ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 10 Nr kol. 162

MARIAN PALEJ

DOWÓD NIEOBROTOWOŚCI POWIERZCHNI UTWORZONEJ PRZEZ WIĄZKĘ PROSTYCH JEDNORZUTNYCH

Wiadomo, że wiązka prostych jednorzutnych w ogólnym przypadku rzutu równoległego na dwie wzajemnie prostopadłe rzutnie π_1 i π_2 w kierunkach $p_1 \parallel \pi_2$ i $p_2 \parallel \pi_1$ (przy czym $p_1 \perp \pi_1$ bądź $p_2 \perp \pi_2$) tworzy powierzchnię stożkową [1].

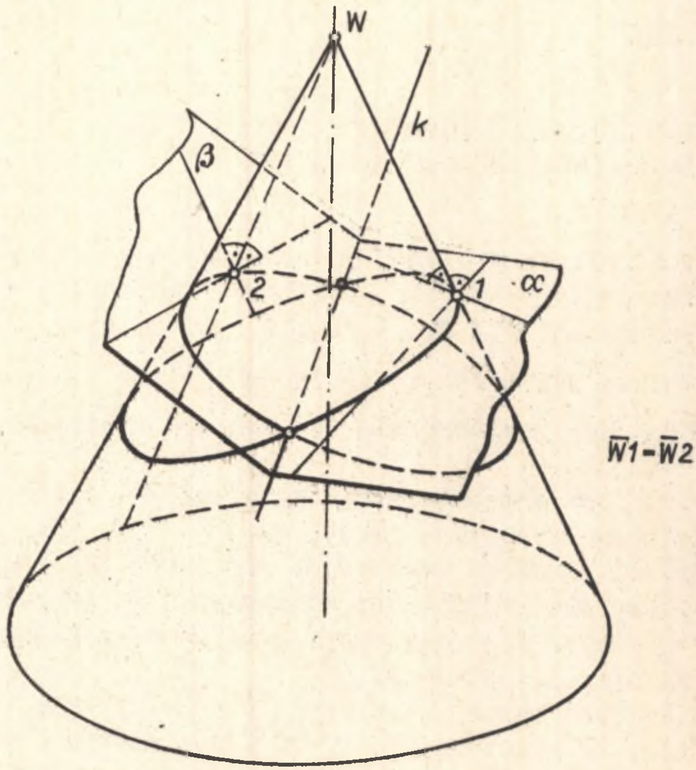
Zbadajmy czy powierzchnia ta może być powierzchnią obrotową.
Załóżmy, że powierzchnia stożkowa utworzona przez wiązkę prostych jednorzutnych jest obrotowa.
Zauważmy, że jednym z warunków koniecznych obrotowości stożka jest to, aby przekroje każdą płaszczyzną prostopadłą do jednej z tworzących i jednakowo odległą od wierzchołka (por.rys. 1) stożka były przystające.
Rozważając parę takich płaszczyzn α i β (rys. 1) nietrudno stwierdzić, że przekroje te są względem siebie prostokątnie symetryczne, przy czym płaszczyzną symetrii jest płaszczyzna symetrii kąta utworzonego przez dane płaszczyzny. Tak więc przez odpowiedni obrót płaszczyzn dokoła krawędzi $k = \alpha\beta$ i sprowadzenie ich do jednej wspólnej płaszczyzny uzyskać można pokrycie się obydwu przekrojów.

Mając powyższe na względzie rozpatrzmy przekroje wiązki prostych jednorzutnych o środku P (rys. 2) płaszczyznami:

$$\alpha \perp x \text{ i } \beta \perp c \in \pi_2 \text{ równoodległymi od } P.$$

Zajmijmy się wyznaczeniem punktów przecięcia płaszczyznami α i β prostych jednorzutnych:

$$x(x^1 = x^2 = x), \qquad b(b^1 \parallel e_2,\ b^2 = P) \quad c(c^1 = P,\ c^2 \parallel p_1)$$



