

TADEUSZ ZAKRZEWSKI  
Katedra Fizyki A

## MATEMATYCZNE ROZWAŻANIA NAD TEORIĄ JONIZACJI W KOLUMNACH

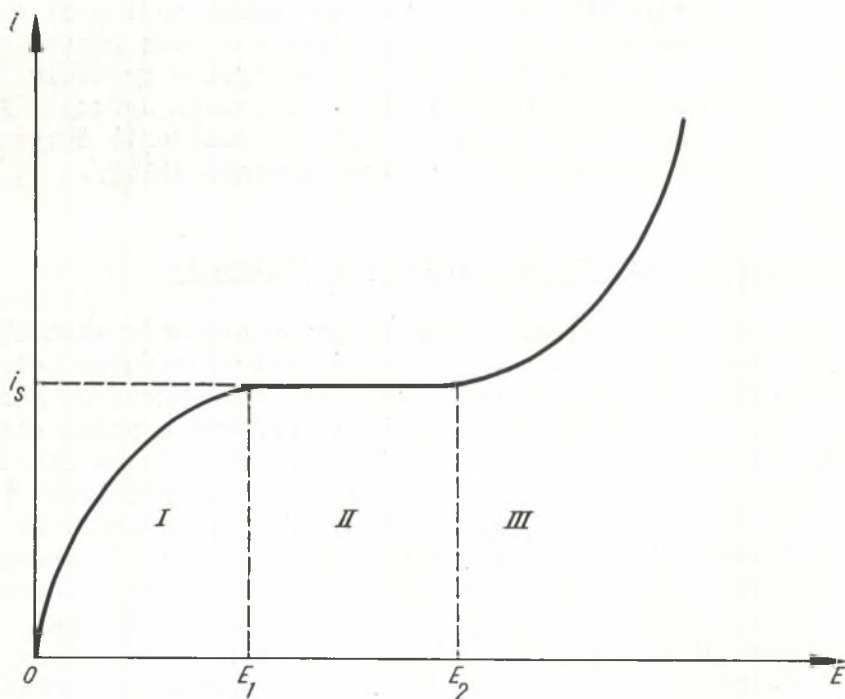
Streszczenie. W przedłożonej pracy autor omówił na wstępie dokładnie podstawowe założenia teorii Jaffego zwracając uwagę na zgodność teorii z doświadczeniem. Następnie autor przeprowadził matematyczne rozważania nad teorią jonizacji w kolumnach w wyniku czego otrzymał nową postać wzoru na gęstość jonów, wytworzonych w procesie jonizacji, przy zaniedbaniu zjawiska dyfuzji. Przy tym zwrócił uwagę na istotne założenie dotyczące występowania sił typu kulombowskiego.

### 1. Przewodnictwo wzbudzone ciekłych dielektryków

Ze względu na dużą analogię w mechanizmach przewodnictwa elektrycznego gazów zjonizowanych i cieczy dielektrycznych celowym jest przypomnienie podstawowych własności przewodnictwa gazów [1, 2]. Gazy w warunkach normalnych nie przewodzą prądu elektrycznego. Natomiast w przypadku, gdy zostaną poddane działaniu czynników jonizujących jak np. promieni  $x$ , promieni  $\gamma$ , cząstek  $\alpha$ , protonów itd., gazy zaczną przewodzić prąd. Proces ten jak wiadomo tłumaczy się w ten sposób, że kosztem energii promieniowania jonizującego padającego na gaz zostaną oderwane pojedyncze elektrony od obojętnych atomów lub też molekulek gazu (proces jonizacji) dzięki temu nastąpi rozdzielenie ładunku elektrycznego. Ładunek dodatni pozostaje przy reszcie atomu lub molekulek, tworząc jon dodatni, natomiast swobodny elektron po pewnej liczbie zderzeń z obojętnymi atomami lub molekułkami zostanie przyłączony do obojętnego atomu lub cząsteczki i utworzy w ten sposób jon ujemny.

