

JÓZEF SZPILECKI

KRZYWE SPOTYKANE PRZY PRZEDSTAWIENIU PROCESÓW
APERIODYCZNYCH

Streszczenie. W pracy podano metodę wyznaczenia wszelkich możliwych postaci krzywych, występujących w przedstawieniu procesów aperiodycznych. Wyniki porównano z dwoma doświadczalnymi krzywymi, otrzymanymi dla ogrzewania i ostygnięcia ciała nie posiadającego źródła ciepła.

1. Wstęp

W pracy postawiono sobie za zadanie znalezienie wszelkich możliwych postaci krzywych, opisujących procesy aperiodyczne o następującym równaniu

$$\vartheta - \vartheta = \sum_{k=1}^n A_k e^{\alpha_k t} \quad (1)$$

$$\vartheta - \vartheta = \sum_{s=0}^r \sum_{k=1}^{n'} A_{k,s} e^{\alpha_k t} \cdot t^s \quad (2)$$

$$\vartheta - \vartheta = \sum_{k=1}^n A_k e^{\alpha_k t} + B t \quad (1')$$

$$\vartheta - \vartheta = \sum_{s=0}^r \sum_{k=1}^{n'} A_{k,s} e^{\alpha_k t} + B t \quad (2')$$

gdzie

- t - zmienna niezależna (czas),
- δ - zmienna zależna,
- e - wartość ustalona zmiennej zależnej,
- $A_k, A_{k,s}, B$ - stałe,
- α_k - pierwiastki równania charakterystycznego, rzeczywiste, ujemne i różne od siebie.

Funkcje (1) - (2') są rozwiązaniami pewnych układów równań różniczkowych liniowych lub nieliniowych o współczynnikach stałych.

2. Metoda rozwiązania problemu Wprowadzenie przestrzeni fazowej

Opis metody rozwiązania problemu możemy ograniczyć do równania (1) i (2), ponieważ postać krzywych przedstawionych przez dwa pozostałe równania może być prosto podana, gdy znane są krzywe przedstawione równaniami (1) i (2).

2.1. Przypadek równania (1)

2.1.1. Wprowadzenie nowych zmiennych

Różniczkujemy równanie (1) $n-1$ razy względem czasu, otrzymując w ten sposób razem z równaniem (1) układ n równań na niewiadome $e^{\alpha_k t}$. Posiada on przy uczynionych założeniach rozwiązanie następującej postaci:

$$\xi_k = e^{\alpha_k t} = \sum_{i=0}^n B_{k,i} (\delta - e)^{(i-1)} \quad (3)$$

gdzie:

- $B_{k,i}$ - stałe,
- (k) - oznacza k -tą pochodną,
- (0) - oznacza funkcję nie różniczkowaną.

Przekształcenie (3) jest affiniczne. Jeżeli więc przyjmiemy układ osi δ_i Kartezjusza prostokątny, na ogół układ osi ξ_i będzie skośnokątny.

Eliminacja zmiennej t z dwu równań (3) odnoszących się do indeksu $k, 1$ daje równanie paraboli

$$\xi_k = C \xi_1^{x_{k,1}} \quad (4)$$

gdzie

C - stała zależna od wyboru jednostek na osi ξ_k i ξ_1 dalej oznaczmy ją przez x

$$x_{k,1} = \alpha_1 / \alpha_k \quad (5)$$

2.1.2. Przejście do zagadnienia dwuwymiarowego

Dowolne dwie zmienne $(\delta - \theta)$ i $(\delta - \theta)^{(s)}$ oznaczamy dla skrócenia przez x_1, x_2 . Obieramy dwie wielkości ξ_k, ξ_1 i przy użyciu $n-1$ równań jednorodnych (3) (z pominięciem równania o indeksie k albo 1) tworzymy rzuty osi ξ_k, ξ_1 na płaszczyznę (x_1, x_2) .

