ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2002
Seria: ELEKTRYKA z.182 Nr kol. 1551

Tomasz ADRIKOWSKI, Marian PASKO

REALIZACJA PRAKTYCZNA FILTRÓW ELIPTYCZNYCH PARZYSTEGO RZĘDU Z UŻYCIEM STRUKTUR BIKWADRATOWYCH

Streszczenie. Niniejszy artykuł jest kontynuacją pracy [8]. Opisano w nim realizację praktyczną filtrów eliptycznych parzystego rzędu z użyciem struktur bikwadratowych. Punktem wyjścia do przeprowadzenia syntezy filtrów jest określenie zer i biegunów filtru znormalizowanego. Pokazano sposób wyznaczania tych zer i biegunów dla dowolnie przyjętych parametrów ε, k i parzystego rzędu r. Opisano procedurę wyznaczania realizacji układowej filtru dolnoprzepustowego, górnoprzepustowego, pasmowoprzepustowego oraz pasmowozaporowego. Przedstawiono procedurę obliczania wartości elementów struktur bikwadratowych wchodzących w skład danego filtru. Ponadto zamieszczono charakterystyki częstotliwościowe filtrów (rys.6, rys.10, rys.13, rys.16), uzyskane na drodze symulacji komputerowej.

PRACTICAL REALIZATION OF EVEN ORDER ELIPTIC FILTERS BY USING BIQUADRATIC STRUCTURE

Summary. This paper is a continuation of the previous one [8]. Practical realization of even order elliptic filters by using biquadratic structure is described. The starting point for conducting the synthesis of filters is to define zeros and poles of normalized filter. The way of determining these zeros and poles and for any assumed parameters ε, k and even order r is also showed. There is presented the procedure of determining the circuit realization of lowpass, highpass, bandpass and bandstop filters. There is also described the procedure of calculationg the values of elements of biquadratic structures that are the parts of a given filter. Moreover, frequency characteristics of filters (Figs.6, 10, 13, and 16) obtained from of computer simulation are shown as well.

1. WSTĘP

Realizacja filtrów za pomocą struktur bikwadratowych odbywa się na podstawie znajomości odpowiednio uporządkowanej operatorowej transmitancji przejściowej K(s). Transmitancję tę należy przedstawić jako iloczyn czynników bikwadratowych. Wtedy każdy czynnik z osobna jest realizowany za pomocą odpowiedniej układowej struktury

bikwadratowej, wykonywanej w formie układu zawierającego wzmacniacze operacyjne. Kompletny układ filtru mający realizować zadaną transmitancję K(s) jest połączeniem kaskadowym takich struktur. Ponadto najczęściej zachodzi potrzeba dołączenia dodatkowej struktury proporcjonalnej realizującej czynnik stały pojawiający się po rozłożeniu transmitancji na czynniki bikwadratowe.

2. OKREŚLENIE TRANSMITANCJI OPERATOROWEJ K(S) FILTRU ZNORMALIZOWANEGO

Kwadrat modułu transmitancji znormalizowanego filtru eliptycznego może być określony zależnością [8]:

$$K_0^2(\omega) = |K(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 F^2(\omega)}, \tag{1}$$

przy czym funkcja filtracji F(ω) dla parzystego rzędu r = 2, 4, 6, 8... jest określona wzorem:

$$F(\omega) = \frac{1}{h}\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \frac{\omega_i^2 - k\omega^2}{1-k\omega_i^2\omega^2}, \tag{2}$$

gdzie: ω_i – i-ta pulsacja charakterystyczna funkcji filtracji:

$$\omega_i = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{(2i-1)K(k)}{r}\right), \text{ przy czym } K = u\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}, \quad i = 1, 2 \ldots \frac{r}{2}, \tag{3}$$

h – współczynnik zafalowań funkcji filtracji:

$$h = \prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \omega_i^2. \tag{4}$$

Wstawiając zależność (2) do (1) uzyskuje się:

$$K_0^2(\omega) = \frac{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}}\left(1-k\omega_i^2\omega^2\right)}{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}}\left(1-k\omega_i^2\omega^2\right) + \frac{\varepsilon^2}{h^2}\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}}\left(\omega_i^2 - k\omega^2\right)}. \tag{5}$$

Następnie można przejść na dziedzinę operatorową, stosując podstawienie ω = –js:

$$K_0^2(js) = \frac{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}}\left(1+k\omega_i^2 s^2\right)}{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}}\left(1+k\omega_i^2 s^2\right) + \frac{\varepsilon^2}{h^2}\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}}\left(\omega_i^2 + ks^2\right)} = \frac{L^2(js)}{M^2(js)}. \tag{6}$$

W celu wyznaczenia transmitancji $K(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$ można skorzystać z właściwości [1]:

$$K_0^2(js) = K(s)K(-s), \tag{7}$$

z której wynika również:

$$L^2(js) = L(s)L(-s),\ M^2(js) = M(s)M(-s). \tag{8}$$

Licznik $L^2(js)$ można dalej przedstawić w postaci iloczynowej:

$$L^2(js) = L_0^2 \prod_{i=1}^{r} (s - z_i)^2, \tag{9}$$

gdzie z_i – zera funkcji $K_0^2(js)$ można obliczyć według wzorów:

$$z_{2i-1} = -1j\frac{1}{\omega_i\sqrt{k}},\ i = 1,2...\frac{r}{2}, \tag{10}$$

$$z_{2i} = -z_{2i-1} = 1j\frac{1}{\omega_i\sqrt{k}},\ i = 1,2...\frac{r}{2}. \tag{11}$$

Czynnik stały L_0^2 jest określony wzorem:

$$L_0^2 = k^{\frac{r}{2}} \prod_{i=1}^{r} \omega_i^2,\ i = 1,2...\frac{r}{2}. \tag{12}$$

Również mianownik $M^2(js)$ można przedstawić w postaci iloczynowej

$$M^2(js) = M_0^2 \prod_{i=1}^{r} (s - b_i) \prod_{i=r+1}^{2r} (s - b_i), \tag{13}$$

gdzie b_i – bieguny funkcji $K_0^2(js)$, które można wyznaczyć dowolną metodą numeryczną dla zadanego rzędu r oraz parametrów ε i k po przyrównaniu do zera mianownika zależności (6):

$$\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left(1 + k\omega_i^2 s^2\right) + \frac{\varepsilon^2}{h^2} \prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left(\omega_i^2 + ks^2\right) = 0. \tag{14}$$

Bieguny b_i można podzielić na 2 grupy:

a) bieguny b_i o indeksach od 1 do r leżące w lewej półpłaszczyźnie zespolonej,
b) bieguny b_i o indeksach od r +1 do 2r leżące w prawej półpłaszczyźnie, będące symetrycznym odbiciem względem osi urojonej biegunów z lewej półpłaszczyzny:

$$b_i = -b_{i+r},\ i = 1,2...r. \tag{15}$$

Ponadto bieguny obu grup można zestawić w pary sprzężone:

$$b_{2i} = b_{2i-1}^*,\ i = 1,\ 3...(2r-1). \tag{16}$$

Znając bieguny, można również określić numerycznie czynnik stały M_0^2 według następującego wzoru:

$$M_0^2 = \frac{M^2(js)}{\prod_{i=1}^{2r}(s-b_i)}, \tag{17}$$

podstawiając za s dowolną liczbę zespoloną $s \neq b_i$.