Po każdym akcie jonizacji powstaje jedna para jonów: dodatni i ujemny, tak że energia jaka zostaje na ten cel zużytkowana pozostaje prawie stała i równa około 32 eV. W przypadku gdy energia cząstki padającej jest znana łatwo można wtedy obliczyć liczbę par jonów jaką zdoła ona wytworzyć na swej drodze np. cząstka  $\alpha$  o energii 3,2 MeV wytworzy na swej drodze  $10^5$  par jonów. W przypadku gdy jonizowany gaz znajduje się w komorze jonizacyjnej (rodzaj kondensatora) połączonej z baterią zasilającą, to wówczas jony tam wytworzone na skutek istnienia pola elektrycznego podążą do elektrod komory, w której obwodzie można stwierdzić za pomocą czułego urządzenia elektrometrycznego [3] obecność prądu elektrycznego (prąd jonizacyjny).

Zależność prądu jonizacyjnego od natężenia pola  $E$  w gazach przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Zależność prądu jonizacyjnego od natężenia pola w gazach

Jak jest widoczne z rys. 1 dla małych pól (obszar I) natężenie prądu rośnie (nie liniowo) ze wzrostem natężenia pola  $E$  do pewnej wartości  $i_S$  noszącej nazwę prądu nasycenia.

Dalszy wzrost natężenia pola w przedziale  $(E_1, E_2)$  nie powoduje zmiany wartości prądu (obszar II). Po przekroczeniu wartości  $E_2$  następuje gwałtowny wzrost prądu, początkowo liniowy, później wykładniczy, aż do wyładowania iskrowego (obszar III).

W obszarze I znaczną rolę odgrywa zjawisko rekombinacji jonów, które polega na tym, że jony gazu uczestnicząc w ruchu cieplnym jego cząstek tracą ładunki elektryczne, gdy przypadkowo zderzą się z jonami znaku przeciwnego. Dla małych pól, gdy czas przejścia jonów między elektrodami jest dość znaczny, zjawisko rekombinacji neutralizuje pewną część jonów, która jest tym większa im mniejsze jest napięcie.

W obszarze II wszystkie jony wytworzone w gazie zostaną doprowadzone przez pole do elektrod. Powyżej prądu nasycenia następuje ponowny wzrost prądu ze wzrostem natężenia pola. Fakt ten wynika stąd, że jony zaczynają nabierać tak dużych prędkości, że ich energia jest dostateczna do zjonizowania pozostałych obojętnych atomów lub cząstek gazu.

Oznaczając przez  $N$  aktywność jonizatora, a przez  $N'$  liczbę par jonów ulegających rekombinacji w jednej sekundzie i w  $1 \text{ cm}^3$ . To w przypadku równowagi spełnione jest równanie

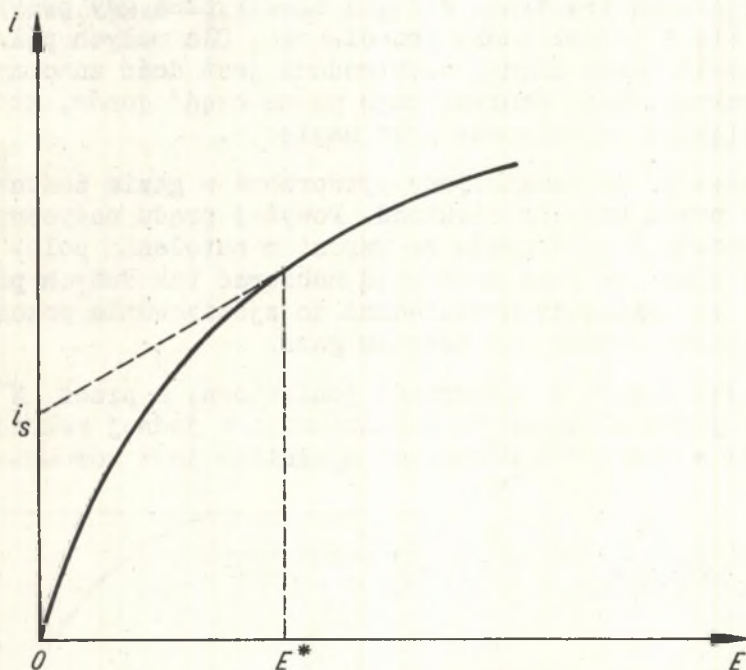
$$i = \alpha n^2 + \frac{i}{eSd} = \sqrt{N + \frac{i}{eSd}} \quad (1.1)$$

gdzie:

- $\alpha$  - współczynnik rekombinacji,
- $n$  - koncentracja jonów obu znaków,
- $d$  - odległość elektrod,
- $e$  - ładunek jonu,
- $S$  - pola każdej z elektrod.