Dla prostoty zapisu oznaczamy rzuty osi ξ_i na wybraną płaszczyznę również przez ξ_i .

$$\xi_1 = a x_1 + b x_2 \quad \xi_k = d x_1 + e x_2 \quad (6)$$

Równania osi ξ_k, ξ_1 możemy napisać następująco:

$$\text{Oś } \xi_k: x_2 = -a' x_1 : b', \quad \text{oś } \xi_1: x_2 = -c' x_1 : d'$$

Równanie (4) po podstawieniu wyrażeń (3) przedstawia w układzie osi $x_i, i=1, \dots, n$ pewną hiperpowierzchnię.

Tworząc przecięcie tej hiperpowierzchni z płaszczyzną (x_1, x_2) otrzymujemy parabolę o równaniu

$$a x_1 + b x_2 = C (d x_1 + e x_2)^x \quad (6)$$

W zależności od znaku współczynników kierunkowych osi współrzędnych możemy wyróżnić następujące przypadki:

$$\begin{array}{ll} \alpha) a' : b' < 0, & d' : c' < 0 \quad \beta) a' : b' < 0, & d' : c' > 0 \\ \gamma) a' : b' > 0, & d' : c' < 0 \quad \delta) a' : b' > 0, & d' : c' > 0 \end{array}$$

Przedstawiono je na rysunku 1a i 1b. Przypadki α) i δ) ujęto razem, ponieważ przypadek δ) otrzymujemy z przypadku α) przez obrót około osi x_1 o 180° . Podobnie przedstawia się sprawa przypadków β) i γ). Krzywe odpowiadające poniższej dyskusji oznaczono na rysunku liczbami rzymskimi z indeksami a, b, ...

Dla dalszych rozumowań jest obojętne, który z dwu rozpatrywanych układów współrzędnych jest prostokątny.

2.1.3. Badanie analityczne krzywych

W dalszym rozumowaniu przyjmujemy, że wyrażenia lewej i prawej strony równania (6) (liniowe kombinacje zmiennych x_1) są dodatnie. W przeciwnym przypadku bierzemy ich wartości bezwzględne.