Transmitancję operatorową K(s) można zatem na mocy właściwości (7) wyrazić wzorem:

$$K(s) = \frac{L_0}{M_0}\frac{\prod_{i=1}^{r}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{r}(s-b_i)}. \tag{18}$$

Wszystkie zera z_i oraz bieguny b_i K(s) są rozmieszczone w lewej półpłaszczyźnie. Ponieważ $z_{2i} = -z_{2i-1}$, $i = 1,2...\frac{r}{2}$ oraz $b_{2i} = b_{2i-1}^*$, $i = 1, 3...(2r-1)$, więc można dalej wykazać, że:

$$\prod_{i=1}^{r}(s-z_i) = \prod_{i=1}^{\frac{r}{2}}(s-z_{2i-1})(s-z_{2i}) = \prod_{i=1}^{\frac{r}{2}}\left(s^2 + (\mathrm{Im}\{z_{2i-1}\})^2\right), \tag{19}$$

$$\prod_{i=1}^{r}(s-b_i) = \prod_{i=1}^{\frac{r}{2}}(s-b_{2i-1})(s-b_{2i}) = \prod_{i=1}^{\frac{r}{2}}\left(s^2 + 2|\mathrm{Re}\{b_{2i-1}\}|s + (\mathrm{Re}\{b_{2i-1}\})^2 + (\mathrm{Im}\{b_{2i-1}\})^2\right). \tag{20}$$

Uwzględniając wzory (19) i (20), można wyrazić transmitancję K(s) jako iloczyn czynników bikwadratowych:

$$K(s) = \frac{L_0}{M_0}\frac{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}}\left(s^2 + (\mathrm{Im}\{z_{2i-1}\})^2\right)}{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}}\left(s^2 + 2|\mathrm{Re}\{b_{2i-1}\}|s + (\mathrm{Re}\{b_{2i-1}\})^2 + (\mathrm{Im}\{b_{2i-1}\})^2\right)} = \tag{21}$$

$$= \frac{L_0}{M_0}\frac{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}}\left(s^2 + \omega_{z_{2i-1}}{}^2\right)}{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}}\left(s^2 + 2\sigma_{2i-1}s + \omega_{p_{2i-1}}{}^2\right)},$$

gdzie:

$$\omega_{z_{2i-1}}{}^2 = (\mathrm{Im}\{z_{2i-1}\})^2,\ \sigma_{2i-1} = 2|\mathrm{Re}\{b_{2i-1}\}|,\ \omega_{p_{2i-1}}{}^2 = (\mathrm{Re}\{b_{2i-1}\})^2 + (\mathrm{Im}\{b_{2i-1}\})^2,\ i = 1,2...\frac{r}{2}. \tag{22}$$

Można zauważyć, że zależność (21) jest wyrażona jedynie poprzez zera i bieguny o indeksach nieparzystych 2i – 1, czyli pochodzące z III ćwiartki. Uzyskana postać

transmitancji K(s), będąca iloczynem czynników bikwadratowych jest postacią, którą można wprost realizować za pomocą układowych struktur bikwadratowych.

Wyznaczenie biegunów, zer oraz transmitancji K(s) dla zadanych konkretnych parametrów k, ε oraz rzędu r = 4 zilustrowano na przykładzie 1.

Przykład 1

Należy wyznaczyć transmitancję operatorową K(s) o postaci bikwadratowej znormalizowanego filtru eliptycznego 4 rzędu o parametrach ε = 1, k = 0,5.

Rozwiązanie

Na podstawie wzoru (3) wyznaczamy pulsacje charakterystyczne ω_1 oraz ω_2:

$$\omega_1 = \sqrt{0{,}5}\,\mathrm{sn}\left(\frac{K(0{,}5)}{4}\right) \cong 0{,}2873\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}},\ \omega_2 = \sqrt{0{,}5}\,\mathrm{sn}\left(\frac{3K(0{,}5)}{4}\right) \cong 0{,}6599\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \tag{23}$$

oraz na podstawie wzoru (4) współczynnik h:

$$h = \omega_1\omega_2 \cong 0{,}0359. \tag{24}$$

Zera wyliczamy według zależności (10) i (11):

$$\begin{gathered} z_1 = -j\frac{1}{\omega_1\sqrt{k}} \cong -j4{,}922,\ z_2 = j\frac{1}{\omega_1\sqrt{k}} \cong j4{,}922, \\ z_3 = -j\frac{1}{\omega_2\sqrt{k}} \cong -j2{,}143,\ z_4 = j\frac{1}{\omega_2\sqrt{k}} \cong -j2{,}143. \end{gathered} \tag{25}$$

Natomiast bieguny $K_0^2(js)$ obliczamy dowolną metodą numeryczną z równania (14):

a) leżące w lewej półpłaszczyźnie będące właściwymi biegunami K(s):

$$\begin{gathered} b_1 \cong -0{,}213256 - j0{,}420556,\ b_2 = b_1^* \cong -0{,}213256 + j0{,}420556, \\ b_3 \cong -0{,}0752064 - j0{,}954103,\ b_4 = b_3^* \cong -0{,}0752064 + j0{,}954103, \end{gathered} \tag{26}$$

b) leżące w prawej półpłaszczyźnie:

$$\begin{gathered} b_5 \cong 0{,}0752064 - j0{,}954103,\ b_6 = b_5^* \cong 0{,}0752064 + j0{,}954103, \\ b_7 \cong 0{,}213256 - j0{,}420556,\ b_8 = b_7^* \cong 0{,}213256 + j0{,}420556. \end{gathered} \tag{27}$$

Rozmieszczenie biegunów i zer przedstawiono na rys. 1.

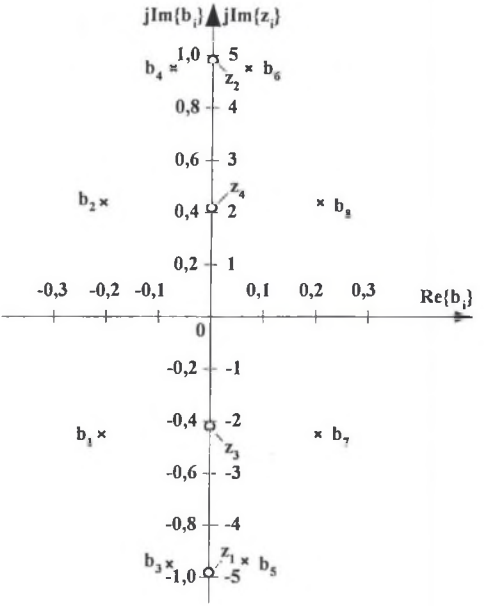
Transmitancja K(s) w postaci iloczynu czynników bikwadratowych wynosi:

$$K(s) = \frac{L_0}{M_0}\cdot\frac{s^2 + \omega_{z_1}^2}{s^2 + 2\cdot\sigma_1\cdot s + \omega_{p_1}^2}\cdot\frac{s^2 + \omega_{z_3}^2}{s^2 + 2\cdot\sigma_3\cdot s + \omega_{p_3}^2}, \tag{28}$$

gdzie: $L_0 \cong 8{,}986\cdot 10^{-3}$, $M_0 \cong 6{,}9638$,

$\omega_{z_1}^2 \cong 24{,}2303$, $\sigma_1 \cong 0{,}4265$ $\omega_{p_1}^2 \cong 0{,}2223$, $\omega_{z_3}^2 \cong 4{,}5928$, $\sigma_3 \cong 0{,}1504$ $\omega_{p_3}^2 \cong 0{,}9160$.

□



Rys. 1. Rozmieszczenie zer i biegunów $K_0^2(js)$
Fig. 1. Location of zeros and poles of $K_0^2(js)$

3. REALIZACJA FILTRU DOLNOPRZEPUSTOWEGO

Transmitancja filtru dolnoprzepustowego o dowolnej częstotliwości granicznej f_{gr} powstaje poprzez transformację częstotliwościową transmitancji filtru znormalizowanego określoną wzorem (21). Transformacji dokonuje się podstawiając w miejsce zmiennej s wyrażenie transformacji $\frac{s}{2\pi f_{gr}}$:

$$s \leftarrow \frac{s}{2\pi f_{gr}}. \tag{29}$$

Po dokonaniu tej transformacji i uporządkowaniu otrzymuje się transmitancję filtru dolnoprzepustowego o częstotliwości granicznej f_{gr} w postaci iloczynu czynników bikwadratowych:

$$K(s) = K_{U0} \frac{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left(s^2 + \omega_{z_{2i-1}}{}^2\right)}{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left(s^2 + 2\sigma_{2i-1} s + \omega_{p_{2i-1}}{}^2\right)}, \tag{30}$$

gdzie:

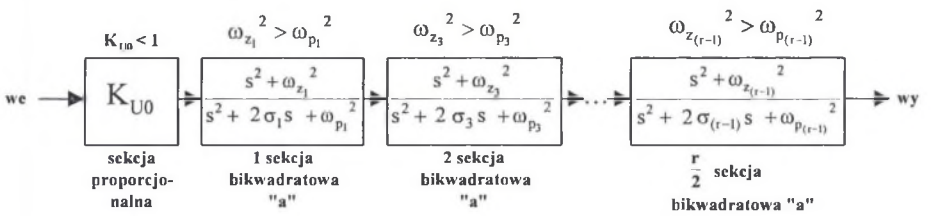
$$\omega_{z_{2i-1}}{}^2 = 4\pi^2 f_{gr}^2 (\mathrm{Im}\{z_{2i-1}\})^2,\ \sigma_{2i-1} = 4\pi f_{gr} |\mathrm{Re}\{b_{2i-1}\}|,$$
$$\omega_{p_{2i-1}}{}^2 = 4\pi^2 f_{gr}^2 \left[(\mathrm{Re}\{b_{2i-1}\})^2 + (\mathrm{Im}\{b_{2i-1}\})^2\right],\ i = 1,2...\frac{r}{2},\ K_{U0} = \frac{L_0}{M_0}, \tag{31}$$

L_0, M_0 – czynniki stałe określone odpowiednio zależnościami (12), (17).