Jeśli prąd jest mały (obszar I) to  $\alpha n^2 \gg \frac{i}{eSd}$  i z równania (1.1) wynika, że  $N \approx \alpha n^2$ . Natomiast gdy  $\frac{i}{eSd} \gg \alpha n^2$  to z równania (1.1) można otrzymać wartość prądu nasycenia  $i_s = N e S d$ .

Mechanizm tych zjawisk zachodzący w gazie zjonizowanym pod ciśnieniem normalnym ulega znacznej komplikacji w przypadku, gdy ciśnienie gazu rośnie, a tym bardziej komplikuje się w cieczach dielektrycznych.



Rys. 2. Zależność prądu jonizacyjnego od natężenia pola w cieczach dielektrycznych

Jedną z najbardziej charakterystycznych różnic jest brak całkowitego nasycenia w cieczach w silnych polach elektrycznych (rys. 2). Wtedy począwszy od pewnej wartości natężenia pola  $E^*$  następuje liniowy wzrost prądu jonizacyjnego ze wzro-

stem natężenia pola. Zależność prądu jonizacyjnego od napięcia w obszarze II można napisać w postaci [4]

$$i = i_s + cE \quad (1.2)$$

gdzie  $c$  jest pewnym współczynnikiem zależnym od natężenia źródła jonizacji, od energii promieniowania jonizującego oraz od odległości elektrod. Zależność [1, 2] znaleziona została już w pierwszych pracach doświadczalnych z cieczami dielektrycznymi, a następnie potwierdzona w szeregu pracach późniejszych [5, 6], lecz do chwili obecnej nie jest jednoznacznie interpretowana. Do najważniejszych koncepcji teoretycznych wyjaśniających to zjawisko należą: teoria G. Jaffego bazująca na pojęciu jonizacji kolumnowej i wpływie rekombinacji wyróżnionej [7, 8] oraz teoria H.I. Plumleya [9] uwzględniająca możliwość dysocjacji cząstek śladowych zanieczyszczeń lub też cząstek własnych cieczy pod wpływem pola elektrycznego.

## 2. Podstawy teorii Jaffego

Teoria jonizacji kolumnowej została podana przez G. Jaffego [7] w oparciu o wcześniejsze założenia P. Langevena [10].

Podstawowym założeniem tej teorii jest przypuszczenie, że droga każdej cząstki jonizującej jest prostoliniowa oraz że jony wytworzone przez taką cząstkę nie są rozłożone równomiernie w przestrzeni, lecz zgrupowane zostają wzdłuż drogi tych cząstek jonizujących wewnątrz pewnych kolumn, których osią symetrii jest tor cząstki. Średnica tych kolumn jest początkowo bardzo mała, lecz w miarę działania zjawiska dyfuzji powiększa się w czasie. Obraz taki jest potwierdzony przez fotografie torów cząstek jonizujących w komorze Wilsona.

W przypadku istnienia takiego niejednorodnego rozkładu jonów, zjawisko rekombinacji jonów odgrywało znacznie większą rolę niż w przypadku ich równomiernego rozmieszczenia. W tym przypadku należy mieć na uwadze następujące typy rekombinacji [19]: a) elektronowa, b) wyróżniana, c) początkowa, które mogą odgrywać tu pewną rolę, oprócz rekombinacji kolumnowej.

Należy teraz zbadać jakie procesy fizyczne zachodzą w tak powstałej kolumnie. W momencie jonizacji jony dodatnie i ujemne zostaną wzajemnie rozdzielone. W przypadku nieobecności zewnętrznego pola elektrycznego w kolumnie powstają pewne zmiany na które składają się dwa procesy; mianowicie kolumna rozszerza się na skutek dyfuzji, a jednocześnie liczba istniejących jonów ulega zmniejszeniu na skutek procesu rekombinacji. Oba te procesy są scharakteryzowane przez zwykłe prawa dyfuzji i rekombinacji, dla których miarodajne są współczynniki odpowiednio dyfuzji  $D$  i rekombinacji  $\alpha$ . Zatem prawo charakteryzujące proces dyfuzji będzie:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \operatorname{div} \operatorname{grad} n = \Delta n \cdot D \quad (2.1)$$

gdzie:  $n$  - gęstość obu rodzajów jonów.