Wprowadzamy jako parametr

$$z = d x_1 + e x_2 \quad (8)$$

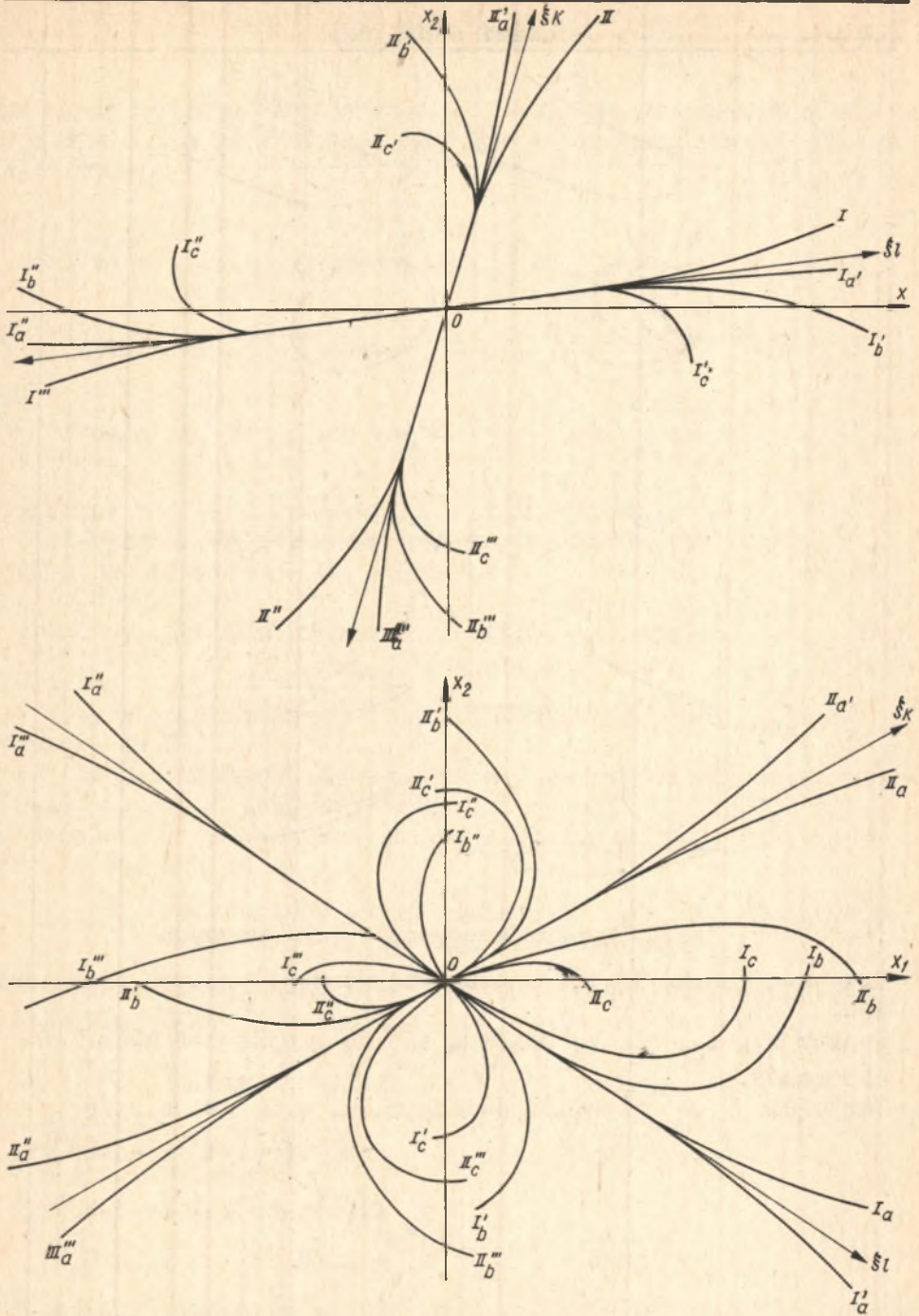
wtedy otrzymujemy przy założeniu $a e - b d \neq 0$ przedstawienie parametryczne krzywej

$$\begin{aligned} (-b z + e z^x)/(a e - b d) &= x_1 \\ (z a - d z^x)/(a e - b d) &= x_2 \end{aligned} \quad (9)$$

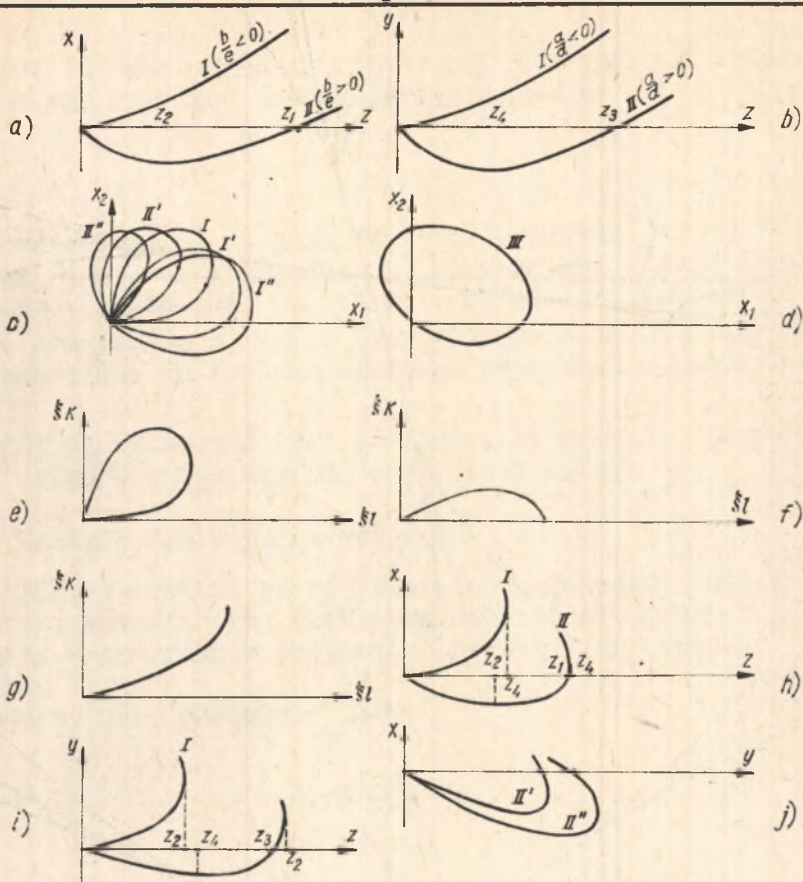
Rozpatrywanie miejsc zerowych i ekstremów krzywych (9) wykazuje, że równocześnie występują (nie występują) ekstrema i miejsca zerowe. Rysunek 2 a, b, h, i, j przedstawia możliwe przypadki.