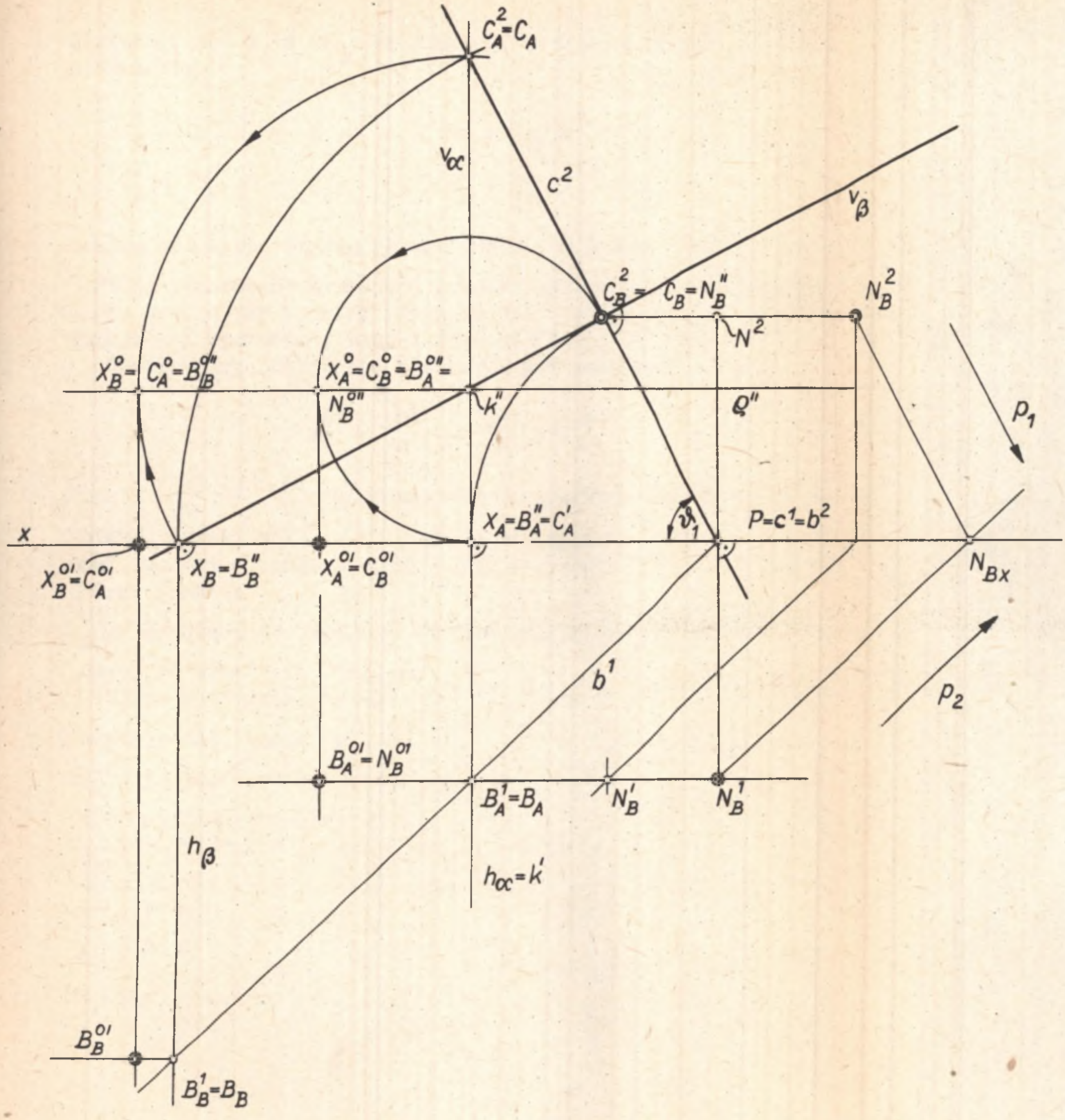
Rys. 1

Punkty te opiszemy:

$\alpha x = X_A$, $\beta x = X_B$

$\alpha b = B_A$, $\beta b = B_B$

$\alpha c = C_A$, $\beta c = C_B$


$C_A^2 = C_A$
v_α
c^2
v_β
$C_B^2 = C_B = N_B''$
N_B^2
N^2
$X_B^o = C_A^o = B_B^{o''}$
$X_A^o = C_B^o = B_A^{o''} =$
$N_B^{o''}$
k''
Q''
p_1
x
$X_A = B_A'' = C_A'$
ϑ_1
$P = c^1 = b^2$
$X_B^{o'} = C_A^{o'}$
$X_B = B_B''$
$X_A^{o'} = C_B^{o'}$
N_{Bx}
b^1
p_2
$B_A^{o'} = N_B^{o'}$
$B_A^1 = B_A$
N_B'
N_B^1
h_β
$h_\alpha = k'$
$B_B^{o'}$
$B_B^1 = B_B$

Rys. 2

Zauważmy, że X_A i X_B są punktami węzłowymi płaszczyzn α i β, natomiast:

$$B_A^1 = h_\alpha b^1 = B_A, \qquad B_B^1 = h_\beta b^1 = B_B$$
$$C_A^2 = V_\alpha c^2 = C_A, \qquad C_B^2 = V_\beta c^2 = C_B$$

Dokonując obrotu obydwu płaszczyzn α i β dokoła $k \parallel \pi_1$ do położenia poziomego uzyskujemy przystający do oryginału rzut poziomy trzech par punktów przynależnych do przekrojów tymi płaszczyznami rozważanej wiązki prostych jednorzutnych.