Dla dowolnie przyjętych parametrów filtru dolnoprzepustowego $K_{U0} < 1$, ponadto wyraz wolny licznika każdego czynnika bikwadratowego transmitancji K(s) jest większy od wyrazu wolnego mianownika:

$$\omega_{z_{2i-1}}{}^2 > \omega_{p_{2i-1}}{}^2,\ i = 1,2...\frac{r}{2}. \tag{32}$$

Układ praktyczny filtru dolnoprzepustowego będzie się składał z kaskady umieszczonej na początku struktury proporcjonalnej i z występujących po niej $\frac{r}{2}$ struktur bikwadratowych typu „a". Struktura proporcjonalna realizuje czynnik stały K_{U0}, spełniający warunek $K_{U0} < 1$, natomiast każda struktura bikwadratowa typu „a" realizuje jeden z czynników bikwadratowych, spełniających warunek (32). Układ struktur przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Schemat blokowy, przedstawiający układ struktur filtru dolnoprzepustowego
Fig. 2. Block diagram showing the composition of lowpass filter structures

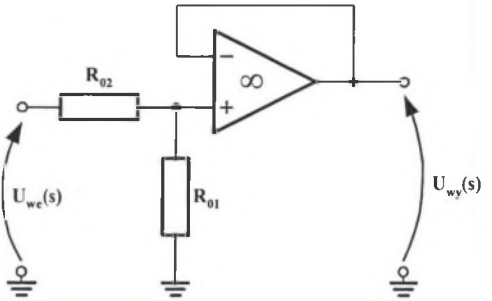
Układ struktury proporcjonalnej, zwanej zerową, przedstawiono na rys. 3. Transmitancja tej struktury ustalana jest przez rezystory R_{01}, R_{02} i wyraża się zależnością:

$$\frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \frac{R_{01}}{R_{01}+R_{02}} < 1. \tag{33}$$

Dobór wartości rezystorów może się odbywać według następującej procedury:

1. zakładamy wartość R_{01},
2. R_{02} wyznaczamy według wzoru:

$$R_{02} = R_{01}\frac{1-K_{U0}}{K_{U0}}. \tag{34}$$



Rys. 3. Układ struktury proporcjonalnej
Fig. 3. Schematic diagram of the proportional structure

Układ struktury bikwadratowej „a", przeznaczonej do realizacji czynników bikwadratowych filtru dolnoprzepustowego, spełniającej warunek (32), przedstawiono na rys. 4. Układ ten zaczerpnięto z katalogu struktur bikwadratowych [7]. Transmitancja tej struktury ustalana jest przez rezystory oraz kondensatory i wyraża się za pomocą wzoru:

$$\frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \frac{s^2 + \omega_z^2}{s^2 + 2\sigma s + \omega_p^2} = \frac{s^2 + \dfrac{R_3}{R_4 C_1 R_2 C_5 R_6}\left(1 + \dfrac{R_2}{R_1}\right)}{s^2 + \dfrac{1}{C_1 R_1} s + \dfrac{R_3}{R_4 C_1 R_2 C_5 R_6}}, \tag{35}$$

przy czym $\omega_z^2 > \omega_p^2$.

Dobór wartości elementów struktury można przeprowadzić według następującej procedury:

1. zakładamy wartość C_1,
2. wyznaczamy wartość R_1 ze wzoru:

$$R_1 = \frac{1}{2\sigma C_1}, \tag{36}$$

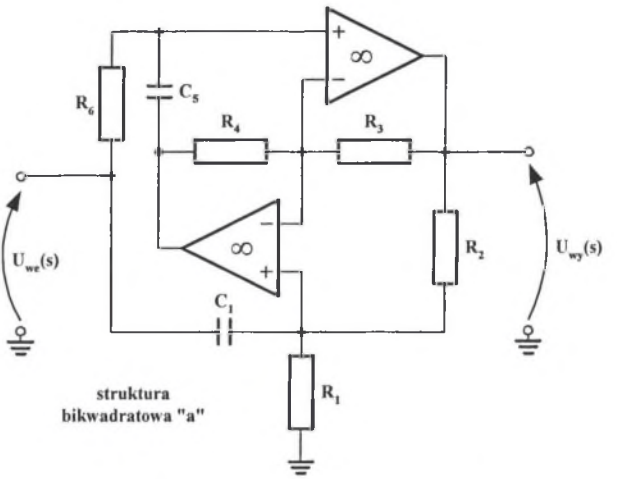
3. wyznaczamy wartość R_2 ze wzoru:

$$R_2 = R_1 \frac{\omega_z^2 - \omega_p^2}{\omega_p^2}, \tag{37}$$

4. zakładamy wartości R_3, R_4, R_6, C_5,
5. obliczamy wartość R_3 ze wzoru:

$$R_3 = \omega_p^2 R_4 C_1 R_2 C_5 R_6. \tag{38}$$

Wyznaczenie struktury filtru dolnoprzepustowego dla konkretnych wartości k, ε i rzędu r = 4 przedstawiono w przykładzie 2.



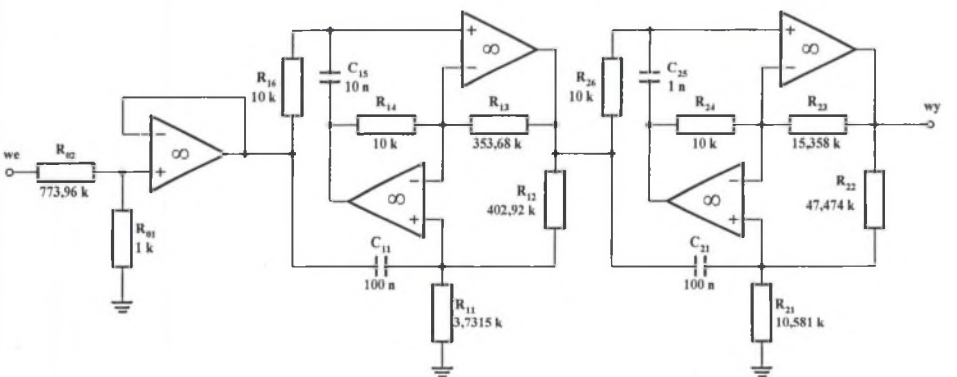
Rys. 4. Układ struktury bikwadratowej typu „a", przeznaczonej do realizacji filtrów dolnoprzepustowych
Fig. 4. Scheme of the type "a" biquadratic structure used for lowpass filters realization

Przykład 2

Należy wyznaczyć strukturę filtru dolnoprzepustowego rzędu r = 4 o częstotliwości granicznej f_{gr} = 1 kHz i parametrach ε i k określonych dla filtru znormalizowanego w przykładzie 1, czyli ε = 1, k = 0,5.