A. Tylko jedna z krzywych $x_1 = f(z)$, $x_2 = g(z)$ posiada albo też żadna nie posiada ekstremum

Ten sam rysunek może przez zmianę podziałki służyć do przedstawienia obu krzywych. Istnienie ekstremum (krzywa II) jest związane z dodatnością wyrażenia b/e . W przeciwnym



Rys.1. Typy krzywych w płaszczyźnie fazowej
Przypadek α) i β)



Rys.2. Dyskusja pomocniczych krzywych

Krzywe a), b), h), i), j) odnoszą się do pojedynczych pierwiastków.

Punkty z_1, z_2, z_3, z_4 odnoszą się do miejsc zerowych lub ekstremów.

Wartości $z_1 = \sqrt[\kappa-1]{b/e}$ odpowiadają $x_1 = 0 \quad y_1 = z_1/e$
 $z_2 = \sqrt[\kappa-1]{b/e^{\kappa}}$ $x_2 = [b(1-\kappa)/\kappa(ac-bd)] \cdot z_2$

$$z_3 = \sqrt[\kappa-1]{a/d}$$

$$y_2 = [(aex-bd)/ex(ae-d-b)] z_2$$

$$x_3 = z_3/d \quad y_3 = 0$$

$$z_4 = \sqrt[\kappa-1]{a/dx}$$

$$x_4 = [(ae-bd\kappa)/d\kappa(ae-bd)] z_4$$

$$y_4 = [a(\kappa-1)/\kappa(ae-bd)] z_4$$

Krzywe c), d), e), f), g) odnoszą się do wielokrotnych pierwiastków.

przypadku otrzymujemy krzywą I. O wzajemnym położeniu ekstremum i miejsc zerowych decyduje w przypadku wielkości x_1 wyrażenie

$$x^{-1} \sqrt{a/dx(e a - b dx)} / [dx(e a - b d)] - (1/d) \sqrt{a/d} \leq 0 \quad (10)$$

w przypadku wielkości x_2

$$x^{-1} \sqrt{b/ex(e ax - b d)} / [ex(a e - b d)] - 1/e) \sqrt{b/e} \leq 0 \quad (11)$$

Ponieważ $x \neq 1$, wykluczony jest znak równości.

Na rysunku 2j przedstawiono na podstawie rysunku 2a i b przebieg zależności x_2 o x_1 .

B. Obie krzywe $x_1 = f(z)$, $x_2 = g(z)$ posiadają ekstrema

Krzywe odpowiadające temu przypadkowi przedstawiono na rysunku 2h i i.

We wszystkich przedstawieniach parametrycznych punkty ekstremów i miejsc zerowych oznaczono na osi z , podając w objaśnieniu rysunku wartości przynależnych do siebie wielkości (z, x_1, x_2) .

Uwaga. Przez zmianę znaku wielkości x_1 lub x_2 możemy otrzymać inne przypadki symetryczne.

Ze względu na pewne założenia ograniczające przedyskutujemy kilka przypadków szczególnych.

