ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 11 Nr kol. 172

JÓZEF SZPILECKI
Katedra Fizyki B

# REZONANSE PARAMETRYCZNE W UKŁADACH OPISANYCH RÓWNANIAMI BLOCHA-TORREYA

Streszczenie. W pracy omówiono zagadnienie rozwiązania układu równań Blocha-Torreya. Jest to uogólniony układ równań Blocha na przypadek przestrzennie niejednorodnych pól magnetycznych. Rozpatrzono cztery założenia o czasowej zmienności pól magnetycznych, odpowiadające przypadkom spotykanym w technice rezonansów jądrowego i elektronowego. Praca niniejsza jest częścią pierwszą. W pracy tej przedstawiono układ równań Blocha-Torreya w postaci macierzowej (8) i następnie dla przypadków 1 i 2, w których pole magnetyczne jest sinusoidalne, przyjmując rozwiązanie w postaci szeregu Fouriera sprowadzono równanie (8) do postaci (26). Równania przypadku 3 i 4, odnoszących się do impulsowych metod badania rezonansu, posiadają również postać (26). Równanie (26), w którym dochodzą do głosu przestrzenne własności układu, omówiono w części drugiej pracy pt. O całkowaniu pewnego równania macierzowego, występującego w teorii parametrycznych rezonansów jądrowych i elektronowych.

## 1. Wstęp. Równania Blocha-Torreya

Najogólniejsza postać równań opisujących zjawiska rezonansu jądrowego i elektronowego z uwzględnieniem przestrzennej niejednorodności pola magnetycznego jest następująca [2, 4]:

$$\partial M/\partial t = \gamma (M \times H) - M/T_2 + \chi_o H/T_1 + \left[(M\, H)\, H/|H|^2\right] \cdot$$

$$\cdot\, (1/T_2 - 1/T_1) + \nabla D \nabla (M - \chi_o H) \qquad (1)$$

przy czym ostatni składnik jest rozumiany jako wektor o składowych

$$\operatorname{div} \left\{ D \operatorname{grad} (M_x - \chi_o H_x) \right\} \text{ itd.}$$

Oznaczenia:

- $M$ – makroskopowy wektor namagnesowania,
- $H$ – wektor natężenia pola magnetycznego,
- $\gamma$ – współczynnik giromagnetyczny,
- $\chi_o$ – statyczna podatność magnetyczna,
- $T_1$, $T_2$ – podłużny i poprzeczny czas relaksacji jąder atomowych,
- $D$ – współczynnik samodyfuzji molekuł zawierających rozpatrywane jądra.

Równanie (1) można napisać w następującej postaci macierzowej:

$$\partial M/\partial t - \nabla D \nabla M - (A)\, M = (\chi_o/T_1)\, H - \nabla D \nabla (\chi_o H) \qquad (2)$$

gdzie:

$M$ – wektor kolumna o składowych $M_x$, $M_y$, $M_z$,

$H$ – wektor kolumna o składowych $H_x$, $H_y$, $H_z$.

Macierz $(\Lambda)$ posiada następujące elementy

$$a_{1,1} = -\,1/T_2+(H_x^2/|H|^2)(1/T), \qquad a_{1,2} = \gamma H_z+(H_xH_y/|H|^2)(1/T),$$

$$a_{1,3} = -\,\gamma H_y+(H_xH_z/|H|^2)(1/T), \qquad a_{2,1} = -\gamma H_z+(H_yH_x/|H|^2)(1/T),$$

$$a_{2,2} = -\,1/T_2+(H_y^2/|H|^2)(1/T), \qquad a_{2,3} = \gamma H_x+(H_yH_z/|H|^2)(1/T),$$

$$a_{3,1} = \gamma H_y+(H_zH_x/|H|^2)(1/T), \qquad a_{3,2} = -\gamma H_x+(H_zH_y/|H|^2)(1/T),$$

$$a_{3,3} = -\,1/T_1+(H_z^2/|H|^2)(1/T) \tag{3}$$

przy czym

$$1/T = 1/T_2 - 1/T_1 \tag{3a}$$

Ośrodki badane metodami rezonansu jądrowego i elektronowego są charakteryzowane przez wielkości: $T_1$, $T_2$ oraz wielkość $D$, którą w pierwszym przybliżeniu przyjmuje się jako wielkość stałą, w dalszym można przypisać jej anizotropowość przez przyjęcie trzech stałych w trzech prostopadłych kierunkach: $D_x$, $D_y$, $D_z$.

