \tag{17}$$

Charakterystykę amplitudową można przedstawić jako funkcję częstotliwości f dla dowolnej częstotliwości granicznej f_{gr}:

– dla rzędu parzystego r = 2, 4, 6, 8...:

$$|K(jf)| = K_0(f) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \frac{\omega_i^2 - \left(\frac{f}{f_{gr}}\right)^2}{1-\omega_i^2\left(\frac{f}{f_{gr}}\right)^2}\right)^2}} , \tag{18}$$

przy wartościach ω_i określonych wzorem (9),

– dla rzędu nieparzystego r = 3, 5, 7, 9...:

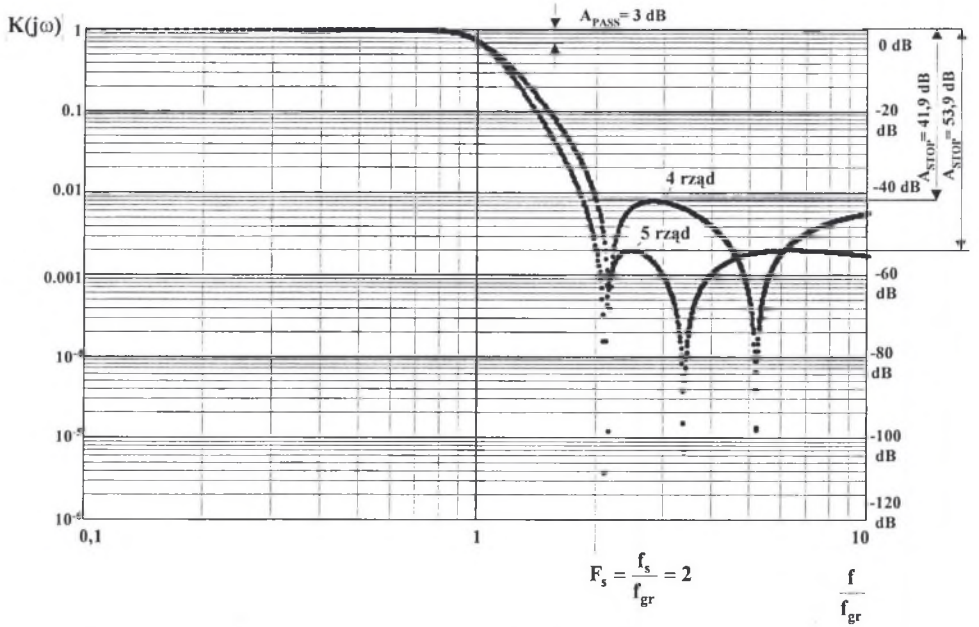
$$|K(jf)| = K_0(f) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{f}{f_{gr}} \prod_{i=1}^{\frac{r-1}{2}} \frac{\omega_i^2 - \left(\frac{f}{f_{gr}}\right)^2}{1-\omega_i^2\left(\frac{f}{f_{gr}}\right)^2}\right)^2}} , \tag{19}$$

przy wartościach ω_i określonych wzorem (12),

– dla rzędu r = 1:

$$|K(jf)| = K_0(f) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{f}{f_{gr}}\right)^2}} . \tag{20}$$

Charakterystykę $|K(j\omega)|$ przykładowych filtrów eliptycznych 4 i 5 rzędu klasy k = 0,25 oraz ε = 1 przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Charakterystyka $|K(j\omega)|$ przykładowych filtrów eliptycznych 4 i 5 rzędu klasy k = 0,25 oraz $\varepsilon = 1$

Fig. 3. Characteristic $|K(j\omega)|$ of exemplary fourth and fifth order elliptic filters with k = 0,25 and $\varepsilon = 1$

Dla opisywanych filtrów można zdefiniować następujące parametry:

- A_{pass} w dB – dopuszczalne tłumienie w paśmie przepuszczania, osiągane dla $f = f_{gr}$, zależne tylko od przyjętego parametru ε:

$$A_{pass} = 10\log\left(\varepsilon^2 + 1\right), \tag{21}$$

- A_{stop} w dB – minimalne tłumienie gwarantowane w paśmie zaporowym, osiągane dla $f = f_s$, zależne od przyjętego ε oraz h, które z kolei zależy od rzędu r i parametru k:

$$A_{stop} = 20\log\left(\frac{\varepsilon}{h}\right), \tag{22}$$

- F_s – względna szerokość pasma przejściowego – zależy jedynie od parametru k:

$$F_s = \frac{f_s}{f_{gr}} = \frac{1}{\sqrt{k}}. \tag{23}$$

- średnie nachylenie charakterystyki w paśmie przejściowym:

$$\frac{A_{stop}}{\log_2 F_s} \text{ w } \frac{dB}{okt}. \tag{24}$$

Parametry opisywanych filtrów zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Parametry przykładowych filtrów nieunormowanych 4 i 5 rzędu klasy k = 0,25 i ε = 1

Parametr	Filtr rzędu r = 4	Filtr rzędu r = 5
ω_i	$\omega_1 = 0{,}194$; $\omega_2 = 0{,}463$	$\omega_1 = 0{,}297$; $\omega_2 = 0{,}476$
p_i	$p_0 = 0$; $p_1 = 0{,}356$; $p_2 = 0{,}5$	$p_0 = 0{,}157$; $p_1 = 0{,}407$; $p_2 = 0{,}5$
h	0,0081	0,002
A_{pass}	3 dB	3 dB
A_{stop}	41,9 dB	53,9 dB
F_s	2	2
średnie nachylenie charakterystyki	$41{,}9\ \frac{dB}{okt}$	$53{,}9\ \frac{dB}{okt}$

Charakterystyka amplitudowa filtrów nieunormowanych ma pomijalnie małe zafalowania (rys. 3) w paśmie przepustowym i jest w tym obszarze zbliżona do płaskiej charakterystyki filtru Butterwortha. Skutkiem tego jest relatywnie niski poziom gwarantowanego tłumienia w paśmie zaporowym, odpowiednio dla rzędu 4 41,9 dB, dla rzędu 5 53,9 dB.

Większe tłumienie uzyskuje się w filtrach eliptycznych unormowanych.

3. FILTRY ELIPTYCZNE UNORMOWANE

Unormowanie polega na przekształceniu funkcji filtracji F(ω), aby uzyskać charakterystykę amplitudową o amplitudzie zafalowań w paśmie przepustowym równej dokładnie przyjętej nierównomierności pasma A_{pass}. Będzie tak, jeżeli wartość funkcji filtracji F(ω) podzieli się przez h oraz argument ω podzieli się przez $\sqrt{k}$. Tak zmodyfikowaną funkcję filtracji można wyrazić za pomocą wzoru:

– dla rzędu parzystego r = 2, 4, 6, 8...:

$$F(\omega) = \frac{1}{h}\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \frac{\omega_i^2 - \omega^2 k}{1 - \omega_i^2 \omega^2 k}, \tag{25}$$

– dla rzędu nieparzystego r = 3, 5, 7, 9...:

$$F(\omega) = \frac{1}{h}\omega\prod_{i=1}^{\frac{r-1}{2}} \frac{\omega_i^2 - \omega^2 k}{1 - \omega_i^2 \omega^2 k}, \tag{26}$$

– dla rzędu r = 1:

$$F(\omega) = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{k}. \tag{27}$$

Przebieg funkcji filtracji F(ω) po unormowaniu dla rzędu r = 4 przestawiono na rys. 4.