2.1.4. Przypadki szczególne

1. Wielkość $e = 0$.

W tym przypadku

$$x_1 = z d \quad (12)$$

jedna z krzywych poprzednio rozpatrzonych przechodzi w prostą.

2. Wielkość $d = 0$.

Jest to przypadek symetryczny do przypadku 1. Mamy tu zależność

$$e x_1 = z \quad (13)$$

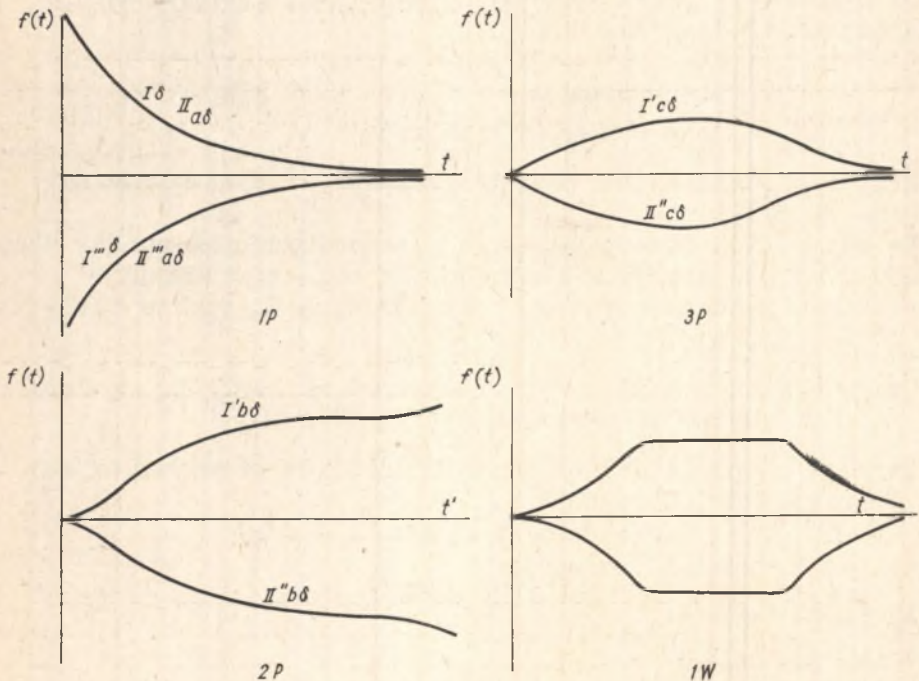
3. Wielkość $a e - b d = 0$

Zakładając $d = n a$, $e = n b$, $n \neq 0$ oraz słuszność równania (8) otrzymujemy dwie proste

$$z = 0 \quad \text{i} \quad z = \sqrt[1]{n}^{x-1} \quad (14)$$

2.1.5. Interpretacja krzywych gdy $x_1 = f(z)$, $x_2 = f'(z)$.

W tym przypadku wzajemne położenie ekstremów i miejsc zerowych decyduje o możliwości istnienia danej krzywej. Na rysunku 3 przedstawiono te krzywe, które są możliwe, zazna-



Rys.3. Typy krzywych dopuszczalnych jako przedstawienie procesów aperiodycznych

Krzywe oznaczone literą P odnoszą się do pojedynczych pierwiastków, krzywa oznaczona literą W do pierwiastków wielokrotnych

czając jednocześnie numery krzywych z rysunku 1, do których się one odnoszą.