Podaną przez Blocha postać równań otrzymuje się przez odrzucenie wyrażeń, zawierających współczynnik $D$ oraz wyrazów nieliniowych w $H$, w macierzy $(\Lambda)$. Pominięte wyrazy mają wtedy sens, gdy uwzględniamy przestrzenną niejednorodność pól magnetycznych: stałego i zmiennego.

## 2. Założenia o postaci pól magnetycznych działających na układ

Ponieważ w metodach pomiarowych zjawisko rezonansu musi być powtarzane, aby wyniki były mierzalne, stosowane są dodatkowe pola rozstrajające układ i w pewnych chwilach doprowadzając go do rezonansu. Mogą one być nałożone na stałe pole, z założenia działające w kierunku osi z prostokątnego układu współrzędnych, w postaci pola sinusoidalnego zwykle niskiej częstości, albo też w postaci pola o kształcie piły, które można opisać przy pomocy dwu odcinków prostych. Istnieje też inna możliwość, mianowicie przy stałym polu magnetycznym w kierunku osi z, nałożyć pola roztrajające na składowe $H_x$ i $H_y$ np. w postaci modulacji częstościowej oraz pola piłowego.

W przypadku metod impulsowych przy stałej składowej $H_z$ zakładamy składowe $H_x$ i $H_y$ w postaci impulsów cosinusoidalnych lub prostokątnych.

Odpowiednio do tego można wyróżnić następujące przypadki:

Przypadek 1

$$H_z = H_o + H_2 \cos \omega_2 t + H_3 t\ K(0,t_o) + H_4(t_o - t)\ K(t_o,t_1) + \ldots$$

$$H_x = H_1 \cos \omega_1 t \tag{4}$$

$$H_y = - H_1 \sin \omega_1 t$$

Przypadek 2

$$H_z = H_o$$

$$H_x = H_1 \cos(\omega_1 t + \Delta\omega \sin \omega_2 t) + H_3 t\ K(0,t_o) +$$

$$+ H_4(t_o - t)\ K(t_o,t_1) + \ldots.$$

$$H_y = H_1 \sin(\omega_1 t + \Delta\omega \sin \omega_2 t) + H_3' t\ K(0,t_o) +$$

$$+ H_4'(t_o - t)\ K(t_o,t_1) + \ldots. \tag{5}$$

Przypadek 3

$$H_z = H_o$$

$$\begin{aligned} H_x &= H_1 \cos\omega_1 t \left[K(0,t_o) + K(t_1,t_2) + \ldots..\right] \\ H_y &= H_1 \sin\omega_1 t \left[K(0,t_o) + K(t_1,t_2) + \ldots..\right] \end{aligned} \tag{6}$$

Przypadek 4

$$H_z = H_o$$

$$\begin{aligned} H_x &= H_1 \left[K(0,t_o) + K(t_1,t_2) + \ldots..\right] \\ H_y &= H_2 \left[K(0,t_o) + K(t_1,t_2) + \ldots..\right] \end{aligned} \tag{7}$$

$t_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots..$ - chwile załączenia lub wyłączenia pola,

$K(t_i, t_{i+1})$ - funkcja równa 1 między wartościami $t = t_i$ i $t = t_{i+1}$, poza tym równa 0.

Wielkości $H_o$, $H_1$, $H_2$, $H_3$, ..... są funkcjami współrzędnych przestrzennych. O postaci ich nie wiele wiadomo. Są one zależne od konfiguracji pola w danej aparaturze czyli są związane z konstrukcją aparatury. Tylko przy bardzo specjalnych założeniach o konfiguracji tych pól zostały rozwiązane równania typu (1).

## 3. Rozwiązanie zagadnień

Rozwiązanie zagadnień sformułowanych równaniami (1) - (7) przeprowadzimy w trzech etapach:

w części pierwszej zostanie wyprowadzone równanie macierzowe na wyznaczenie współczynników szeregu Fouriera, stanowiącego rozwiązanie w przypadku 1 i 2. Tę samą postać można nadać równaniu odnoszącemu się do przypadku 3 i 4,

w części drugiej zostanie doprowadzone równanie macierzowe do postaci równania całkowego,

w części trzeciej zostanie rozwiązane równanie całkowe.