Prawo rekombinacji określa równanie Rutherforda:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\alpha n^2 \quad (2.2)$$

Zakładając, że oba rodzaje jonów posiadają jednakowe prędkości oraz wybierając za osie kolumny, osie układu współrzędnych cylindrycznych, z rys. 3 można wnioskować:

- a) szybkość zmiany gęstości nie zależy od kąta,
- b) szybkość zmiany gęstości nie zależy od wysokości kolumny.

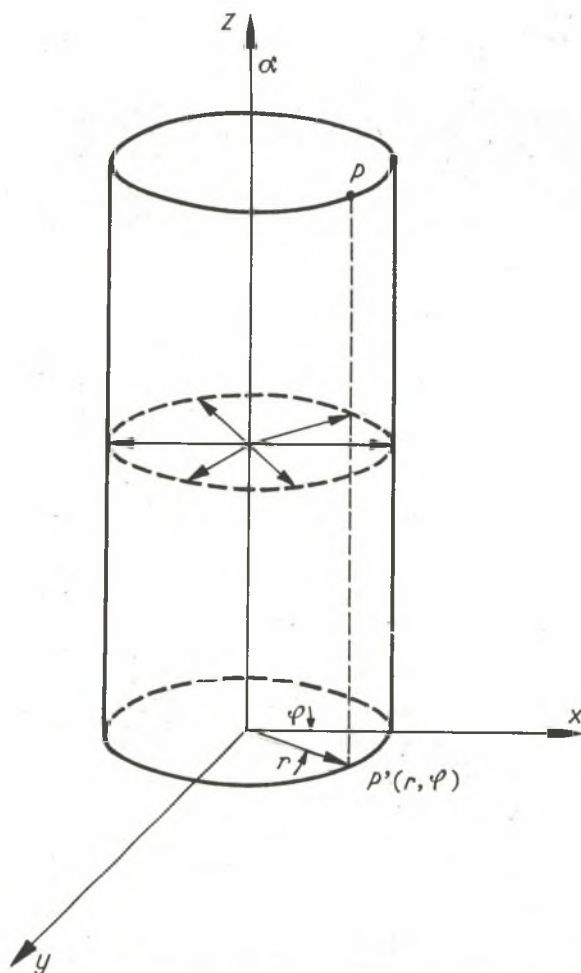
Rozpisując równanie (2.1) w układzie współrzędnych walcowych mamy:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \Delta n \cdot D = \left( \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) \cdot D \quad (2.3)$$

Z powyższych założeń wynikają równania

$$\frac{\partial^2 n}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} = 0 \quad (2.4)$$

Jest więc widoczne, że w różnych kierunkach warstw poziomych prostopadłych do osi kolumny, szybkość zmiany gęstości jonów obu znaków jest jednakowa, natomiast drugie założenie pozwala na rozpatrywanie tylko kolumny o dowolnej wysokości np. równej 1 co znacznie upraszcza rachunki.



Rys. 3. Obraz kolumny w układzie współrzędnych walcowych

Po uwzględnieniu równań (2.4) równanie dyfuzji we współrzędnych walcowych przybierze postać:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} \right) \quad (2.5)$$

Zatem ogólne równanie różniczkowe przedstawiające proces zachodzący w kolumnie ma postać:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} \right) - \alpha n^2 \quad (2.6)$$

Równanie to można rozwiązać metodą przybliżoną, polegającą na szukaniu całki równania (2.6) po zredukowaniu członu drugiego. Zatem widoczne jest, że równanie (2.6) redukuje się do równania radialnego przewodnictwa cieplnego w cylindrze:

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 n'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial n'}{\partial r} \right) \quad (2.7)$$

Całka szczególna tego równania ma postać:

$$n' = \frac{N}{\pi(4Dt + b^2)} \exp \left( - \frac{r^2}{4Dt + b^2} \right) \quad (2.8)$$

gdzie:  $N$  - oznacza tzw. liniową gęstość jonizacyjną tzn. liczbę jonów w kolumnie przypadającej na 1 cm długości kolumny, to jest pewną stałą zależną od średnicy kolumny.