2.2. Przypadek równania (2)

2.2.1. Wprowadzenie nowych zmiennych

Rozumowanie przeprowadzamy w dwu etapach:
Najpierw wprowadzamy zmienne

$$z_k = e^{\alpha_k t} (C_1 t^m + C_2 t^{m-1} + \dots + C_{m+1}) \quad (15)$$

Jeżeli wykonamy n razy różniczkowanie tego równania względem zmiennej t otrzymujemy wraz z równaniem (15) układ $n+1$ równań, z którego możemy wyznaczyć poszczególne człony występujące po prawej stronie równania. Zagadnienie jest rozwiązalne ponieważ wyznacznik tak otrzymanego układu równań jest różny od zera. Można to wykazać przez indukcję zupełną. Podamy dla przykładu układ równań dla $n = 2$.

$$z_k = e^{\alpha_k t} (C_1 t + C_2) \quad (16)$$

$$z_k' = e^{\alpha_k t} (C_1 \alpha_k t + C_2 \alpha_k + C_1)$$

Wyznacznik układu sprowadza się prosto do postaci trójkątnej. Wartość wyznacznika jest równa C_1^2 . Postępując podobnie przy większej krotności pierwiastka α_k , możemy dojść do wyrażenia dla n -krotnego pierwiastka. Wtedy wartość wyznacznika prawej strony wynosi

$$C_1^n \cdot [(n-1)!]^{n-1} : 2! 3! \dots (n-2)!$$

Gdyby $C_1 = 0$, można by rozumowanie przeprowadzać dla kolejnego C_1 współczynnika, który jest różny od zera.

Charakterystyczną cechą omawianego wyżej wyznacznika jest występowanie w nim tylko pierwszego współczynnika odpowiadającego najwyższej potędze t i to w stopniu takim ile wynosi krotność danego pierwiastka.

Nieco bardziej skomplikowanie przedstawia się sprawa rozwiązania równania (2) ze względu na wielkości występujące z prawej strony. Że takie rozwiązanie jest możliwe, wynika to z faktu [1], że wyrażenia występujące z prawej strony równania (2) są rozwiązaniami tworzącymi układ fundamentalny, wobec tego jego Wronskian musi być różny od zera. W wyznaczniku tym występują tylko pierwsze współczynniki wyrażeni typu (15) i to w takim stopniu, ile wynosi krotność danego pierwiastka. Ponadto występują pewne wyrażenia zbudowane z różnych od siebie pierwiastków równania charakterystycznego.

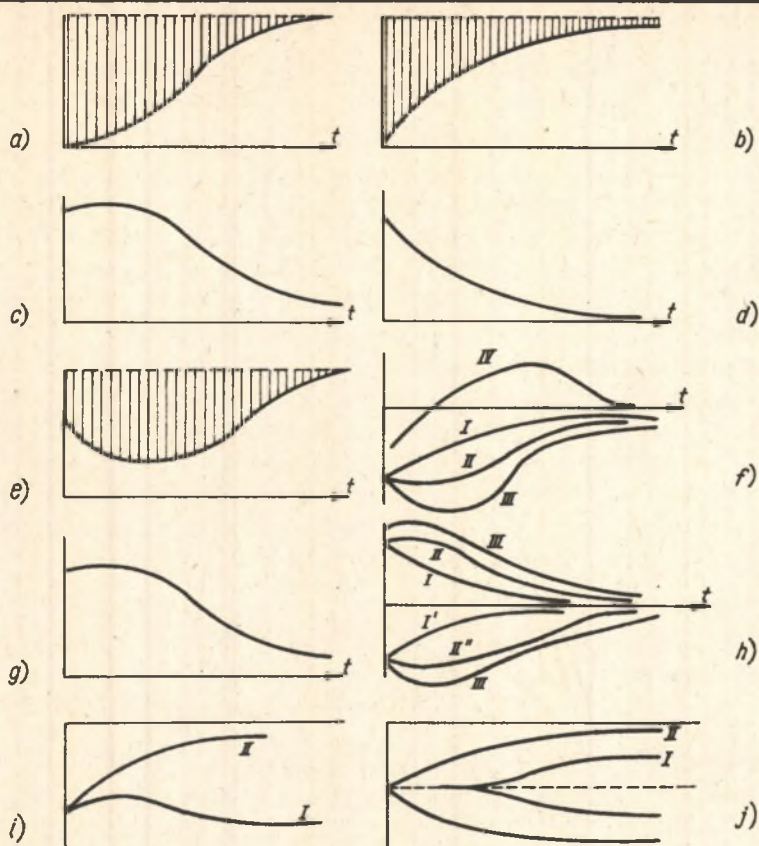
2.2.2. Postać krzywych w układzie osi (ξ_k, ξ_1)