## 4. Część pierwsza. Wyprowadzenie równania na wyznaczenie współczynników szeregu Fouriera

### 4.1. Przekształcenie równania (1) w przypadku 1

W tym przypadku równanie (1) z uwzględnieniem warunków (4) może być napisane w następującej postaci:

$$\partial M/\partial t - \nabla^2(D\,M) - (A)M = (\chi_o/T_1)H - \nabla^2(D\chi_o\,H) \tag{8}$$

gdzie macierz (A) posiada następującą postać:

$$\begin{aligned}(A) = {} & (\bar{A}_a) + (\bar{A}_b)\sin\omega_1 t + (\bar{A}_c)\cos\omega_1 t + (\bar{A}_d)\cos\omega_2 t + \\ & + (\overline{A^2})\cos 2\omega_1 t + (\overline{A^3})\sin 2\omega_1 t + (\overline{A^7})\sin\omega_1 t \cdot \cos\omega_2 t + \\ & + (\overline{A^8})\cos\omega_1 t \cdot \cos\omega_2 t\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}(\bar{A}_a) &= (A') + \left[1/|H|^2\right](1/T_2 - 1/T_1)\left[(A^1) + (A^{12})\right] \\ (\bar{A}_b) &= (A'''') + \left[1/|H|^2\right](1/T_2 - 1/T_1)\left[(A^5) + (A^9)\right]\end{aligned} \tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
(\overline{A}_c) &= (A''') + \left[1/|H|^2\right](1/T_2 - 1/T_1)\left[(A^4) + (A^{10})\right] \\
(\overline{A}_d) &= (A'') + \left[1/|H|^2\right](1/T_2 - 1/T_1)\left[(A^6) + (A^{11})\right]
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Macierz (A') posiada różne od zera elementy

$$a_{1,1} = a_{2,2} = -1/T_2, \quad a_{3,3} = -1/T_1, \quad a_{1,2} = -a_{2,1} =$$

$$= \gamma\left[H_o + f(t)\right]$$

Macierz (A'') posiada różne od zera elementy

$$a_{1,2} = -a_{2,1} = \gamma H_2$$

Macierz (A''') posiada różne od zera elementy

$$a_{2,3} = -a_{3,2} = \gamma H_1$$

Macierz (A'''') posiada różne od zera elementy

$$a_{1,3} = -a_{3,1} = \gamma H_1$$

Macierz $(\overline{A^1})$ jest diagonalna o elementach

$$H_1^2/2, \quad H_1^2/2, \quad H_o^2 + H_2^2/2$$

Macierz $(\overline{A^2})$ jest diagonalna o elementach

$$H_1^2/2, \quad -H_1^2/2, \quad H_2^2/2$$

Macierz $(\overline{A^3})$ posiada różne od zera elementy

$$a_{1,2} = a_{2,1} = -H_1^2/2$$

Macierz $(\overline{A^4})$ posiada różne od zera elementy

$$a_{1,3} = a_{3,1} = H_1\ H_o$$

Macierz $(\overline{A^5})$ posiada różne od zera elementy

$$a_{2,3} = a_{3,2} = -H_1\ H_o$$

Macierz $(\overline{A^6})$ posiada różny od zera element

$$a_{3,3} = 2\ H_o\ H_2$$

Macierz $(\overline{A^7})$ posiada różne od zera elementy

$$a_{2,3} = a_{3,2} = -H_1\ H_2$$

Macierz $(\overline{A^8})$ posiada różne od zera elementy

$$a_{1,3} = a_{3,1} = H_1\ H_2$$

Macierz $(\overline{A^9})$ posiada różne od zera elementy

$$a_{2,3} = a_{3,2} = -H_1\ f(t)$$

Macierz $(\overline{A^{10}})$ posiada różne od zera elementy

$$a_{1,3} = a_{3,1} = -H_1\ f(t)$$

Macierz $(\overline{A^{11}})$ posiada różny od zera element

$$a_{3,3} = 2\,H_o\,f(t)$$

Macierz $(\overline{A^{12}})$ posiada różny od zera element

$$a_{3,3} = 2\,H_o\,f(t) + [f(t)]^2$$

$$f(t) = H_3\,t\,K(0,t_o) + H_4(t_o - t)K(t_o,t_1) + \dots\dots \tag{11}$$

## 4.2. Przekształcenie równania (1) w przypadku 2

W tym przypadku równanie (1) z uwzględnieniem warunków (5) może być napisane w postaci (8), przy czym