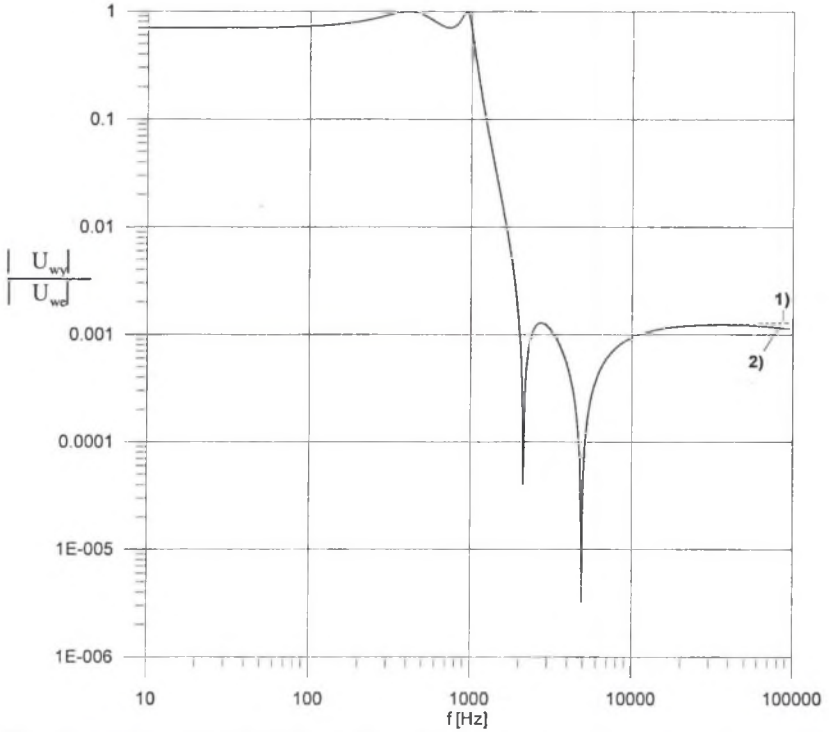
Rozwiązanie

Układ zawiera jedną strukturę proporcjonalną oraz dwie struktury bikwadratowe „a". Wartości elementów obliczono zgodnie z opisanymi procedurami. Schemat układu filtru przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5. Schemat realizacji układowej filtru dolnoprzepustowego
Fig. 5. Lowpass filter circuit realization

Układ poddano symulacji komputerowej w programie SPICE. Na rys. 6 zaprezentowano charakterystyki częstotliwościowe filtru uzyskane z tych symulacji dla dwóch wariantów: a) z użyciem wzmacniaczy idealnych, b) z użyciem wzmacniaczy rzeczywistych.



Rys. 6. Charakterystyka częstotliwościowa filtru dolnoprzepustowego uzyskana w ramach przeprowadzonych symulacji: 1) idealne wzmacniacze operacyjne, 2) rzeczywiste wzmacniacze operacyjne

Fig. 6. Frequency characteristic of the lowpass filter obtained from of carrying out simulations: 1) ideal operational amplifiers, 2) real operational amplifiers

□

4. REALIZACJA FILTRU GÓRNOPRZEPUSTOWEGO

Transmitancja filtru górnoprzepustowego o dowolnej częstotliwości granicznej f_{gr} powstaje poprzez transformację częstotliwościową transmitancji filtru znormalizowanego określonej wzorem (21) poprzez podstawienie:

$$s \leftarrow \frac{2\pi f_{gr}}{s}. \tag{39}$$

Po dokonaniu tej transformacji i uporządkowaniu otrzymuje się transmitancję filtru górnoprzepustowego o częstotliwości granicznej f_{gr} w postaci iloczynu czynników bikwadratowych:

$$K(s) = K_{U0} \frac{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left(s^2 + \omega_{z_{2i-1}}{}^2\right)}{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left(s^2 + 2 \cdot \sigma_{2i-1} \cdot s + \omega_{p_{2i-1}}{}^2\right)}, \tag{40}$$

gdzie:

$$\omega_{z_{2i-1}}{}^2 = \frac{4\pi^2 f_{gr}^2}{(\mathrm{Im}\{z_{2i-1}\})^2}, \quad \sigma_{2i-1} = \frac{4\pi f_{gr} |\mathrm{Re}\{b_{2i-1}\}|}{(\mathrm{Re}\{b_{2i-1}\})^2 + (\mathrm{Im}\{b_{2i-1}\})^2},$$

$$\omega_{p_{2i-1}}{}^2 = \frac{4\pi^2 f_{gr}^2}{(\mathrm{Re}\{b_{2i-1}\})^2 + (\mathrm{Im}\{b_{2i-1}\})^2}, \quad i = 1, 2 \ldots \frac{r}{2}, \tag{41}$$

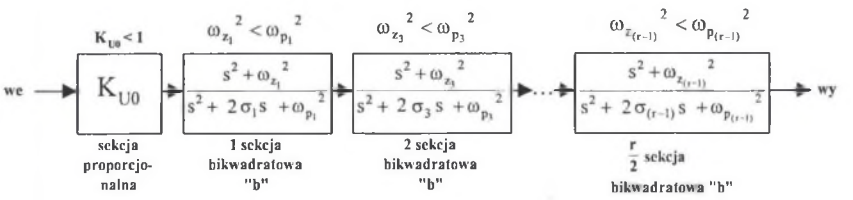
$$K_{U0} = \frac{L_0}{M_0} \prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \frac{(\mathrm{Im}\{z_{2i-1}\})^2}{(\mathrm{Re}\{b_{2i-1}\})^2 + (\mathrm{Im}\{b_{2i-1}\})^2},$$

L_0, M_0 – czynniki stałe określone odpowiednio zależnościami (12), (17).

Dla dowolnie przyjętych parametrów filtru górnoprzepustowego $K_{U0} < 1$, ponadto wyraz wolny mianownika każdego czynnika bikwadratowego transmitancji K(s) jest większy od wyrazu wolnego licznika:

$$\omega_{p_{2i-1}}{}^2 > \omega_{z_{2i-1}}{}^2, \quad i = 1, 2 \ldots \frac{r}{2}. \tag{42}$$

Układ struktur filtru górnoprzepustowego będzie taki jak dla filtru dolnoprzepustowego, z tą różnicą że zostaną użyte struktury bikwadratowe typu „b" spełniające warunek (42). Układ struktur przedstawiono na rys. 7.

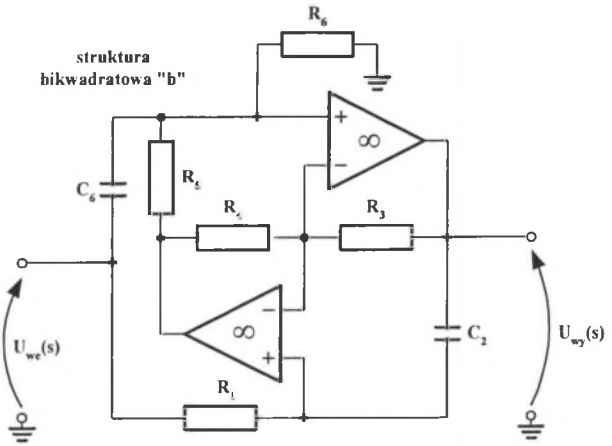


Rys. 7. Schemat blokowy, przedstawiający układ struktur filtru dolnoprzepustowego
Fig. 7. Block diagram showing the composition of highpass filter structures

Układ struktury bikwadratowej „b" zaczerpniętej z katalogu struktur bikwadratowych [7], przeznaczonej do realizacji czynników bikwadratowych filtru górnoprzepustowego, spełniającej warunek (42), przedstawiono na rys. 8. Transmitancja tej struktury ustalana przez rezystory oraz kondensatory wyraża się zależnością:

$$\frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \frac{s^2 + \omega_z{}^2}{s^2 + 2\sigma s + \omega_p{}^2} = \frac{s^2 + \frac{R_4}{R_3 C_2 R_1 C_6 R_5}\left(1 - \frac{R_5}{R_6}\right)}{s^2 + \frac{1}{C_6 R_6} s + \frac{R_4}{R_3 C_2 R_1 C_6 R_5}}, \tag{43}$$

przy czym $\omega_z^2 < \omega_p^2$.



