ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966

Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 11 Nr kol. 172

WIESŁAW SOBIESZEK

O WYPUKŁOŚCI PEWNYCH FUNKCJI EKSTREMALNYCH

Przedmiotem badań tzw. programowania matematycznego są zagadnienia ekstremalne warunkowe. Dla ustalonego układu parametrów występujących w rozważanym zagadnieniu, szukane ekstremum jest liczbą. W przypadku uzmiennienia wszystkich, bądź tylko pewnych parametrów, szukane ekstremum staje się funkcją zależną od tych parametrów. Jest rzeczą naturalną, nazywać tego rodzaju funkcje, funkcjami ekstremalnymi. W pracy niniejszej rozważa się dwie funkcje ekstremalne (1), (2), o których dowodzi się twierdzenia dotyczące ich wypukłości.

Zanim przejdziemy do sformułowania tych twierdzeń podamy kilka niezbędnych pojęć i oznaczeń. Zbiór $X \subset E^n$ nazywać będziemy *wypukłym*, gdy wraz z dwoma punktami należy do niego odcinek je łączący. Funkcję $f(x)$ określoną na podzbiorze wypukłym $X \subset E^n$, nazywać będziemy *wypukłą*, gdy

$$f[\lambda x+(1-\lambda)y] \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y), \quad (x,y \in X,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$$

Funkcję $f(x)$ nazywać będziemy *wklęsłą*, gdy spełnia nierówność przeciwną.

Niech będą dane funkcje: $g(x)$ wklęsła i $f_j(x)$ $(j=1,\ldots,m)$ wypukłe na zbiorze $X \subset E^n$. Rozważmy zagadnienie znalezienia maksimum funkcji $g(x)$ przy warunku $f_j(x) \leqslant v_j$ gdzie $v_j \geqslant 0$ $(j = 1,\ldots,m)$. Traktując liczby v_j jako zmienne parametry i wprowadzając oznaczenia $v = \{v_1,\ldots,v_m\}$, $F(x) = \{f_1(x),\ldots,f_m(x)\}$ możemy krótko zdefiniować funkcję ekstremalną

$$h(v) = \max_X \{g(x)/F(x) \leqslant v,\ x \in X\} \tag{1}$$

Twierdzenie 1

Jeżeli wektor-funkcja $F(x) = \{f_1(x),\dots,f_m(x)\}$ jest wypukła, funkcja $g(x)$ jest wklęsła, to funkcja ekstremalna

$$h(v) = \max_x \left\{ g(x)/F(x) \leqslant v,\ x \in X \right\}$$

jest wklęsła.

Dowód:

Niech

$$h(\bar{v}) = \max_x \left\{ g(x)/F(x) \leqslant \bar{v},\ x \in X \right\},\ h(\bar{\bar{v}}) =$$
$$= \max_x \left\{ g(x)/F(x) \leqslant \bar{\bar{v}}, x \in X \right\}$$

Wówczas na mocy wklęsłości funkcji $g(x)$ mamy

$$\lambda h(\bar{v}) + (1-\lambda)h(\bar{\bar{v}}) = \lambda g(\bar{x}) + (1-\lambda)g(\bar{\bar{x}}) \leqslant g\left[\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{\bar{x}}\right],$$
$$(0 \leqslant \lambda \leqslant 1) \quad (*)$$

Jest oczywiście $F(\bar{x}) \leqslant \bar{v}$ i $F(\bar{\bar{x}}) \leqslant \bar{\bar{v}}$, więc z wypukłości wektor-funkcji $F(x)$ otrzymujemy $F\left[\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{\bar{x}}\right] \leqslant \lambda\bar{v} + (1-\lambda)\bar{\bar{v}}$. Ponieważ wektor $\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{\bar{x}}$ należy do zbioru $\{x;\ F(x) \leqslant \lambda\bar{v} + (1-\lambda)\bar{\bar{v}}\}$ więc

$$g\left[\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{\bar{x}}\right] \leqslant \max_x \left\{ g(x)/F(x) \leqslant \lambda\bar{v} + (1-\lambda)\bar{\bar{v}},\ x \in X \right\} =$$
$$= h\left[\lambda\bar{v} + (1-\lambda)\bar{\bar{v}}\right] \quad (**)$$

Z $(*)$ i $(**)$ wynika żądana nierówność dla funkcji $h(v)$.