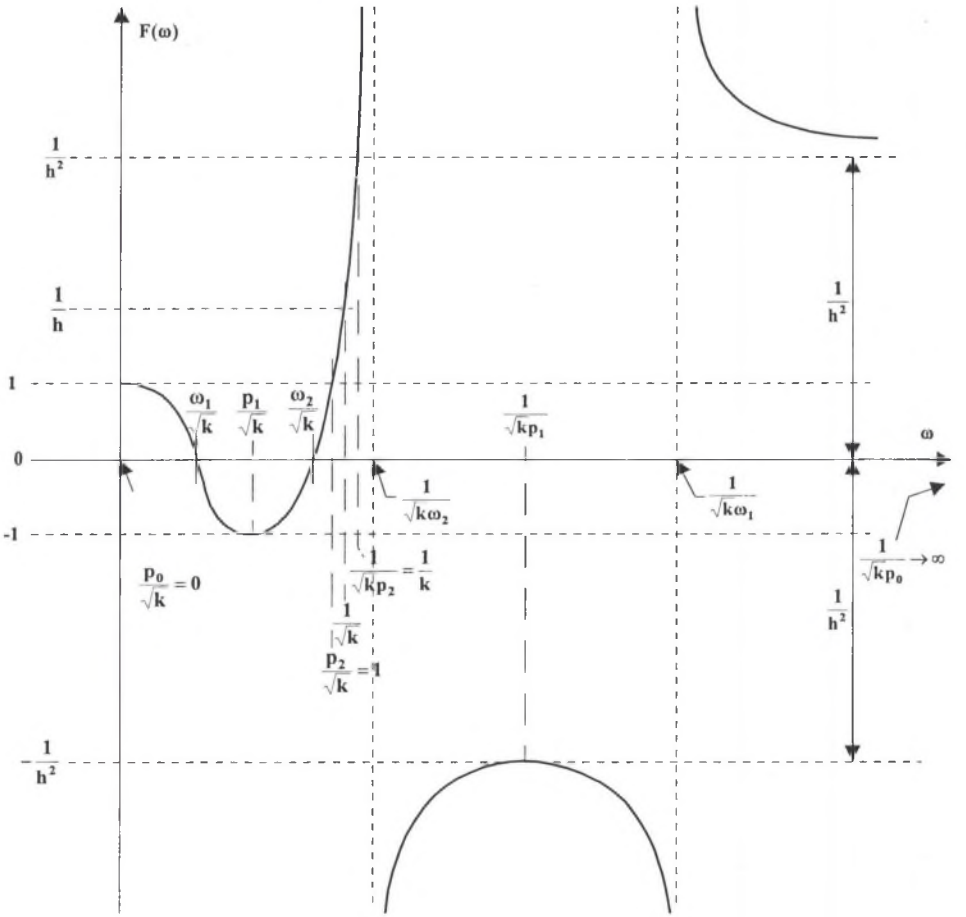
Po unormowaniu amplituda zafalowań funkcji F(ω) w paśmie przepustowym zwiększyła się z wartości h do jedności. Równocześnie zwiększyło się tłumienie w paśmie zaporowym z

wartości $\frac{1}{h}$ do $\frac{1}{h^2}$. Charakterystykę amplitudową po unormowaniu jako funkcję częstotliwości f, dla dowolnej częstotliwości granicznej f_{gr}, opisują wzory:

– dla rzędu parzystego r = 2, 4, 6, 8...:

$$|K(jf)| = K_0(f) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{1}{h}\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}}\frac{\omega_i^2 - k\left(\frac{f}{f_{gr}}\right)^2}{1-k\omega_i^2\left(\frac{f}{f_{gr}}\right)^2}\right)^2}}, \tag{28}$$

przy wartościach ω_i określonych za pomocą wzoru (9),



Rys. 4. Przykładowy przebieg funkcji filtracji F(ω) po unormowaniu dla rzędu r = 4

Fig. 4. Examplary course of the filtering function F(ω) after standardization for the order r = 4

– dla rzędu nieparzystego r = 3, 5, 7, 9...:

$$|K(jf)| = K_0(f) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{1}{h}\frac{f}{f_{gr}}\prod_{i=1}^{\frac{r-1}{2}}\frac{\omega_i^2 - k\left(\frac{f}{f_{gr}}\right)^2}{1-k\omega_i^2\left(\frac{f}{f_{gr}}\right)^2}\right)^2}}, \tag{29}$$

przy wartościach ω_i określonych wzorem (12),

– dla rzędu r = 1:

$$|K(jf)| = K_0(f) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{f}{f_{gr}}\right)^2}}. \tag{30}$$

Charakterystykę $|K(j\omega)|$ przykładowych filtrów eliptycznych rzędu 4 i 5 po unormowaniu, klasy k = 0,5 oraz ε = 1 przedstawiono na rys. 5.