Rys. 8. Układ struktury bikwadratowej typu „b", przeznaczonej do realizacji filtrów górnoprzepustowych
Fig. 8. Scheme of the biquadratic structure type "b", destined to the highpass filters realization

Dobór wartości elementów struktury można przeprowadzić według następującej procedury:

1. zakładamy wartość C_2,
2. wyznaczamy wartość R_1 ze wzoru:

$$R_1 = \frac{2\sigma}{C_2\left(\omega_p^2 - \omega_z^2\right)}, \tag{44}$$

3. zakładamy wartość C_6,
4. wyznaczamy wartość R_6 ze wzoru:

$$R_6 = \frac{1}{2\sigma C_6}, \tag{45}$$

5. zakładamy wartości R_4, R_5,
6. obliczamy wartość R_3 ze wzoru:

$$R_3 = \frac{R_4}{\omega_p^2 C_2 R_1 C_6 R_5}. \tag{46}$$

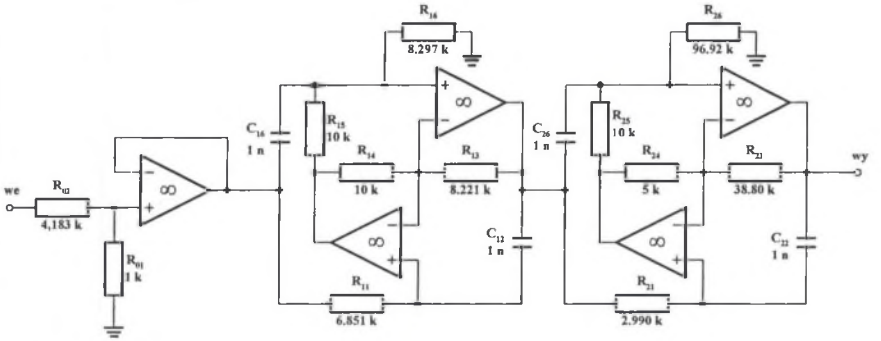
Wyznaczenie struktury filtru górnoprzepustowego dla konkretnych wartości k, ε i rzędu r = 4 przedstawiono w przykładzie 3.

Przykład 3

Należy wyznaczyć strukturę filtru górnoprzepustowego rzędu r = 4 o częstotliwości granicznej f_{gr} = 10 kHz i parametrach ε i k określonych w przykładzie 1, czyli ε = 1, k = 0,5.

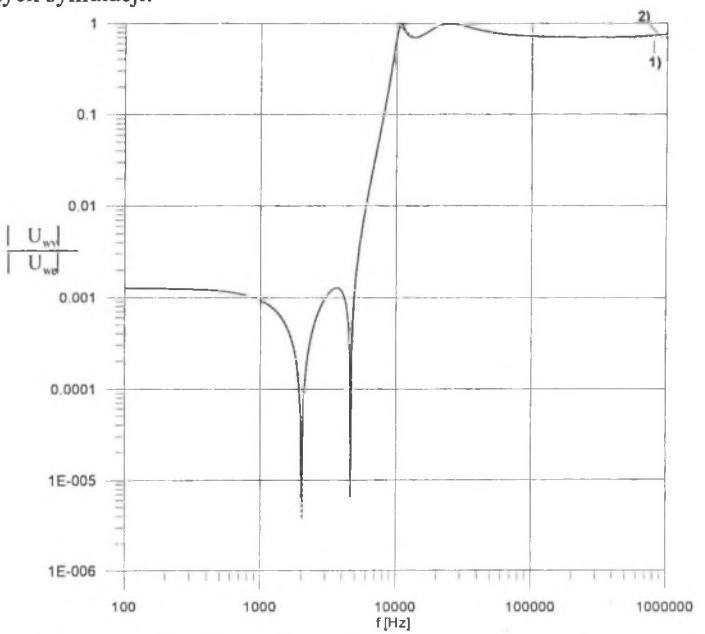
Rozwiązanie

Układ zawiera jedną strukturę proporcjonalną oraz dwie struktury bikwadratowe „b". Wartości elementów obliczono zgodnie z opisanymi procedurami. Schemat układu filtru przedstawiono na rys. 9.



Rys. 9. Schemat realizacji układowej filtru górnoprzepustowego
Fig. 9. Highpass filter circuit realization

Na rys. 10. przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe filtru uzyskane w wyniku przeprowadzonych symulacji.



Rys. 10. Charakterystyka częstotliwościowa filtru górnoprzepustowego uzyskana w ramach przeprowadzonych symulacji: 1) idealne wzmacniacze operacyjne, 2) rzeczywiste wzmacniacze operacyjne
Fig. 10. Frequency characteristic of the highpass filter obtained from simulations: 1) ideal operatinal amplifiers, 3) real operatinal amplifiers

□

5. REALIZACJA FILTRU PASMOWOPRZEPUSTOWEGO

Transmitancja filtru pasmowoprzepustowego o dowolnej częstotliwości granicznej dolnej f_d oraz górnej f_g, powstaje poprzez transformację częstotliwościową transmitancji filtru znormalizowanego określonej wzorem (21) poprzez podstawienie:

$$s \leftarrow \frac{s}{2\pi(f_g - f_d)} + \frac{2\pi f_d f_g}{(f_g - f_d)s}. \tag{47}$$

Po dokonaniu tej transformacji i uporządkowaniu otrzymuje się transmitancję filtru pasmowoprzepustowego w postaci iloczynu czynników bikwadratowych:

$$K(s) = K_{U0} \frac{\prod_{i=1}^{r}\left(s^2 - s2\pi(f_g - f_d)z_i + 4\pi^2 f_d f_g\right)}{\prod_{i=1}^{r}\left(s^2 - s2\pi(f_g - f_d)b_i + 4\pi^2 f_d f_g\right)} = K_{U0} \frac{\prod_{i=1}^{r} L_i(s)}{\prod_{i=1}^{r} M_i(s)}, \tag{48}$$

gdzie: $K_{U0} = \frac{L_0}{M_0} < 1$ i L_0, M_0 – czynniki stałe określone zależnościami (12), (17).

Transmitancja w postaci określonej wzorem (48) nie jest realizowalna przez żadną opracowaną strukturę ze względu na to, że współczynnik 1 stopnia zarówno licznika, jak i mianownika jest liczbą zespoloną. Wyznaczając miejsca zerowe licznika i mianownika, można licznik i mianownik doprowadzić do postaci iloczynowej. Mianowicie, dla i-tego czynnika bikwadratowego transmitancji K(s) mamy:

$$L_i(s) = (s - z_{i1})(s - z_{i2}), \tag{49}$$

gdzie:

$$z_{i1} = \pi(f_g - f_d)z_i - \pi\sqrt{(f_g - f_d)^2 z_i^2 - 4f_d f_g}, \quad z_{i2} = \pi(f_g - f_d)z_i + \pi\sqrt{(f_g - f_d)^2 z_i^2 - 4f_d f_g}, \tag{50}$$

oraz:

$$M_i(s) = (s - z_{i1})(s - z_{i2}), \tag{51}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} b_{i1} &= \pi(f_g - f_d)b_i - \pi\sqrt{(f_g - f_d)^2 b_i^2 - 4f_d f_g}, \\ b_{i2} &= \pi(f_g - f_d)b_i + \pi\sqrt{(f_g - f_d)^2 b_i^2 - 4f_d f_g}. \end{aligned} \tag{52}$$

Ponieważ można zauważyć, że:

$$z_{2i-1,1} = -z_{2i,2},\ z_{2i-1,2} = -z_{2i,1},\ b_{2i-1,1} = b^*_{2i,1},\ b_{2i-1,2} = b^*_{2i,2},\ i = 1,2...\frac{r}{2}, \tag{53}$$

więc transmitancję K(s) można rozbić na dwie grupy iloczynów czynników bikwadratowych:

$$K(s) = K_{U0} \underbrace{\frac{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left((s - z_{2i-1,1})(s - z_{2i,2}) \right)}{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left((s - b_{2i-1,1})(s - b_{2i,1}) \right)}}_{\text{1 grupa}} \cdot \underbrace{\frac{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left((s - z_{2i-1,2})(s - z_{2i,1}) \right)}{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left((s - b_{2i-1,2})(s - b_{2i,2}) \right)}}_{\text{2 grupa}}. \tag{54}$$