$$(A) = (A_a) + (A_b)\sin\alpha + (A_c)\cos\alpha + (A^2)\cos 2\alpha +$$

$$+ (A^3)\sin 2\alpha \tag{12}$$

gdzie:

$$\alpha = \omega_1 t + \Delta\omega\sin\omega_2 t \tag{13}$$

## 4.3. Przekształcenie równania (1) w przypadku 3

W tym przypadku równanie (1) z uwzględnieniem warunków (6) może być napisane w postaci (8), przy czym w zależności od odcinka czasowego mamy dwojakie przedstawienie macierzy współczynników (A)

$$(A) = (A') + (A_2) \tag{14}$$

$$(A') = \begin{pmatrix} -1/T_2, & \gamma H_o, & -\gamma H_1 \sin\omega_1 t \\ -\gamma H_o, & -1/T_2, & \gamma H_1 \cos\omega_1 t \\ \gamma H_1 \cdot \sin\omega_1 t, & -\gamma H_1 \cos\omega_1 t, & -1/T_1 \end{pmatrix} \Big[K(t_o,t_1) +$$

$$+ K(t_1,t_3) + \ldots\ldots\Big] \tag{15}$$

$$(A_2) = \begin{pmatrix} H_1^2(1+\cos 2\omega_1 t)/2, & -H_1^2 \sin 2\omega_1 t/2, & H_o H_1 \cos\omega_1 t \\ -H_1^2 \sin 2\omega_1 t/2, & H_1^2(1-\cos 2\omega_1 t)/2, & -H_o H_1 \sin\omega_1 t \\ H_o H_1 \cos\omega_1 t, & -H_o H_1 \sin\omega_1 t, & H_o^2 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \Big[(1/T_2 - 1/T_1)/(H_o^2 + H_1^2)\Big]\Big[K(t_o,t_1) + K(t_2,t_3) + \ldots\ldots\Big] \tag{16}$$

albo

$$(A') = \begin{pmatrix} -1/T_2, & H_o, & 0 \\ -H_o, & -1/T_2, & 0 \\ 0 & 0 & -1/T_1 \end{pmatrix} \Big[K(0,t_o)+K(t_1,t_2)+\ldots\ldots\Big] \tag{17}$$

$$(A_2) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & H_o^2 \end{pmatrix} \Big[(1/T_2-1/T_1)/H_o^2\Big]\Big[K(0,t_o)+K(t_1,t_2)+\ldots\Big] \tag{18}$$

4.4. Przekształcenie równania (1) w przypadku 4

W tym przypadku obowiązuje równanie (8) z dwojaką postacią macierzy współczynników zależnie od odcinka czasowego, przy czym obowiązuje relacja (14).

$$(A') = \begin{pmatrix} -1/T_2 & \gamma H_o, & -\gamma H_2 \\ -\gamma H_o, & -1/T_1, & \gamma H_1 \\ \gamma H_2, & -\gamma H_1, & -1/T_1 \end{pmatrix} \left[K(t_o,t_1)+K(t_2,t_3) + \ldots\ldots\right] \quad (19)$$

$$(A_2) = \begin{pmatrix} H_1^2, & H_1H_2, & H_oH_1 \\ H_1H_2, & H_2^2 & H_oH_2 \\ H_oH_1, & H_oH_2, & H_o^2 \end{pmatrix} \left[(1/T_2-1/T_1)/(H_o^2 + H_1^2 + H_2^2)\right] \cdot$$

$$\cdot \left[K(t_o,t_1) + K(t_2,t_3) + \ldots\ldots\right] \quad (20)$$

albo

$$(A') = \begin{pmatrix} -1/T_2, & H_o, & 0 \\ -H_o, & -1/T_2, & 0 \\ 0, & 0, & -1/T_1 \end{pmatrix} \left[K(0,t_o)+K(t_1,t_2) + \ldots\ldots\right] \quad (21)$$

$$(A_2) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & H_o^2 \end{pmatrix} \left[(1/T_2-1/T_1)/H_o^2\right]\left[K(0,t_o)+K(t_1,t_2)+\ldots\right] \quad (22)$$