Dla przykładu przyjmujemy to samo α_k . Gdyby w równaniach występowały różne wartości α_k , rozumowanie przebiegałoby analogicznie. Oznaczamy

$$\begin{aligned}\xi_1 &= C_1 t^1 e^{\alpha_k t} \\ \xi_n &= C_n t^n e^{\alpha_k t}\end{aligned}\tag{17}$$

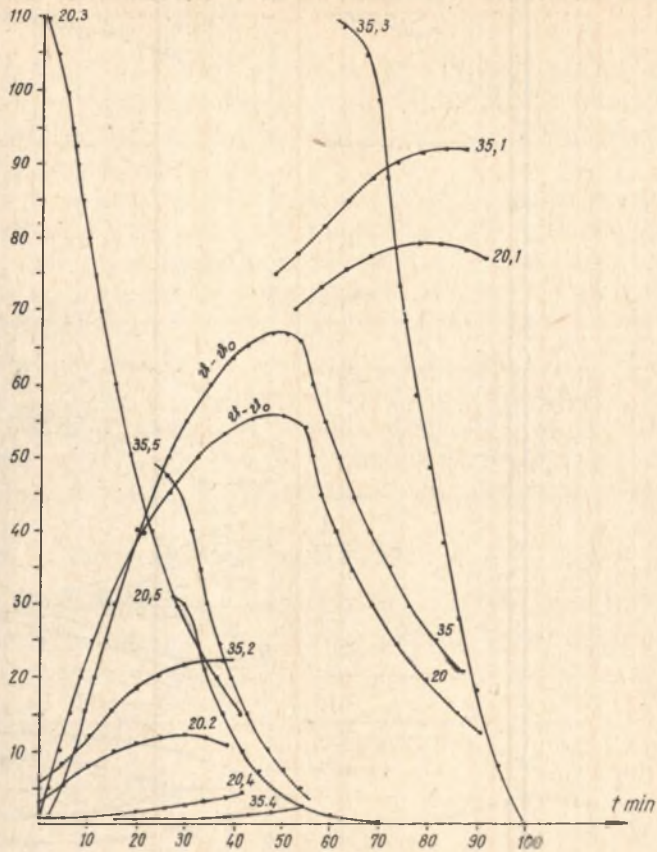
Dyskusja tych wyrażeń i ich pochodnych ze względu na zmienną t prowadzi do krzywych przedstawionych na rysunku 2e, przy czym w najogólniejszym przypadku otrzymujemy krzywą zamkniętą. W przypadku znikania 1 krzywą (rys. 2f, 2g).

Jeżeli wprowadzimy podobnie jak w przypadku równania (1) zmienne $x_i, i=1 \dots n$, wtedy między rzutami osi ξ_i na płaszczyznę (x_1, x_2) i jej osiami zachodzą podobne geometryczne związki, jak w przypadku rysunku 1. Na rysunku 2c, 2d przedstawiono to w kilku przypadkach oznaczonych analogicznie, jak na rysunku 1. Przez analizę otrzymanych krzywych otrzymujemy nową postać możliwych krzywych (rys. 3w). Tym samym zostały wyczerpane wszelkie możliwości.