Po wymnożeniu dwumianów zmiennej s otrzymuje się następującą postać K(s):

$$K(s) = K_{U0} \underbrace{\frac{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left(s^2 + \omega_{z_{2i-1}}{}^2 \right)}{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left(s^2 + 2\sigma_{2i-1} s + \omega_{p_{2i-1}}{}^2 \right)}}_{\text{1 grupa}} \cdot \underbrace{\frac{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left(s^2 + \omega_{z_2}{}^2 \right)}{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left(s^2 + 2\sigma_{2i} s + \omega_{p_2}{}^2 \right)}}_{\text{2 grupa}}, \tag{55}$$

gdzie:

$$\omega_{z_{2i-1}}{}^2 = \left(\mathrm{Im}\{z_{2i-1,1}\}\right)^2,\ \sigma_{2i-1} = 2\left|\mathrm{Re}\{b_{2i-1,1}\}\right|,\ \omega_{p_{2i-1}}{}^2 = \left(\mathrm{Re}\{b_{2i-1,1}\}\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\{b_{2i-1,1}\}\right)^2,$$

$$\omega_{z2}{}^2 = \left(\mathrm{Im}\{z_{2i-1,2}\}\right)^2,\ \sigma_{2i} = 2\left|\mathrm{Re}\{b_{2i-1,2}\}\right|,\ \omega_{p_{2i}}{}^2 = \left(\mathrm{Re}\{b_{2i-1,2}\}\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\{b_{2i-1,2}\}\right)^2, \tag{56}$$

$$i = 1, 2 \ldots \frac{r}{2}.$$

Dla dowolnie przyjętych parametrów filtru pasmowoprzepustowego wyraz wolny licznika każdego czynnika bikwadratowego 1 grupy jest większy od wyrazu wolnego mianownika:

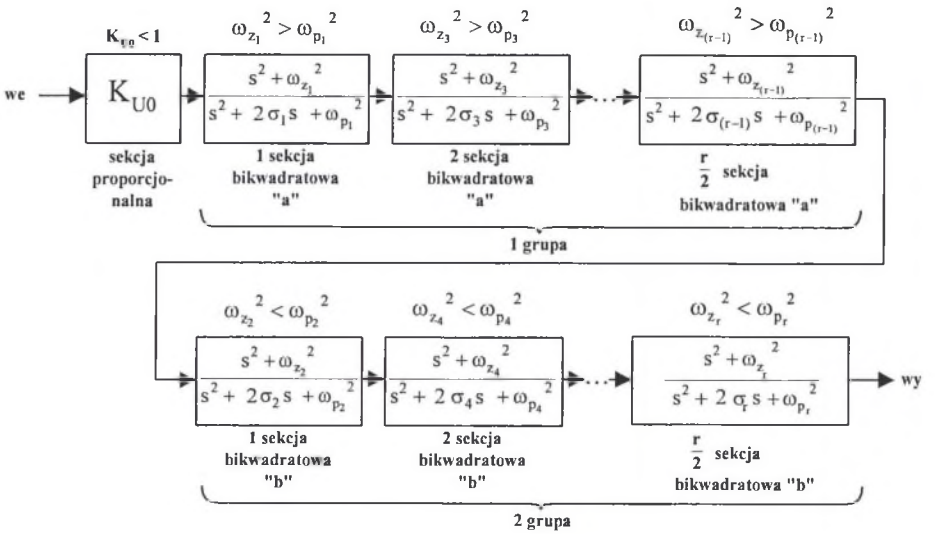
$$\omega_{z_{2i-1}}{}^2 > \omega_{p_{2i-1}}{}^2,\ i = 1, 2 \ldots \frac{r}{2}, \tag{57}$$

z kolei wyraz wolny mianownika każdego czynnika 2 grupy jest większy od wyrazu wolnego licznika:

$$\omega_{p_{2i-1}}{}^2 > \omega_{z_{2i-1}}{}^2,\ i = 1, 2 \ldots \frac{r}{2}. \tag{58}$$

Wynika stąd, że czynniki bikwadratowe 1 grupy będą realizowane za pomocą struktury bikwadratowej typu „a", natomiast czynniki bikwadratowe 2 grupy za pomocą struktury bikwadratowej typu „b". Układ struktur przedstawiono na rys. 11.

Wyznaczenie struktury filtru pasmowoprzepustowego dla konkretnych wartości k, ε i rzędu r = 4 przedstawiono w przykładzie 4.



Rys. 11. Schemat blokowy, przedstawiający układ struktur filtru pasmowoprzepustowego
Fig. 11. Block diagram showing the composition of bandpass filter structures

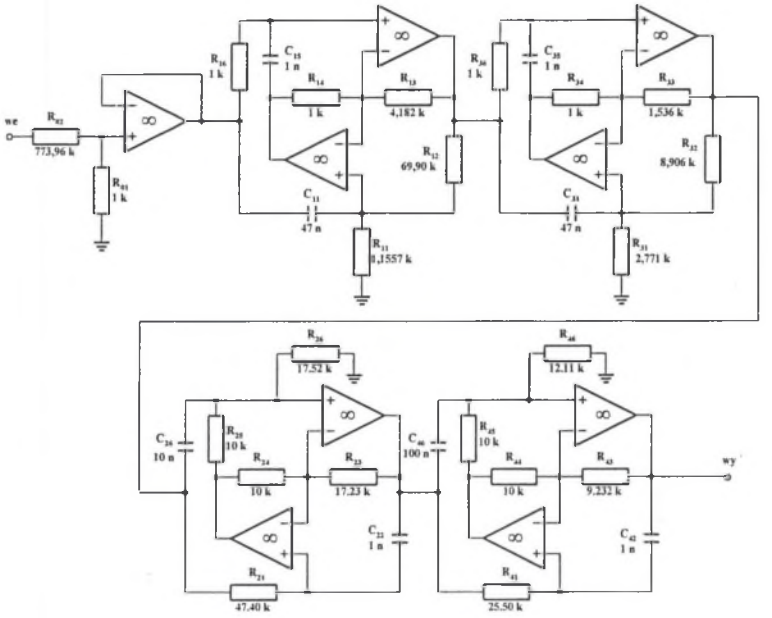
Przykład 4

Należy wyznaczyć strukturę filtru pasmowoprzepustowego rzędu r = 4 o częstotliwości granicznej dolnej f_d = 1 kHz oraz górnej f_g = 10 kHz i parametrach ε i k określonych w przykładzie 1, czyli ε = 1, k = 0,5.

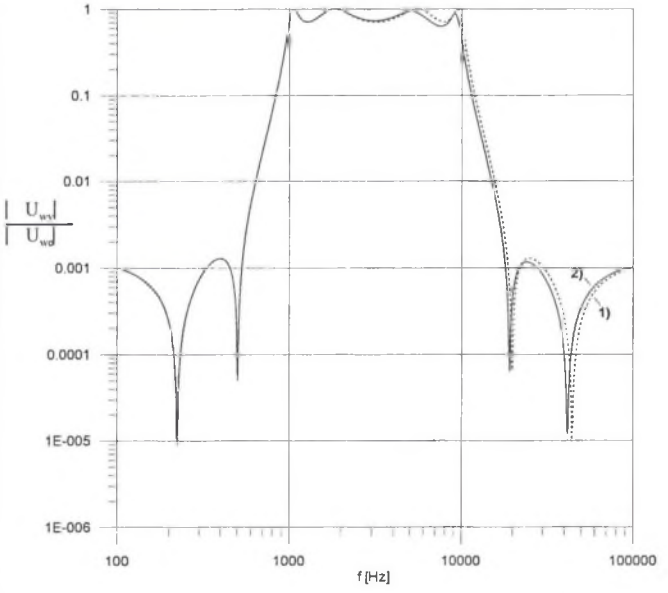
Rozwiązanie

Układ zawiera jedną strukturę proporcjonalną oraz dwie struktury bikwadratowe „a" i dwie struktury bikwadratowe typu „b". Wartości elementów obliczono zgodnie z opisanymi procedurami. Schemat układu filtru przedstawiono na rys. 12.

Na rys. 13 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe filtru uzyskane w wyniku przeprowadzonych symulacji.