5. Rozwiązanie równania (8) w przypadku 1 do 4

Ze względu na obraną metodę szeregów Fouriera, zastosujemy ją tylko do równań przypadku 1 i 2, by następnie w drugiej części potraktować wszystkie przypadki jedną metodą. Przyjmujemy [1, 3]

$$M = \sum_{k,l} M_{k,l}\ (x,y,z,t)\cos(\omega_{k,l}t + \Psi_{k,l}) + \\ + M_{o,o}\ (x,y,z,t) \tag{23}$$

gdzie:

$$\omega_{k,l} = k\omega_1 + l\omega_2, k,l = 0 \text{ (nie równocześnie)}, \\ \pm 1, \pm 2, \ldots.. \tag{24}$$

$M_{k,l}(x,y,z,t)$ niewiadome funkcje do wyznaczenia.

Jeżeli oznaczymy

$$M_{k,l,c} = M_{k,l}\cos\Psi_{k,l} \\ M_{k,l,s} = M_{k,l}\sin\Psi_{k,l} \tag{25}$$

oraz wykorzystamy relacje parzystości (nieparzystości) funkcji trygonometrycznych, otrzymujemy równanie następującej postaci

$$\partial\mu/\partial t - \nabla^2(D\mu) - (B)\mu = \mu^* \tag{26}$$

gdzie $\mu$ wektor-kolumna utworzona z wektorów kolumn $M_{i,k,c}$, $M_{i,k,s}$.

Są one uporządkowane następująco: ......... $M_{1,-1,c}$, $M_{1,-1,s}$, $M_{o,o}$, $M_{1,o,c}$, $M_{1,o,s}$, $M_{o,1,c}$, $M_{o,1,s}$, $M_{1,1,c}$, $M_{1,1,s}$, ......... podobnie jest utworzona wektor-kolumna $\mu^*$ z wektorów kolumn prawych stron równań. Macierz (B) jest utworzona według podanego niżej przepisu. Iloczyn $(D\mu)$ oznacza, że kolejne składowe wektora M są mnożone przez odpowiednio $D_x$, $D_y$, $D_z$.

## 6. Wielkości (B) i $\mu^*$ dla przypadków 1 i 2

### 6.1. Wielkości dla przypadku 1

Można napisać

$$H = \varkappa_1 \cos\omega_{1,o}t + \varkappa_2 \sin\omega_{1,o}t + \varkappa_3 \cos\omega_{o,1}t + \varkappa(x,y,z,t) \tag{27}$$

gdzie:

$$\varkappa_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ H_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varkappa_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -H_1 \end{pmatrix}, \quad \varkappa_3 = \begin{pmatrix} H_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varkappa(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} H_o + f(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Wektor-kolumna $\mu^*$ posiada więc jako jedyne elementy różne od zera, elementy odpowiadające $M_{o,o}$, $M_{1,o}$, $M_{o,1}$.

Jeżeli z nieskończonego układu równań wybierzemy odnoszące się tylko do $\omega_{o,o}$, $\omega_{1,o}$, $\omega_{o,1}$, $\omega_{1,1}$, $\omega_{1,-1}$ i pominiemy inne częstości otrzymamy macierz (B) w następującej postaci:

$$\begin{pmatrix} (\overline{A}_a), & -A(b,c), & -A(d,0), & -A(8,7), & -A(8,7) \\ A'(c,b), & A(\omega_{1,o}), & -A_{7,8}, & A(d), & 0 \\ -A'(d,0), & A'_{7,8}, & A(\omega_{o,1}), & A_{c,b}, & 0 \\ A'(8,7), & 0 & 0 & A(\omega_{1,1}), & 0 \\ A'(8,7), & A(d), & 0 & 0 & A(\omega_{1,-1}) \end{pmatrix} = (B) \quad (29)$$

Wprowadzono tu następujące oznaczenia:

$A(b,c) = ((1/2)(\overline{A}_b), -(1/2)(\overline{A}_c))$ macierz prostokątna,

$\omega_{i,k}$ macierz diagonalna, o elementach $\omega_{i,k}$ tego samego rzędu co $\overline{A}_a$,

$A(d,0) = (-(1/2)(\overline{A}_d),0)$ macierz prostokątna,

$A'(d,0)$ macierz przestawiona macierzy $A(d,0)$,

$A'(c,b)$ macierz przestawiona macierzy $(\overline{A}_c,-\overline{A}_b)$ prostokątnej,

$$\begin{pmatrix} \overline{A}_a, & \omega_{i,k} \\ -\omega_{i,k}, & \overline{A}_a \end{pmatrix} = A(\omega_{i,k})$$

$$(1/2)\begin{pmatrix} \overline{A}_d, & \\ & \overline{A}_d \end{pmatrix} = A(d) \quad (30)$$

$A(8,7) = (-(1/4)(\overline{A^8}), (1/4)(\overline{A^7}))$ macierz prostokątna,

$A'(8,7$ macierz przestawiona macierzy $A(8,7)$,

$$(1/2)\begin{pmatrix} \overline{A}_c & \overline{A}_b \\ \overline{A}_b, & -\overline{A}_c \end{pmatrix} = A_{c,b}$$

$$(1/4)\begin{pmatrix} \overline{A^8}, & \overline{A^7} \\ \overline{A^7}, & -\overline{A^8} \end{pmatrix} = A_{7,8}$$

$$(1/4)\begin{pmatrix} \overline{A^8}, & -\overline{A^7} \\ \overline{A^7}, & \overline{A^8} \end{pmatrix} = A'_{7,8}$$

6.2. Wielkości dla przypadku 2

W tym przypadku można napisać

$$H = \varkappa_1 \cos\alpha + \varkappa_2 \sin\alpha + F \tag{31}$$

przy czym

$$\varkappa_1 = \begin{pmatrix} H_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varkappa_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ H_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ H_o \end{pmatrix} \tag{32}$$

gdzie: $f(t)$ i $f'(t)$ funkcje występujące w równaniach (5). W dalszym ciągu zakładamy, że są one ponad to funkcjami zmiennych przestrzennych.

Rozwiązanie przyjmujemy w postaci:

$$M = \sum_{k,l} (M_{k,l,c} \cos\omega_{k,l} t - M_{k,l,s} \sin\omega_{k,l} t) + M_o \qquad (33)$$

gdzie:

$$\omega_{k,l} t = k\alpha + l\omega_2 t, \ k,l = 0 \ \text{(nie równocześnie)},$$
$$\pm 1, \pm 2, \ldots. \qquad (34)$$

Podstawienie do równania (8) z uwzględnieniem (12) i (32) daje na wyznaczenie współczynników szeregu Fouriera równanie typu (26) z tym, że ograniczono się do składowych $M_o$, $M_{1,o,c}$, $M_{1,o,s}$, $M_{o,1,c}$, $M_{o,1,s}$, $M_{1,1,c}$, $M_{1,1,s}$. Nie występuje tu składowa różnicowa ponieważ o rezonansach parametrycznych decyduje właściwie jedynie składowa $M_{1,o,c}$, $M_{1,o,s}$. Macierz (B) posiada następującą postać

$$\begin{pmatrix} (A_a), & A(c,b), & 0 & 0 \\ A'(c,b), & A(\omega_1), & 0 & A(\omega_2) \\ 0 & 0 & A(a), & A_{c,b} \\ 0 & A(\omega_2), & A_{c,b}, & A(\omega_1) \end{pmatrix} \qquad (35)$$

przy czym oznaczono:

$A(c,b) = ((1/2)(A_c), -(1/2)(A_b))$ macierz prostokątna,

$A'(c,b)$ macierz przestawiona macierzy $A(c,b)$,

$$A(\omega_1) = \begin{pmatrix} A_a, & \omega_1 \\ -\omega_1 & A_a \end{pmatrix},$$

$A(a)$ macierz diagonalna zbudowana z dwu macierzy $(A_a)$ (36),

$$A(\omega_2) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_2 \Delta\omega \\ -\omega_2 \Delta\omega, & 0 \end{pmatrix},$$