Stwierdzamy pokrywanie się dwóch par punktów:

$$X_B^{01} = C_A^{01} \quad \text{i} \quad X_A^{01} = C_B^{01}$$

Punkty B_A^{01} i B_B^{01} są różne. Jeżeli powierzchnia stożkowa utworzona przez wiązkę P jest obrotowa, to zgodnie z wstępnymi uwagami z punktami tymi winny się odpowiednio pokrywać dalsze punkty:

N_B^{01} - należący do przekroju stożka płaszczyzną β i N_A^{01} - należący do przekroju płaszczyzną α.

Można udowodnić, że nie jest to możliwe. Załóżmy bowiem, że istnieje taki punkt N_B, że $N_B^{01} = B_A^{01}$. Z warunku $N_B \in \beta$, uwzględniając dokonany obrót płaszczyzny β wyznacza się $N_B'' \in V_\beta$ (pionowy rzut normalny punktu N_B). Ponieważ głębokość punktu N_B jest równa głębokości punktu B_A, a więc jest wielkością znaną - w sposób prosty znaleźć można rzut pierwszy N_B^1 i drugi N_B^2 tego punktu.

Aby punkty N_B^1 i N_B^2 mogły być rzutami jednego punktu linii przekroju muszą leżeć na jakiejś prostej jednorzutnej wiązki P, tj. muszą być współliniowe z punktem P. Z konstrukcji jednak rzutu N_B^1 wynika, że prosta $N_B^1 P$ musi być prostopadła do osi x (punkt N_B^1 jest śladem poziomym prostej równoległej do P_1 przechodzącej przez N_B, a punkt P jest rzutem pionowym tego śladu). W dalszej konsekwencji zatem punkt N_B^2 winien leżeć na prostej prostopadłej do osi x przechodzącej przez N_B^1 i P, tj. winno zachodzić: $N_B^2 = N^2$.

Ponieważ jednak zawsze: $\overline{N_B^2 N_B''} = \overline{N_{Bx} P}$ (1)

- warunek nasz prowadziłby do żądania:

$$\overline{N^2 N_B''} = \overline{N_{Bx} P} \tag{2}$$

Zauważmy, że:

$$\overline{N^2 N_B''} = \overline{PN_B''} . \cos \vartheta_1 \tag{3}$$

przy czym zgodnie z podstawowymi założeniami wyklucza się ewentualność $\vartheta_1 = 0^\circ$.

Zatem zawsze:

$$\overline{N^2 N_B''} < \overline{PN_B''} = \overline{PX_A} \doteq \overline{N_B^1 B_A} = \overline{N_{Bx} P} \tag{4}$$

Warunek (4) wyklucza żądanie (2), a zatem i założenie istnienia takiego punktu przekroju płaszczyzną β - N_B, który w kładzie obydwu płaszczyzn α i β ma $\varrho \parallel \pi_1$, pokrywałby się z kładem B_A. Oznacza to, że założenie:

$$N_B^{01} = B_A^{01}$$

jest nie do przyjęcia.

Stwierdzenie, że po sprowadzeniu obydwu płaszczyzn tnących α i β do jednej wspólnej płaszczyzny (na drodze odpowiedniego obrotu dokoła ich krawędzi) nie zachodzi pokrywanie się wszystkich punktów jednego przekroju z odpowiednimi punktami drugiego przekroju jest równoznaczne z wykazaniem, że rozważana powierzchnia stożkowa nie jest obrotowa.

Wpłynęło do Redakcji 16.10.65 r.

LITERATURA

[1] Palej M.: "Proste szczególne w metodzie rzutów równoległych" Zeszyty Naukowe Pol.Śl. seria Matematyka - Fizyka z. 5. 1964.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОВЕРХНОСТИ ОБРАЗОВАННОЙ ПРЯМЫМИ ОСОБЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ В МЕТОДЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Р е з ю м е

В работе продолжено анализ свойства прямых, которых параллельные проекции накрываются в развернутой системе плоскостей проекции (см. Zeszyty Naukowe Politechniki Śl. s. Matematyka-Fizyka z. 5 - 1964). Доказано, что коническая поверхность образованная такими прямыми не может быть поверхностью вращения.

ÜBER EINE EIGENSCHAFT DER FLÄCHE, DIE DURCH SONDERGERADEN IN EINER PARALLELPROJEKTIONSMETHODE GEBILDET IST.

Z u s a m m e n f a s s u n g

Man hat Erwägungen der Sondergeraden, deren Parallelprojektionen in einem abgewickelten Projektionsebenesystem zusammenfallen, fortgesetzt (Zeszyty Naukowe Politechniki Sląskiej - seria Matematyka-Fizyka z. 5, 1964).

Es ist bewiesen, dass die, durch solche Geraden erzeugte Fläche, nicht Drehfläche ist.