Zdefiniujmy funkcję ekstremalną

$$M(p,t) = \max_{x}\left\{g(x)/ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = t,\ x_i \geq 0\right\} \tag{2}$$

gdzie $p = \{p_1,\ldots,p_n\}$, $p_i \geq 0$, zaś t oznacza liczbę nieujemną. Oznaczmy $x(p,t) = \{x_1(p,t),\ldots,x_n(p,t)\}$ wektor-funkcję spełniającą

$$M(p,t) = g[x(p,t)] \tag{3}$$

Znajomość struktury funkcji ekstremalnych (1) lub (2), pożyteczna jest w różnych zagadnieniach praktycznych. Jeżeli np. liczba t oznaczać będzie tę część dochodu konsumenta, którą przeznacza on na zakup wektora towarów $x = \{x_1,\ldots,x_n\}$, zaś $p = \{p_1,\ldots,p_n\}$ będzie wektorem cen jednostkowych, to funkcję $g(x)$ interpretować można jako funkcję użyteczności wektora x (utility function). Wówczas funkcja $M(p,t)$ będzie funkcją pośredniej użyteczności (indirect-utility function) oraz funkcje $x_i(p,t)$ $(i = 1,\ldots,n)$ będą funkcjami popytu (p. [1], [2]).

Twierdzenie 2

Jeżeli $g(x)$ jest funkcją wklęsłą oraz funkcje $x_1(p,t),\ldots x_k(p,t)$ $(k \leq n)$, są stałe względem zmiennych $p_1,\ldots,p_k,t$, to funkcja

$$M(p,t) = \max_{x}\left\{g(x)/ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = t,\ x_i \geq 0\right\}$$

jest wklęsła względem zmiennych $p_1,\ldots,p_k,t$.

Dowód:

Ponieważ funkcja $g(x)$ jest wklęsła, więc

$$\lambda M(\bar{p}_1,\ldots,\bar{p}_k,p_{k+1},\ldots,p_n,\bar{t}) + (1-\lambda)M(\bar{\bar{p}}_1,\ldots,\bar{\bar{p}}_k,p_{k+1},\ldots p_n\bar{\bar{t}})=$$

$$= \lambda g\left[x(\bar{p}_1,\ldots,\bar{p}_k,p_{k+1},\ldots,p_n,\bar{t})\right] + (1-\lambda)g\left[x(\bar{\bar{p}}_1,\ldots,\right.$$

$$\left.\bar{\bar{p}}_k,p_{k+1},\ldots,p_n,\bar{\bar{t}})\right] \leq g\left[\lambda x(\bar{p}_1,\ldots,\bar{p}_k,p_{k+1},\ldots,p_n,\bar{t}) +\right.$$

$$\left.+ (1-\lambda)x(\bar{\bar{p}}_1,\ldots,\bar{\bar{p}}_k,p_{k+1},\ldots,p_n,\bar{\bar{t}})\right]. \tag{4}$$

Obecnie wykażemy, że $\lambda x(\bar{p}_1,\ldots,\bar{p}_k,p_{k+1},p_n,\bar{t}) + (1-\lambda)x(\bar{\bar{p}}_1,\ldots,\bar{\bar{p}}_k,p_{k+1},\ldots,p_n,\bar{\bar{t}})$ spełnia warunek

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\lambda\bar{p}_i + (1-\lambda)\bar{\bar{p}}_i\right]x_i + \sum_{i=k+1}^{n} p_i x_i = \lambda\bar{t} + (1-\lambda)\bar{\bar{t}} \tag{5}$$

