ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 11 Nr kol. 172

WIESŁAW SOBIESZEK

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH FUNKCJI QUASI-WKLĘSŁYCH

W pracy niniejszej formułuje się i udowadnia pewne własności funkcji quasi-wklęsłych, które mogą okazać się pożyteczne przy rozważaniu pewnych problemów z zakresu programowania matematycznego.

Na wstępie podamy kilka definicji i oznaczeń.

Zbiór $A \subset E^n$ nazywać będziemy w y p u k ł y m, jeżeli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in A$ odcinek $(1-\mu)x + \mu y \in A$, $(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$.

Funkcję $u(x)$ określoną w przestrzeni E^n nazywać będziemy w k l ę s ł ą, jeżeli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in E^n$ i dowolnej liczby $\mu \in \langle 0,1\rangle$ spełniona jest nierówność

$$u\left[(1-\mu)x + \mu y\right] \geqslant (1-\mu)u(x) + \mu u(y)$$

Funkcję $u(x)$ nazywać będziemy w y p u k ł ą, jeżeli funkcja $-u(x)$ jest wklęsła.

Funkcję $u(x)$ określoną w przestrzeni E^n nazywać będziemy q u a s i - w k l ę s ł ą, jeżeli zbiór

$$A_{u,c} = \left\{x:\ u(x) \geqslant c\right\}$$

jest wypukły, gdzie c jest dowolną stałą.

Funkcję $u(x)$ nazywać będziemy q u a s i - w y p u k ł ą, gdy funkcja $-u(x)$ jest quasi-wklęsła.

Twierdzenie 1

Warunkiem koniecznym i wystarczającym quasi-wklęsłości funkcji $u(x)$, jest quasi-wklęsłość funkcji jednej zmiennej $F(\lambda) = u(x+\lambda s)$, $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$, gdzie x i s są dwoma dowolnymi punktami przestrzeni E^n.

Dowód warunku koniecznego:

Niech λ_1 i λ_2 będą dwoma dowolnymi liczbami spełniającymi warunki

$$\lambda_1, \lambda_2 \in A_{F,c}, \lambda_1, \lambda_2 \in <0,1> \tag{1}$$

Z (1) wynika

$$F(\lambda_1) = u(x + \lambda_1 s) \geqslant c, \; F(\lambda_2) = u(x+\lambda_2 s) \geqslant c, \; x,s \in E^n \tag{2}$$

Nierówność (2) oznacza, że

$$x + \lambda_1 s \in A_{u,c}, \; x + \lambda_2 s \in A_{u,c} \tag{3}$$

Z quasi-wklęsłości funkcji $u(x)$ i z (3) wynika

$$(1-\mu)(x+\lambda_1 s) + \mu(x+\lambda_2 s) \in A_{u,c}, \; (0 \leqslant \mu \leqslant 1) \tag{4}$$

Z (4) otrzymujemy

$$u\left[(1-\mu)(x+\lambda_1 s) + \mu(x+\lambda_2 s)\right] = u\left[x + ((1-\mu)\lambda_1 + \mu\lambda_2)s\right] =$$

$$= F\left[(1-\mu)\lambda_1 + \mu\lambda_2\right] \geqslant c \tag{5}$$

Ostatnia nierówność oznacza, że

$$(1-\mu)\lambda_1 + \mu\lambda_2 \in A_{F,c} \tag{6}$$

Z (1) i (6) wynika wypukłość zbioru $A_{F,c}$, czyli quasi-wklęsłość funkcji $F(\lambda)$.

Dowód warunku wystarczającego:

Niech x i y będą dwoma dowolnymi punktami przestrzeni E^n spełniającymi warunek

$$x,y \in A_{u,c} \tag{7}$$

Kładąc $y-x = s$ otrzymujemy

$$u(x) = F(0) \geqslant c, \quad u(y) = F(1) \geqslant c \tag{8}$$

Nierówność (8) oznacza, że liczby 0 i 1 należą do zbioru $A_{F,c}$. Stąd i z quasi-wklęsłości funkcji $F(\lambda)$ otrzymujemy

$$F\left[(1-\mu)0 + \mu 1\right] \geqslant c \tag{9}$$

Nierówność (9) możemy napisać w równoważnej postaci

$$u\left[(1-\mu)x + \mu y\right] \geqslant c \tag{9'}$$

Z (7) i (9') wynika quasi-wklęsłość funkcji $u(x)$.

Twierdzenie 2

Jeżeli dla danej funkcji $u(x)$ określonej w przestrzeni E^n, istnieje funkcja jednej zmiennej $f(t)$ rosnąca i taka, że funkcja złożona $v(x) = f[u(x)]$ jest wklęsła, to funkcja $u(x)$ jest quasi-wklęsła.