Rys. 12. Schemat realizacji układowej filtru pasmowoprzepustowego
Fig. 12. Scheme of bandpass filter circuit realization



Rys. 13. Charakterystyka częstotliwościowa filtru pasmowoprzepustowego uzyskana w ramach przeprowadzonych symulacji: 1) idealne wzmacniacze operacyjne, 2) rzeczywiste wzmacniacze operacyjne
Fig. 13. Frequency characteristic of the bandpass filter obtained from simulations: 1) ideal operational amplifiers, 2) real operational amplifiers

□

6. REALIZACJA FILTRU PASMOWOZAPOROWEGO

Transmitancja filtru pasmowozaporowego o częstotliwości granicznej dolnej f_d oraz górnej f_g powstaje poprzez transformację częstotliwościową transmitancji filtru znormalizowanego określonej wzorem (21) po podstawieniu:

$$s \leftarrow \frac{2\pi(f_g - f_d)s}{s^2 + 4\pi^2 f_d f}. \tag{59}$$

Po dokonaniu tej transformacji i uporządkowaniu oraz stosując podobne rozważania jak dla filtru pasmowoprzepustowego, uzyskuje się jak dla filtru pasmowoprzepsutowego następującą postać transmitancji filtru, będącą iloczynem czynników bikwadratowych, składającą się z 2 grup:

$$K(s) = K_{U0} \underbrace{\frac{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left(s^2 + \omega_{z_{2i-1},1}{}^2\right)}{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left(s^2 + 2\sigma_{2i-1,1}\, s + \omega_{p_{2i-1},1}{}^2\right)}}_{\text{I grupa}} \cdot \underbrace{\frac{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left(s^2 + \omega_{z_{2i},2}{}^2\right)}{\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \left(s^2 + 2\sigma_{2i,2}\, s + \omega_{p_{2i},2}{}^2\right)}}_{\text{2 grupa}}, \tag{60}$$

gdzie:

$$\begin{gathered}
\omega_{z_{2i-1}}{}^2 = \left(\mathrm{Im}\{z_{2i-1,1}\}\right)^2,\ \sigma_{2i-1} = 2\left|\mathrm{Re}\{b_{2i-1,1}\}\right|,\ \omega_{p_{2i-1}}{}^2 = \left(\mathrm{Re}\{b_{2i-1,1}\}\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\{b_{2i-1,1}\}\right)^2, \\
\omega_{z2}{}^2 = \left(\mathrm{Im}\{z_{2i-1,2}\}\right)^2,\ \sigma_{2i} = 2\left|\mathrm{Re}\{b_{2i-1,2}\}\right|,\ \omega_{p_{2i}}{}^2 = \left(\mathrm{Re}\{b_{2i-1,2}\}\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\{b_{2i-1,2}\}\right)^2, \\
i = 1, 2 \ldots \frac{r}{2},
\end{gathered} \tag{61}$$

przy czym:

$$\begin{gathered}
z_{i,1} = \frac{\pi(f_g - f_d)}{z_i} - \pi\sqrt{\frac{(f_g - f_d)^2}{z_i^2} - 4 f_d f_g}, \\
z_{i,2} = \frac{\pi(f_g - f_d)}{z_i} + \pi\sqrt{\frac{(f_g - f_d)^2}{z_i^2} - 4 f_d f_g},
\end{gathered} \tag{62}$$

$$\begin{gathered}
b_{i,1} = \frac{\pi(f_g - f_d)}{b_i} - \pi\sqrt{\frac{(f_g - f_d)^2}{b_i^2} - 4 f_d f_g}, \\
b_{i,2} = \frac{\pi(f_g - f_d)}{b_i} + \pi\sqrt{\frac{(f_g - f_d)^2}{b_i^2} - 4 f_d f_g}.
\end{gathered} \tag{63}$$

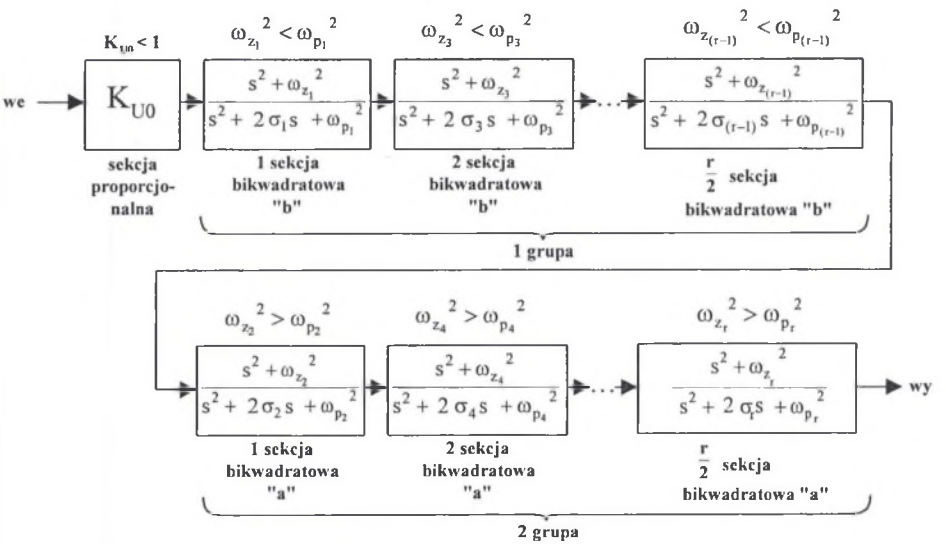
Odwrotnie niż to miało miejsce dla filtru pasmoprzepustowego, wyraz wolny mianownika filtru pasmowozaporowego każdego czynnika bikwadratowego z 1 grupy jest większy od wyrazu wolnego licznika:

$$\omega_{p_{2i-1}}{}^2 > \omega_{z_{2i-1}}{}^2,\ i = 1,2...\frac{r}{2}, \tag{64}$$

z kolei wyraz wolny licznika każdego czynnika z 2 grupy jest większy od wyrazu wolnego mianownika:

$$\omega_{z_{2i-1}}{}^2 > \omega_{p_{2i-1}}{}^2,\ i = 1,2...\frac{r}{2}. \tag{65}$$

Wynika stąd, że czynniki bikwadratowe 1 grupy będą realizowane za pomocą struktury bikwadratowej typu „b", natomiast czynniki bikwadratowe 2 grupy za pomocą struktury bikwadratowej typu „a". Układ struktur filtru przedstawiono na rys. 14.



Rys. 14. Schemat blokowy, przedstawiający układ struktur filtru pasmowozaporowego
Fig. 14. Block diagram showing the composition of stopband filter structures

Wyznaczenie struktury filtru pasmowoprzepustowego dla konkretnych wartości k, ε i rzędu r = 4 przedstawiono w przykładzie 5.

Przykład 5

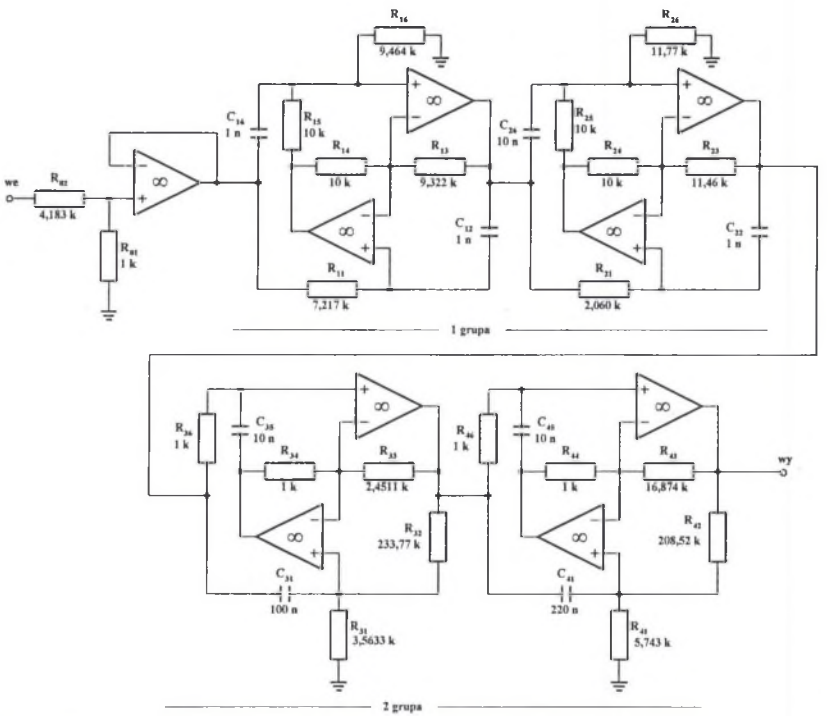
Należy wyznaczyć strukturę filtru pasmowozaporowego rzędu r = 4 o częstotliwości granicznej dolnej f_d = 1 kHz oraz górnej f_g = 10 kHz i parametrach ε i k określonych w przykładzie 1, czyli ε = 1, k = 0,5.