Istotnie oznaczając $\bar{x}_i = x_i(\bar{p}_1,\ldots,\bar{p}_k,p_{k+1},\ldots,p_n,\bar{t})$, $\bar{\bar{x}}_i = x_i(\bar{\bar{p}}_1,\ldots,\bar{\bar{p}}_k,p_{k+1},\ldots,p_n,\bar{\bar{t}})$ otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\lambda\bar{p}_i + (1-\lambda)\bar{\bar{p}}_i\right]\left[\lambda\bar{x}_i + (1-\lambda)\bar{\bar{x}}_i\right] + \sum_{i=k+1}^{n} p_i\left[\lambda\bar{x}_i +\right.$$

$$\left.+ (1-\lambda)\bar{\bar{x}}_i\right] = \lambda^2\sum_{i=1}^{k}\bar{p}_i\bar{x}_i + (1-\lambda)^2\sum_{i=1}^{k}\bar{\bar{p}}_i\bar{\bar{x}}_i +$$

$$+ \lambda(1-\lambda)\sum_{i=1}^{k}(\bar{p}_i\bar{\bar{x}}_i + \bar{\bar{p}}_i\bar{x}_i) + \lambda\sum_{i=k+1}^{n} p_i\bar{x}_i + (1-\lambda)\sum_{i=k+1}^{n} p_i\bar{\bar{x}}_i =$$

$$= \lambda^2 \sum_{i=1}^{k} \bar{p}_i \bar{x}_i + (1-\lambda)^2 \sum_{i=1}^{k} \bar{\bar{p}}_i \bar{\bar{x}}_i + \lambda(1-\lambda) \sum_{i=1}^{k} (\bar{p}_i \bar{\bar{x}}_i +$$

$$+ \bar{\bar{p}}_i \bar{x}_i) + \lambda(\bar{t} - \sum_{i=1}^{k} \bar{p}_i \bar{x}_i) + (1-\lambda)(\bar{\bar{t}} - \sum_{i=1}^{k} \bar{\bar{p}}_i \bar{\bar{x}}_i) =$$

$$= \lambda\bar{t} + (1-\lambda)\bar{\bar{t}} + \lambda(\lambda-1) \sum_{i=1}^{k} \bar{p}_i \bar{x}_i + \lambda(\lambda-1) \sum_{i=1}^{k} \bar{\bar{p}}_i \bar{\bar{x}}_i +$$

$$+ (1-\lambda)\lambda \sum_{i=1}^{k} (\bar{p}_i \bar{\bar{x}}_i + \bar{\bar{p}}_i \bar{x}_i) = \lambda\bar{t} + (1-\lambda)\bar{\bar{t}} +$$

$$+ \lambda(\lambda-1) \sum_{i=1}^{k} \left[\bar{p}_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i) + \bar{\bar{p}}_i (\bar{\bar{x}}_i - \bar{x}_i) \right] = \lambda\bar{t} + (1-\lambda)\bar{\bar{t}},$$

gdyż ze względu na założenie $\bar{x}_i = \bar{\bar{x}}_i$ dla $i = 1,\ldots,k$.
Ponieważ

$$\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{\bar{x}} \in \left\{ x;\ \sum_{i=1}^{k} \left[\lambda\bar{p}_i + (1-\lambda)\bar{\bar{p}}_i \right] x_i + \sum_{i=k+1}^{n} p_i x_i = \lambda\bar{t} + (1-\lambda)\bar{\bar{t}},\ x_i \geqslant 0 \right\}$$

gdzie oznaczono

$$\bar{x} = x(\bar{p}_1,\ldots,\bar{p}_k,p_{k+1},\ldots,p_n,\bar{t}),\ \bar{\bar{x}} = x(\bar{\bar{p}}_1,\ldots,\bar{\bar{p}}_k,p_{k+1},\ldots,p_n,\bar{\bar{t}}),$$

więc

$$g\left[\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{\bar{x}}\right] \leqslant \max_{x}\left\{g(x)/\sum_{i=1}^{k}\left[\lambda\bar{p}_i + (1-\lambda)\bar{\bar{p}}_i\right]x_i + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=k+1}^{n} p_i x_i = \lambda\bar{t} + (1-\lambda)\bar{\bar{t}},\ x_i \geqslant 0\right\} = M\left[\lambda\bar{p}_1 + \right.$$

$$\left. + (1-\lambda)\bar{\bar{p}}_1,\ldots,\lambda\bar{p}_k + (1-\lambda)\bar{\bar{p}}_k, p_{k+1},\ldots,p_n, \lambda\bar{t} + (1-\lambda)\bar{\bar{t}}\right]$$