Dowód:

Niech x i y będą dwoma dowolnymi punktami należącymi do zbioru $A_{u,c}$. Wówczas

$$u(x) \geqslant c, \; u(y) \geqslant c \tag{10}$$

Ponieważ funkcja $v(x)$ jest wklęsła, więc

$$v[\mu x + (1-\mu)y] = f(u[\mu x + (1-\mu)y]) \geqslant \mu v(x) + (1-\mu)v(y) =$$

$$= \mu f[u(x)] + (1-\mu) f[u(y)], \quad (0 \leqslant \mu \leqslant 1) \tag{11}$$

Z założenia funkcja $f(t)$ jest rosnąca, więc z (11) otrzymujemy

$$f(u[\mu x + (1-\mu)y]) \geqslant \mu f[u(x)] + (1-\mu) f[u(y)] \geqslant \mu f(\min[u(x),$$

$$u(y)]) + (1-\mu) f(\min[u(x),u(y)] = f(\min[u(x),u(y)])$$

Stąd i z (10) wynika nierówność

$$u[\mu x + (1-\mu)y] \geqslant \min[u(x),u(y)] \geqslant c,$$

która dowodzi quasi-wklęsłości funkcji $u(x)$.

Twierdzenie 3

Jeżeli dla danej funkcji $u(x)$ określonej w przestrzeni E^n, istnieje funkcja jednej zmiennej $f(t)$ malejąca i taka, że funkcja złożona $v(x) = f[u(x)]$ jest wklęsla, to funkcja $u(x)$ jest quasi-wypukła.

Dowód twierdzenia jest analogiczny do dowodu twierdzenia poprzedniego.

Wniosek:

Jeżeli funkcja $u(x)$ jest quasi-wklęsła i nie jest quasi-wypukła i jeżeli istnieje funkcja monotoniczna $f(t)$ taka, że funkcja $v(x) = f[u(x)]$ jest wklęsła, to funkcja $f(t)$ jest rosnąca.

Dowód:

Jeżeli funkcja monotoniczna $f(t)$ byłaby malejąca, to na mocy twierdzenia (3) funkcja $u(x)$ musiałaby być quasi-wypukła wbrew założeniu.

Twierdzenie 4

Maksimum lokalne właściwe funkcji quasi-wklęsłej jest również globalne.

Dowód:

Niech $K(x^o)$ będzie otoczeniem punktu x^o, w którym funkcja quasi-wklęsła $u(x)$ osiąga maksimum lokalne właściwe. Jest więc

$$u(x^o) > u(x) \quad \text{dla} \quad x \in K(x^o) \tag{12}$$

Przypuśćmy, że istnieje punkt x^1 taki, że

$$u(x^1) > u(x^o) \tag{13}$$

Rozważmy odcinek $(1-\mu)x^o + \mu x^1$, $(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$. Na odcinku tym istnieje punkt $x^2 \in K(x^o)$ i $x^2 \neq x^o$. Niech $\mu_2 \in (0,1)$ spełnia warunek

$$x^2 = (1-\mu_2)x^o + \mu_2 x^1$$

Z (13) wynika, że

$$x^1, x^o \in A_{u,c} \quad \text{gdzie} \quad c = u(x^o) \tag{14}$$

Z (14) i quasi-wklęsłości funkcji $u(x)$ otrzymujemy

$$u(x^2) = u\left[(1-\mu_2)x^o + \mu_2 x^1\right] \geqslant c = u(x^o)$$

Stąd $u(x^2) \geqslant u(x^o)$ gdzie $x^2 \in K(x^o)$ co przeczy nierówności (12).

Twierdzenie 5

Jeżeli funkcja $u(x)$ określona w przestrzeni E^n jest quasi-wklęsła i klasy C^1, to

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(x^o)(x_i - x_i^o) \geqslant 0, \quad x \in A_{u,c}, \; x^o \in B_{u,c} =$$

$$= \left\{x\colon u(x) = c\right\} \tag{15}$$

gdzie $u_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Dowód:

Niech x będzie dowolnym punktem należącym do zbioru $A_{u,c}$, zaś x^o dowolnym punktem należącym do zbioru $B_{u,c}$. Z quasi-wklęsłości funkcji $u(x)$ otrzymujemy

$$u\left[(1-\lambda)x^o + \lambda x\right] = u\left[x^o + \lambda(x-x^o)\right] \geqslant c = u(x^o),$$

$$(0 < \lambda < 1) \tag{16}$$

Dzieląc nierówność (16) przez λ mamy

$$\frac{u\left[x^o + \lambda(x-x^o)\right] - u(x^o)}{\lambda} = \frac{F(\lambda) - F(0)}{\lambda} \geqslant 0 \tag{17}$$

Przechodząc w (17) do granicy przy $\lambda \to 0^+$ otrzymujemy

$$F'_+(0) \geqslant 0$$

Stąd po obliczeniu pochodnej prawostronnej funkcji $F(\lambda)$ w zerze, otrzymujemy nierówność (15).