Minimalne tłumienie w paśmie zaporowym A_{stop} filtru unormowanego wynosi:

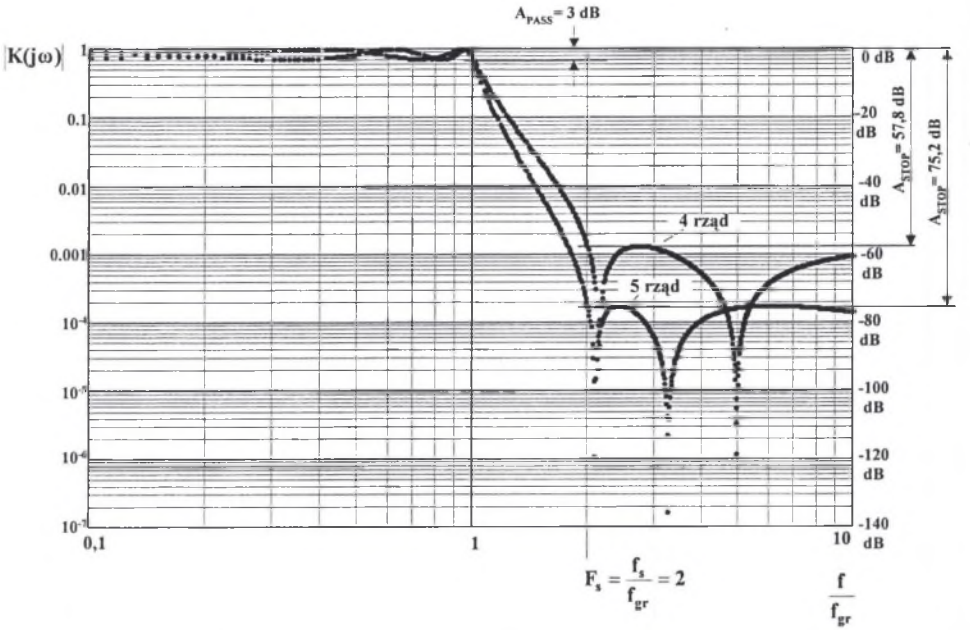
$$A_{stop} = 20\log\left(\frac{\varepsilon}{h^2}\right). \tag{31}$$

Natomiast względna szerokość pasma przejściowego F_s jest opisana za pomocą wzoru:

$$F_s = \frac{f_s}{f_{gr}} = \frac{1}{k}. \tag{32}$$

Pozostałe parametry: A_{pass} oraz średnie nachylenie charakterystyki w paśmie przejściowym są określone przez te same zależności jak w przypadku filtrów nieunormowanych (wzory (21), (24)). Parametry opisywanych filtrów zestawiono w tabeli 2.

Amplituda zafalowań charakterystyki amplitudowej filtrów nieunormowanych w paśmie przepustowym jest równa dokładnie zadanej nierównomierności pasma przepustowego A_{pass}. Dzięki temu uzyskuje się większe tłumienie w paśmie przepustowym (tabela 2) przy takiej samej szerokości pasma przejściowego F_s = 2. Oczywiście w filtrach unormowanych otrzymuje się w związku z tym większe nachylenie w obszarze przejściowym. Filtry unormowane są zatem bardziej selektywne.



Rys. 5. Charakterystyka $|K(j\omega)|$ unormowanych filtrów eliptycznych 4 i 5 rzędu klasy k = 0,5 oraz ε = 1

Fig. 5. Characteristic $|K(j\omega)|$ of exemplary fourth and fifth order standardized elliptic filters with k = 0,5 and ε = 1

Tabela 2

Parametry przykładowych filtrów unormowanych 4 i 5 rzędu klasy k = 0,5 i ε = 1

Parametr	Filtr rzędu r = 4	Filtr rzędu r = 5
ω_i	$\omega_1 = 0{,}406$; $\omega_2 = 0{,}933$	$\omega_1 = 0{,}615$; $\omega_2 = 0{,}957$
p_i	$p_0 = 0$; $p_1 = 0{,}732$; $p_2 = 1$	$p_0 = 0{,}329$; $p_1 = 0{,}829$; $p_2 = 1$
h	0,036	0,013
A_{pass}	3 dB	3 dB
A_{stop}	57,8 dB	75,2 dB
F_s	2	2
Średnie nachylenie charakterystyki	$57{,}8\ \frac{dB}{okt}$	$75{,}2\ \frac{dB}{okt}$

Filtry eliptyczne unormowane zostały skatalogowane przez Saala oraz Zwerewa [2], [5], [6]. Podstawą skatalogowania był rząd r, współczynnik odbicia ρ wyrażony w procentach oraz kąt Θ wyrażany w stopniach. Współczynnik ρ jest powiązany z ε:

$$\rho = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}}\,100\%. \tag{33}$$

Z kolei kąt Θ jest powiązany z modułem całki eliptycznej k:

$$\Theta = \arcsin(k). \tag{34}$$

Filtry eliptyczne unormowane są czasami, nazywane filtrami Cauera dla uhonorowania wkładu w tę dziedzinę nauki profesora Wilhelma Cauera i często są oznaczane wg następującej konwencji:

C r ρ Θ.