Z ostatniej nierówności i z (4) otrzymujemy

$$\lambda M(\bar{p}_1,\ldots,\bar{p}_k,p_{k+1},\ldots,p_n,\bar{t}) + (1-\lambda)M(\bar{\bar{p}}_1,\ldots,\bar{\bar{p}}_k,p_{k+1},\ldots,$$

$$p_n,\bar{\bar{t}}) \leqslant M\left[\lambda\bar{p}_1 + (1-\lambda)\bar{\bar{p}}_1,\ldots, \lambda\bar{p}_k + (1-\lambda)\bar{\bar{p}}_k, p_{k+1},\ldots,p_n,\right.$$

$$\left. \bar{t} + (1-\lambda)\bar{\bar{t}}\right]$$

co dowodzi wklęsłości funkcji $M(p,t)$ względem zmiennych $p_1,\ldots,p_k,t$.

Przy interpretacji funkcji $M(p,t)$ podanej wyżej, sens twierdzenia (2) jest następujący. Jeżeli założymy, że popyt na kilka artykułów (np. chleb, sól, cukier) nie zmienia się wraz ze zmianą ich cen i ewentualnie dochodu konsumenta, to funkcja $M(p,t)$ jest wklęsła ze względu na ceny jednostkowe tych artykułów i dochód.

Rękopis złożono w Redakcji dnia 4.III.1966 r.

LITERATURA

[1] Wold H.: Demand analysis, Stockholm, 1953.
[2] Hicks J.R.: Value and capital, First Edition, Oxford, 1939.

О ВЫПУКЛОСТИ НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Р е з ю м е

В работе автор представляет доказательства двоих теорем

1) О вогнутости функции

$$h(v) = \max_{x} \left\{ g(x) / F(x) \leqslant v x \in X \right\}$$

где x является n-мерным вектором, v вектором m-мерным, а $F(x) = \{ f_1(x), \ldots, f_m(x) \}$ является выпуклой вектор-функцией и $g(x)$ вогнутой функцией.

2) О вогнутости функции

$$M(p,t) = \max_{x} \left\{ g(x) / \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = t,\ x_i \geqslant 0 \right\}$$

где $g(x)$ является вогнутой функцией, а $x_j(p,t)$ $(j=1,\ldots,k)$ являются постоянными функциями относительно переменных $p_1, p_2, \ldots, p_k, t$ $(k < n)$ причём функции $x_i(p,t)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ исполняют условие

$$M(p,t) = g\left[x_1(p,t), \ldots, x_n(p,t) \right]$$

Автор даёт следующую интерпретацию теоремы (2). Если допустим, что спрос на несколько товаров (напр. хлеб, соль, сахар) не изменяется вместе с изменением их цен и дохода потребителя, то функция M(p,t)(indirect utility fonction) является вогнутой относительно цен этих товаров и дохола потребителя.

ABOUT CONVEXITY OF SOME EXTREME FUNCTIONS

S u m m a r y

The author gives in the paper proofs of the two theorems:

1) About concavity of a function

$$h(v) = \max_x \left\{ g(x)/F(x) \leqslant v,\ x \in X \right\}$$

where x is an n-dimensional vector, v an m-dimensional vector and $F(x) = \left\{ f_1(x), \ldots, f_m(x) \right\}$ is a vector-convex function and $g(x)$ is a concave function.

2) About the concavity of a function

$$M(p,t) = \max_x \left\{ g(x)/\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = t,\ x_i \geqslant 0 \right\}$$

assuming that a function $g(x)$ is concave and the functions $x_j(p,t)$ $(j = 1,\ldots,k)$ are constants with respect to variables $p_1,\ldots,p_k,t$ $(k \leqslant n)$, where the functions $x_i(p,t)$ $(i = 1,\ldots,n)$ satisfy a condition

$$M(p,t) = g\left[x_1(p,t),\ldots,x_n(p,t)\right]$$

The author gives the following interpretation of the theorem (2): if we assume that the demand for some food products (e.g. bread, salt, sugar) hasn't been changed with the price change or the consumer's income, then function $M(p,t)$ (indirect-utility function) is concave on account of the elementary prices of these goods and income.