O macierz, zbudowana z zer, o podobnych własnościach, jak stojące w odnośnym wierszu i kolumnie,

$\omega_1, \omega_2 \Delta\omega$ macierze diagonalne tego samego rzędu co $A_a$, zbudowane z elementów $\omega_1$, $\omega_2$, $\Delta\omega$.

$$A_{c,b} = (1/2) \begin{pmatrix} (A_c) & (A_b) \\ -(A_b), & (A_c) \end{pmatrix}$$

W wektorze-kolumnie występują jedynie elementy, odnoszące się do składowej $M_o$ oraz $M_{1,o,c}$, $M_{1,o,s}$. Pozostałe elementy są równe zeru.

Wyznaczenie rezonansów parametrycznych sumowego i różnicowego jest możliwe ze składowej o współczynniku $M_{1,o}$. Mianowicie

$$\cos\alpha = \cos(\omega_1 t + \Delta\omega \sin\omega_2 t) = \cos\omega_1 t \cos(\Delta\omega \sin\omega_2 t) -$$

$$- \sin\omega_1 t \sin(\Delta\omega \sin\omega_2 t) \tag{37}$$

przy uwzględnieniu znanych relacji [3]

$$\cos(x \sin\varphi) = J_o(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x)\cos 2m\varphi$$

$$\sin(x \sin\varphi) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2m-1}(x)\sin(2m-1)\varphi \tag{38}$$

przy czym $J_o(x)$, $J_{2m}(x)$, $J_{2m-1}(x)$ funkcje Bessela pierwszego rodzaju. Mniej dokładnie można by przeprowadzić obliczenie, ograniczając się do macierzy (B) zawierającej tylko dwa wiersze i dwie kolumny.

Maszynopis złożono w Redakcji dnia 15.V.1966 r.

LITERATURA

[1] Hubbard P.S., Rowland T.J.: Journ. Appl. Phys. 28, 11, 1957. S. 1275.

[2] Pfeifer H.: Möglichkeiten d. Spin-Echo-Methoden, artykuł w wydawnictwie: Hochfrequenzspektroskopie, Akad. Verl. Berlin 1961.

[3] Rozet T.A.: Elementy teorii cylindriczeskich funkcij, Sow. Radio M.1956.

[4] Torrey H.C.: Phys. Rev. 104, 563-565, 1956.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕЗОНАНСЫ В СИСТЕМАХ ОПИСАННЫХ УРАВНЕНИЯМИ БЛОХА - ТОРРЕЯ

Р е з ю м е

В работе рассматривается решение системы уравнений Блоха - Торрея. Это система уравнений Блоха, обобщенная на случай пространственно неоднородных магнитных полей. Рассматриваются четыре предложения о временной зависимости магнитных полей, которые встречаются в технике ядерного и электронного резонанса. В первой части, которой является настоящая работа, система уравнений Блоха - Торрея приведена в виде (8) и для случая 1 и 2 добавочных условий синусоидального магнитного поля, если решение принято в виде ряда Фурье, уравнение (8) сведено к (26). Уравнения случая 3 и 4, для импульсных методов исследования резонанса, имеют тоже вид (26). Уравнение (26), в котором выражены пространственные особенности системы, рассматривается во второй части: об интегрировании некоторого матричного уравнения, которое выступает в теории параметрических ядерных и электронных резонансов.

PARAMETRIC RESONANCES DESCRIBED BY THE BLOCH TORREY EQUATION SYSTEM

S u m m a r y

In the paper the solution of Bloch Torrey equation system has been discussed. It is generalised for spatially non homogenous magnetic fields Bloch equation system. There are four suppositions discussed concerning time dependences of magnetic fields, encountered in the nuclear and electronic resonance technique.

This is a first part. In the paper is the Bloch Torrey equation system in matrix form (8) given. For the cases 1 and 2 with sinusoidal magnetic fields, assuming solution in Fourier series form is the equation (8) brought to the form (26). The equation for the cases 3 and 4 for pulse methods of resonance investigation, can be also in the form (26) given. The equation (26), where the spatial system peculiarities are included, is in the second part discussed: "About matrix equation integration, appearing in the theory of paramagnetic nuclear and electronic resonances".