ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
Nr 114 Matematyka - Fizyka z.5 1964

STANISŁAW OCHOŃSKI

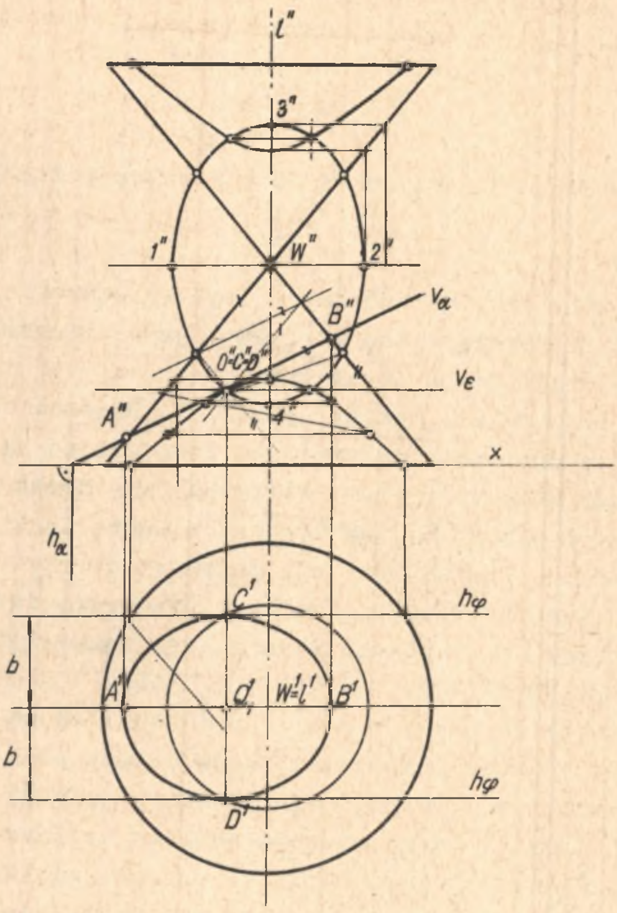
PRZEKRÓJ STOŻKA OBROTOWEGO W ZADANEJ ELIPSIE

W geometrii analitycznej znane jest twierdzenie, które mówi, że każdą stożkową można otrzymać jako przekrój pewnego stożka obrotowego pewną płaszczyzną.
Zmieniając nieznacznie podany przez K. Borsuka dowód tego twierdzenia można łatwo wykazać, że przecinając płaszczyznami dowolnie dany stożek obrotowy otrzymamy w przekroju każdą elipsę i każdą parabolę, jak również każdą taką hiperbolę, której asymptoty tworzą kąt nie większy od 2α, gdzie α jest kątem jaki zawiera tworząca stożka z jego osią obrotu [1].

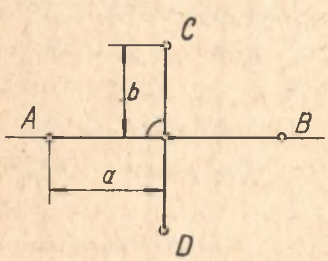
W niniejszej pracy podano konstrukcję przekroju dowolnie danego stożka obrotowego w zadanej elipsie.
Obierzmy stożek obrotowy o osi l prostopadłej do rzutni poziomej (rys. 1), oraz elipsę określoną osiami AB i CD (rys. 2). Zadanie: wyznaczyć przekrój tego stożka w zadanej elipsie. Zauważmy, że miejscem geometrycznym punktów leżących na rozważanej powierzchni stożkowej, które są końcami odcinków o stałej długości d = 2b prostopadłych do rzutni pionowej są dwie przystające hiperbole leżące w płaszczyznach φ i ψ równoległych do rzutni pionowej.

Płaszczyzny te położone są symteryocznie względem osi tego stożka, a odległość między nimi wynosi 2b, gdzie b oznacza długość półosi małej zadanej elipsy (rys. 1).
Rzuty pionowe tych hiperbol pokrywają się z hiperbolą do nich przystającą dla której asymptotami są rzuty pionowe tworzących zarysu stożka.
Z łatwością można wykazać, że odcinki prostej zawarte między hiperbolą a jej asymptotami są sobie równe. Gdy prosta jest

styczna do hiperboli własność powyższa również zachodzi. A więc należy znaleźć takie punkty hiperboli, by na stycznych



Rys. 1

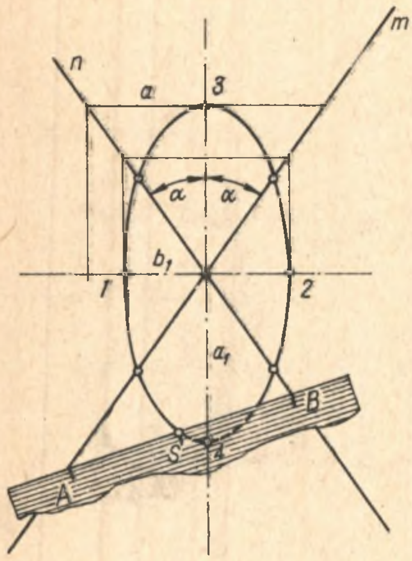


Rys. 2

poprowadzonych do niej w tych punktach asymptoty odcinały odcinki stałej długości równej długości osi dużej zadanej elipsy.