Rys.4. Zestawienie teoretycznie możliwych krzywych w przypadku układu doświadczalnego

Krzywe b) d) i) j) odnoszą się do ciała, posiadającego źródło ciepła.
 Krzywe a) e) e) f) g) h) odnoszą się do ciała, nie posiadającego źródła ciepła.
 Krzywe a) b) e) opisują procesy ogrzewania.
 Krzywe c) d) g) opisują procesy ostygnięcia.
 Krzywe f) h) i) j) przedstawiają $(\vartheta - \vartheta_0)_{\text{ogr}} + (\vartheta - \vartheta_0)_{\text{ost}}$
 Wspólne krzywe: f) przedstawiają $(\vartheta - \vartheta_0)_{\text{ost}} - (\vartheta - \vartheta_0)_{\text{ogr}}$
 oraz $(\vartheta - \vartheta_0)_{\text{ost}} \cdot (\vartheta - \vartheta_0)_{\text{ogr}}$
 i) przedstawia $(\vartheta - \vartheta_0)_{\text{ogr}} / (\vartheta - \vartheta_0)_{\text{ost}}$



Rys.5. Krzywe otrzymane doświadczalnie dla ciała, nie będącego źródłem ciepła i krzywe otrzymane z nich drogą różnych operacji matematycznych

Krzywe odnoszą się do pomiarów, oznaczonych numerem 20 i 35. Krzywe, oznaczone $\vartheta - \vartheta_0$ są to doświadczalne krzywe ogrzewania i ostygnięcia.

Krzywe 20,1 35,1 przedstawiają $(\vartheta - \vartheta_0)_{\text{ogrz}} + (\vartheta - \vartheta_0)_{\text{ost}}$
 20,2 35,2 $(\vartheta - \vartheta)_{\text{ogrz}} + (\vartheta - \vartheta_0)_{\text{ost}}$
 20,3 35,3 $-(\vartheta - \vartheta_0)_{\text{ost}} \cdot (\vartheta - \vartheta)_{\text{ogrz}}$
 20,4 35,4 $-(\vartheta - \vartheta_0)_{\text{ost}} / (\vartheta - \vartheta)_{\text{ogrz}}$
 20,5 35,5 $(\vartheta - \vartheta_0)_{\text{ost}} - (\vartheta - \vartheta)_{\text{ogrz}}$

Ze względu na trudności rysunkowe i ponieważ chodzi jedynie o charakter przebiegów, niektóre krzywe mają zmienioną podziałkę.

2.2.3. Porównanie krzywych teoretycznych z krzywymi otrzymanymi doświadczalnie

W pracy [2] dyskutowano teoretycznie i badano doświadczalnie krzywe zmian temperatur występujących w procesie ogrzewania i ostygnięcia w układzie złożonym z grzejnika, osłony, termometru i ewentualnie innych składników. Na rysunku 4 mamy zestawienie teoretycznie możliwych krzywych w przypadku ciał, posiadających źródło ciepła i bez źródła. Krzywe ogrzewania oznaczono kreskowaniem dla zaznaczenia, że odpowiednie rzędne należy liczyć od góry. Wreszcie na rysunku 5 przedstawiono dwie krzywe ogrzewania i ostygnięcia, otrzymane doświadczalnie oraz szereg krzywych, otrzymanych z nich przez różne operacje matematyczne na ich rzędnych, jak dodawania, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Są one wszystkie jednego z typów przedstawionych na rysunku 3.

LITERATURA

- [1] STIEPANOW W.W. - Kurs differencjalnych urawnienij, 1950, Gos. Izd. T.T. Lit. Moskwa, str.222, i 191.
- [2] SZPILECKI J. - Oscylacje temperaturowe typu relaksacyjnego, rozprawa doktorska, Wydz. Mech.-Energ. Politechniki Śląskiej.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЗМОЖНЫХ ФОРМ КРИВЫХ ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ ОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

С о д е р ж а н и е

В работе дан метод определения разнообразных возможных форм кривых представляющих аперидические процессы. Полученные результаты сравниваются с двумя экспериментальными кривыми нагревания и охлаждения тела без источника теплоты и разнообразных других полученных путем разнообразных математических операций на их ординатах.

DETERMINATION OF POSSIBLE FOR REPRESENTING APERIODIC PROCESSES

S u m m a r y

In the paper a method is given for determining the various possible forms of the curves, appearing in the representation of aperiodic processes. The results are compared with two experimental curves, which have been received for the heating and cooling of an element without any heat source.