Rozwiązanie

Układ zawiera jedną strukturę proporcjonalną oraz dwie struktury bikwadratowe „b" i dwie struktury bikwadratowe typu „a". Wartości elementów obliczono zgodnie z opisanymi procedurami. Schemat układu filtru przedstawiono na rys. 15.

Natomiast na rys. 16. zaprezentowano charakterystyki częstotliwościowe filtru uzyskane w ramach wykonanych symulacji.

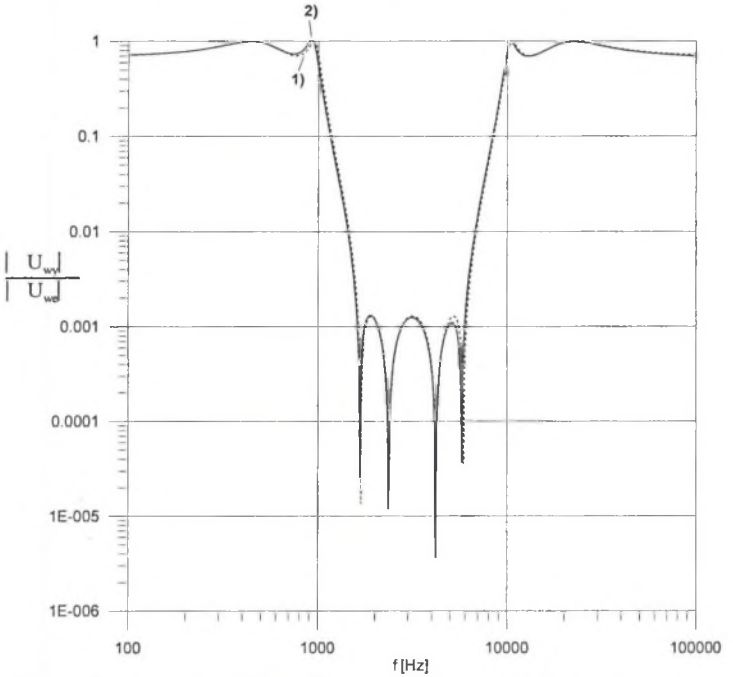
□



Rys. 15. Schemat realizacji układowej filtru pasmowozaporowego
Fig. 15. Stopband filter circuit realization

WNIOSKI

W pracy opisano realizację unormowanych filtrów eliptycznych za pomocą analogowych struktur bikwadratowych. Stosując dwa opisane typy struktur bikwadratowych (struktura typu „a" przedstawiona na rys. 4 oraz struktura typu "b" przedstawiona na rys. 8) oraz strukturę proporcjonalną (rys. 3), można zbudować filtry eliptyczne o dowolnym typie charakterystyki częstotliwościowej. Prostszą budowę ma filtr dolnoprzepustowy oraz górnoprzepustowy.



Rys. 16. Charakterystyka częstotliwościowa filtru pasmowozaporowego uzyskana w ramach przeprowadzonych symulacji: 1) idealne wzmacniacze operacyjne, 2) rzeczywiste wzmacniacze operacyjne

Fig. 16. Frequency characteristic of the stopband filter obtained from simulationa: 1) ideal operational amplifiers, 2) real operational amplifiers

Do budowy filtru dolnoprzepustowego r-tego rzędu należy użyć $\frac{r}{2}$ struktur typu „a", natomiast filtr górnoprzepustowy r-tego rzędu można zbudować z $\frac{r}{2}$ struktur typu „b".

Do realizacji układowej filtrów pasmowych (pasmowoprzepustowy oraz pasmowozaporowy) r-tego rzędu należy użyć 2-krotnie więcej struktur, mianowicie $\frac{r}{2}$ struktur typu „a" oraz $\frac{r}{2}$ struktur typu „b".

Wyznaczone w przykładach struktury filtrów 4 rzędu (rys. 5, rys. 9, rys. 12, rys. 15) zostały przebadane w programie symulacyjnym SPICE. W ramach przeprowadzonych symulacji zdjęto charakterystyki częstotliwościowe tych filtrów ze wzmacniaczami idealnymi oraz rzeczywistymi. Charakterystyki wszystkich symulowanych filtrów zawierających wzmacniacze idealne są zgodne z założonymi, czyli idealnymi charakterystykami (rys. 6, rys. 10, rys. 13, rys. 16 – krzywa 1). Natomiast użycie wzmacniaczy rzeczywistych (dla przykładu w symulacjach zastosowano popularne wzmacniacze TL081 o polu wzmocnienia $f_T = 3Mz$) powoduje powstanie pewnych niewielkich odstępstw od ideału, szczególnie w zakresie wyższych częstotliwości (rys. 6, rys. 10, rys. 13, rys. 16 – krzywa 2).

LITERATURA

1. Bellert S.: Zarys teorii syntezy liniowych układów elektrycznych. WPW, Warszawa 1964.
2. Williams A.: Electric Filter Design Handbook. McGraw-Hill Inc., New York 1981.
3. Thede L.: Analog And Digital Filter Design Using C. Prentice Hall PTR, New Jersey 1996.
4. Pasko M., Walczak J.: Teoria sygnałów. Wyd. Pol. Śl., Gliwice 1999.
5. Zverev A.I.: Handbook Of Filter Synthesis. John Wiley and Sons, New York 1967.
6. Saal R.: Der Entwurf von Filtern mit Hilfe des Kataloges Normierter Tiefpasse. Telefunken GMBH, Backnang Germany 1963.
7. Katalog struktur bikwadratowych: Norbert Fliege: A New Class Of Second Oreder RC-Active Filters with Two Operational Amplifiers. Nachrichtentech. Z., vol. 26, pp. 279-282, June 1973.
8. Adrikowski T., Pasko M.: Unormowanie filtrów eliptycznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej serii Elektryka nr 182, Gliwice 2002.

Wpłynęło do Redakcji dnia 5 czerwca 2002 r.

Recenzent: Dr hab. inż. Konrad Skowronek, prof. Politechniki Poznańskiej

Abstract

This paper is a continuation of the previous one [8]. The way of determining zeros and poles of even order elliptic filter transmittance for any assumed parameters ε, k of the elliptic filter is described. The knowledge of these of zeros and poles is the starting point for synthesis of filters, which is illustrated by example 1. There is also proposed a practical realization of elliptic filters using proportional and biquadratic structures, which are built of operational amplifiers and RC elements. The synthesis of lowpass, highpass, passband and stopband filter is shown. It is proved that it is possible to build all kinds of elliptic filters by using only two types of biquadratic structure (biquadratic structure of type "a" presented in Fig. 4 and biquadratic structure of type "b" shown in Fig. 8) and proportional structure (Fig. 3). The practical realization of all kinds of filters is illustrated by examples 2, 3, 4 and 5. The obtained circuit realizations were tested by computer simulation using SPICE. The frequency characteristic of these filters with ideal and real operational amplifiers were obtained from the carried out computer simulation. The characteristics of all the simulated filters containing ideal operational amplifiers are the same as the assumed, that is ideal, ones (see Figs. 6, 10, 13 and 13 – curve 1). However, the application of real operational amplifiers (for example: amplifiers TL081 of gain-bandwidth equal to 3 MHt were used in simulations) results in some little deviations of the obtained characteristics from the ideal ones, especially within the range of higher frequencies 9see Figs. 6, 10, 13 and 16 – curve 2).