Dla przykładu, filtry 4 i 5 rzędu, klasy k = 0,5, ε = 1, o charakterystyce przedstawionej na rys. 5 będą miały następujące parametry ρ i Θ:

$$\rho = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}}100\% = \sqrt{\frac{1}{1+1}}100\% = 70{,}7\%,$$

$$\Theta = \arcsin(k) = \arcsin(0{,}5) = 30^\circ$$

i będą wg przedstawionej konwencji oznaczone jako: **C 4 70,7% 30°** (filtr 4 rzędu) i **C 5 70,7% 30°** (filtr 5 rzędu).

PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono dwa rodzaje filtrów eliptycznych, nieunormowane unormowane. Wykazano, że filtry eliptyczne po unormowaniu zapewniają większe tłumienie w paśmie zaporowym. Selektywność takich filtrów eliptycznych przewyższa selektywność filtrów o innych znanych aproksymacjach: Bessela, Czebyszewa, Butterwortha. Z tego powodu ten rodzaj filtrów eliptycznych jest najbardziej rozpowszechniony. W następnym artykule zostanie przedstawiona realizacja praktyczna eliptycznych filtrów unormowanych z użyciem struktur bikwadratowych. Na przykładzie filtrów parzystego rzędu opisana zostanie budowa filtrów dowolnego typu przepustowości: dolnoprzepustowy, górnoprzepustowy, pasmowoprzepsutowy i pasmowozaporowy. Przedstawiona zostanie procedura wyznaczania wartości elementów struktur wchodzących w skład układu danego filtru dla założonych parametrów ε, k oraz dla zadanych częstotliwości granicznych. Rozważania zostaną zilustrowane symulacjami komputerowymi, w ramach których zostaną wyznaczone charakterystyki częstotliwościowe filtrów.

LITERATURA

3. Bellert. S.: Zarys teorii syntezy liniowych układów elektrycznych. WPW, Warszawa 1964.
4. Williams A.: Electric Filter Design Handbook. McGraw-Hill Inc., New York 1981.
5. Thede L.: Analog And Digital Filter Design Using C. Prentice Hall PTR, New Jersey 1996.
6. Pasko M., Walczak J.: Teoria sygnałów. Wyd. Pol. Śl., Gliwice 1999.
7. Zverev A.I.: Handbook Of Filter Synthesis. John Wiley and Sons, New York 1967.
8. Saal R.: Der Entwurf von Filtern mit Hilfe des Kataloges Normierter Tiefpasse. Telefunken GMBH, Backnang Germany 1963.

Wpłynęło do Redakcji dnia 5 czerwca 2002 r.
Recenzent: Dr hab. inż. Konrad Skowronek, prof. Politechniki Poznańskiej

Abstract

In this paper the properties of the elliptic filters before and after standardization are shown. The filtering function $F(\omega)$ (expression (1)) is to standardized. The function $F(\omega)$ influences the filter frequency characteristic. The way of determining poles and zeros of the filtering functions $F(\omega)$ is also presented. The filter properties before and after standardizationb are compared, namely there are shown the course of the filtering function $F(\omega)$ (Figs. 1 and 4) and the amplitude characteristic $|K(j\omega)|$ (Figs. 3 and 5) for the both cases. In order to make the comparison more complete there are introduced the following parameters describing the filter properties: passband ripple A_{pass}, minimum stopband attenuation A_{stop}, relative transient bandwidth F_s and the average slope of the characteristic in the passband. It is proved that elliptic filters after standardization guarantee batter attenuation within the stop band. The selectivity of these filters is higher than that of other known filters such as Bessel, Thebyshev and Butterworth ones. That is why this kind of elliptic filters is the most widespread of all.