Twierdzenie 6

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby forma kwadratowa $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$, była określona dodatnio, przy założeniach

(a) $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0, \quad a_1 \neq 0$$

(b)
$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

jest zachodzenie nierówności

$$(-1)^k \begin{vmatrix} 0 & a_1 & \dots & a_k \\ a_1 & a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_k & a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

Dowód twierdzenia (6) znajduje się w [1].

Twierdzenie 7

Jeżeli funkcja $u(x)$ określona w przestrzeni E^n jest quasi-wklęsła i klasy C^2, przy czym

$$u_1 \neq 0 \quad \text{dla każdego} \quad x \in E^n$$

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ u_n & u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

gdzie $u_{ij} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}$, $x \in E^n$

to prawdziwe są nierówności

$$(-1)^k \begin{vmatrix} 0 & u_1 & \dots & u_k \\ u_1 & u_{11} & \dots & u_{1k} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ u_k & u_{k1} & \dots & u_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1,2,\dots,n, \quad x \in E^n \tag{18}$$

Dowód:

Ponieważ funkcja $u(x)$ jest quasi-wklęsła, więc na mocy twierdzenia (5) otrzymujemy

$$G(x_2,\dots,x_n) = u_1(x^o)\left[\varphi(x_2,\dots,x_n) - x_1^o\right] +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} u_i(x^o)(x_i - x_i^o) \geqslant 0 \tag{19}$$

gdzie $x_1 = \varphi(x_2,\dots,x_n)$ jest funkcją uwikłaną przechodzącą przez punkt x^o. Z nierówności (19) wynika, że funkcja G osiąga w punkcie $(x_2^o,\dots,x_n^o)$ maksimum lokalne. Stąd

$$d^2G < 0 \quad \text{jeżeli} \quad d^2G \neq 0 \quad \text{w punkcie} \quad (x_2^o,\dots,x_n^o) \tag{20}$$

Jest oczywiście

$$d^2G = u_1(x^o)d^2\varphi \tag{21}$$

Obliczając drugą różniczkę funkcji uwikłanej φ otrzymujemy

$$d^2G = \frac{-1}{u_1^2} \sum_{i,j=2}^{n} (u_{11}u_iu_j + u_{ij}u_1^2 - u_{1j}u_iu_1 -$$

$$- u_{i1}u_ju_1)dx_idx_j \tag{22}$$

Z drugiej strony obliczając z warunku

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(x^o)dx_i = 0 \tag{23}$$

różniczkę dx_1 i wstawiając do wzoru na różniczkę d^2u otrzymujemy prawą stronę wzoru (22) ze znakiem przeciwnym. Stąd jest

$$d^2G = -d^2u \tag{24}$$

Ponieważ $d^2G < 0$, więc $d^2u > 0$. Stąd wynika ostatecznie, że druga różniczka funkcji u w punkcie x^o, przy warunku (23) nałożonym na przyrosty zmiennych niezależnych, jest formą kwadratową określoną dodatnio. Ponieważ spełnione są założenia twierdzenia (6), więc prawdziwość nierówności (18) w punkcie x^o jest udowodniona. Z dowolności stałej c i punktu x^o należącego do zbioru $B_{u,c}$, wynika prawdziwość nierówności (18) w dowolnym punkcie x należącym do przestrzeni E^n.

Rękopis złożono w Redakcji dnia 23.II.1966 r.

LITERATURA

[1] Seitz J.: Note sur le problème fondamental de la théorie de l' équilibre économique, Aktuárské vědy, 8, (1949-50), str. 137-144.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КВАЗИВОГНУТЫХ ФУНКЦИЙ

Р е з ю м е

В роботие автор представляет доказательства некоторых свойств квазивогнутых функций [т. (1), (4), (5), (7)] и теорем связаных с преобразованием квазивогнутой функии на вогнутой [т. (2), (3)].

ABOUT CERTAIN QUASI-CONCAVITY FUNCTIONS

S u m m a r y

The author gives in the paper proofs of certain properties of quasi-concavity functions [t.(1), (4), (5) and (7)] and theorems about the transformation of the quasi-concavity functions into the concavity functions [t.(2) and (3)].