Zapytujemy ile takich punktów jest na hiperboli i jak je znaleźć? Aby na to pytanie dać odpowiedź przeprowadzimy następujące rozumowanie:

Wiadomo, że środek ruchomego odcinka AB o stałej długości, którego końce poruszają się po dwóch przecinających się prostych opisuje na ogół elipsę (rys. 3). Jeżeli proste te tworzą kąt prosty wówczas linią tą jest okrąg o średnicy równej długości danego odcinka AB i o środku w punkcie przecięcia się tych prostych.



Rys. 3

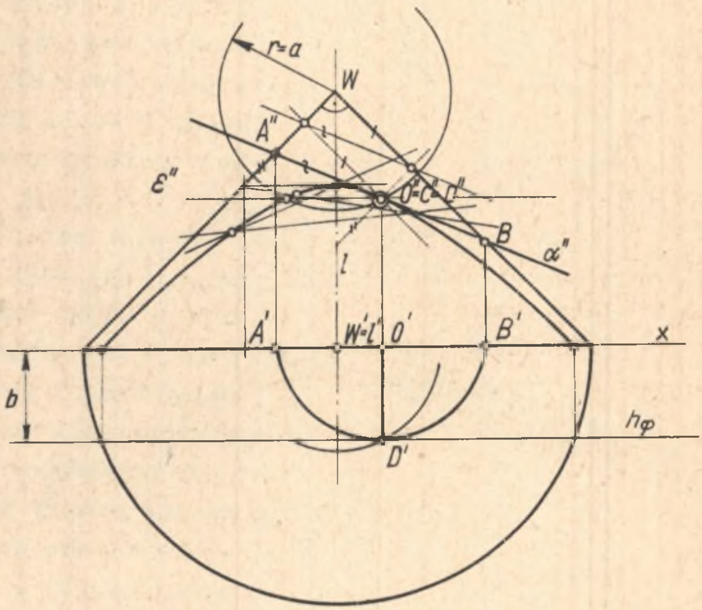
W naszym przypadku długość odcinka AB = 2a, a proste po których poruszają się końcowe punkty tego odcinka są asymptotami hiperboli, która jednoczy w sobie pionowe rzuty uprzednio wyznaczonych hiperbol.

Środek odcinka opisze elipsę, której osie 12 i 34 z łatwością można znaleźć. Punkty przecięcia elipsy z hiperbolą są szukanymi punktami. W wyniku przecięcia tak wyznaczonych stożkowych otrzymujemy zawsze cztery punkty rzeczywiste różne. Na stycznych poprowadzonych w tych punktach do hiperboli asymptoty odcinają odcinki o długości równej długości osi dużej zadanej elipsy.
Przez jedną z tych stycznych poprowadzona płaszczyzna α prostopadła do rzutni pionowej przecina dany stożek w zadanej elipsie (rys. 1).

Rozważmy przypadek, w którym uprzednio wyznaczone stożkowe (hiperbola i elipsa) posiadałyby cztery rzeczywiste punkty wspólne, parami jednoczące się w wierzchołkach obu tych stożkowych. Styczne poprowadzone w tych punktach do hiperboli byłyby prostopadłe do jej głównej osi, zaś asymptoty tej hiperboli odcinałyby na nich odcinki o długości równej długości osi małej zadanej elipsy. Poprowadzone przez te styczne płaszczyzny prostopadłe do rzutni pionowej przecinałyby stożek w okręgach, a zatem omówiony przypadek przekroju stożka nie może mieć miejsca dla zadanej elipsy posiadającej osie różnej długości.

Rysunek 4 jest ilustracją tego samego zadania przy założeniu, że kąt wierzchołkowy stożka jest kątem prostym.

Rękopis złożono w Redakcji 16.12.63 r.



Rys. 4

LITERATURA

[1] Borsuk K.:- Geometria analityczna w n wymiarach. Lund - 1950.

СЕЧЕНИЕ КРУГОВОГО, ПРЯМОГО КОНУСА В ЗАДАННОМ ЭЛЛИПСЕ

Содержание

Конструкцию сечения кругового, прямого конуса в заданном эллипсе решено как плоскую задачу: построения определенного отрезка касательного к гиперболе с условием принадлежности его концов к асимптотом.

DER DREHKEGELSSCHNITT IN EINER GEGEBENEN ELLIPSE

Zusammenfassung

Die Konstruktion des Drehkegelsschnitts in einer gegebenen Ellipse wird als eine die Ebene betreffende Aufgabe gelöst: es ist eine gegebenene Strecke zu konstruieren, die zu einer Hyperbel tangent ist und deren Enden auf den Asymptoten liegen.