Średnia odległość wszystkich jonów od osi w danym czasie wynosi

$$r = \left( \frac{\pi(4Dt + b^2)}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$



Równanie (2.8) pokazuje jak zmienia się gęstość jonów w kolumnie pod wpływem samego zjawiska dyfuzji. Lecz w rzeczywistości jak wiadomo działa jeszcze rekombinacja, co pociąga za sobą, że z jednej strony kształt krzywych rozkładu zmienia się inaczej z czasem, niż wynika to z równania (2.8), a z drugiej strony liczba całkowita  $N$  zmniejsza się z czasem. Zakładając, że na kształt krzywych rozkładu wpływa także liczba istniejących jonów  $N$ , wtedy równanie (2.8) należy uważać za rozwiązanie równania (2.6), gdy  $N$  będzie określone jako funkcja czasu.

Zakładając zatem, że równanie (2.8) jest rozwiązaniem równania (2.6), gdy  $N$  zmienia się tylko z czasem. Aby tę funkcję właściwie wyznaczyć podstawmy (2.8) do (2.6) otrzymamy równanie:

$$\frac{dN}{dt} = - \frac{\alpha N^2}{2\pi(4Dt + b^2)} \quad (2.10)$$

Po scałkowaniu równania (2.10) otrzyma się:

$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{\alpha N_0}{8\pi D} \ln\left(\frac{4Dt + b^2}{b^2}\right)} \quad (2.11)$$

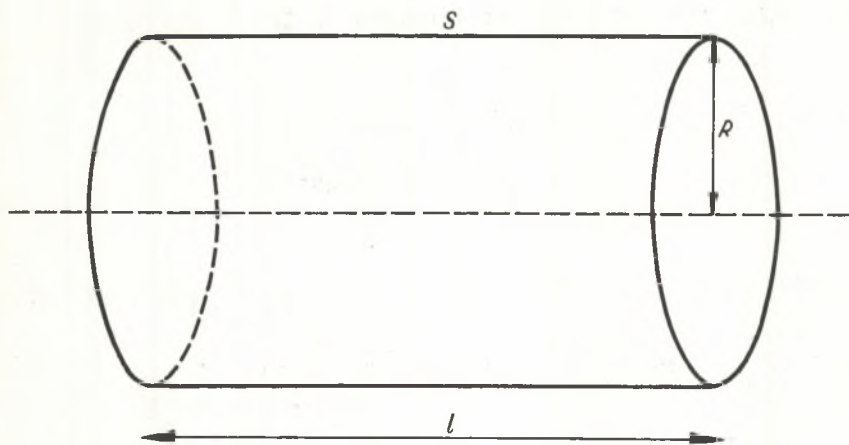
Po podstawieniu (2.11) do równania (2.8) ostatecznie otrzyma się:

$$n = \frac{N_0}{1 + \frac{\alpha N_0}{8\pi D} \ln\left(\frac{4Dt + b^2}{b^2}\right)} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{r^2}{4Dt + b^2}\right)}{\pi(4Dt + b^2)} \quad (2.12)$$

Dyfuzja spowoduje wyrównanie początkowo istniejących niejednorodności w rozkładzie jonów, które można uważać za zakończone, gdy nastąpi zetknięcie danej kolumny z sąsiednimi. O ile wtedy jeszcze znajduje się w kolumnie część początkowo

istniejących jonów, to można powiedzieć, że ta część "uchodzi" w kolumnie rekombinacji przez dyfuzję. Te uciekające jony podlegają jeszcze normalnej rekombinacji tzn. że dla każdego z tych jonów jest jednakowo prawdopodobne, że połączy się on z jonem innego znaku, który pochodzi z innej kolumny jak i z tym, który pochodzi z tej samej kolumny. Moulin [12] pokazał jak można z badań przeprowadzonych dla gazów wyznaczyć w przybliżeniu liczbę jonów uchodzących.

Dla cieczy obliczenia są dokładniejsze chociaż w przypadku jonizacji przez promieniowanie  $\alpha$  tylko około  $\frac{1}{1000}$  początkowo istniejących jonów ucieka z niej. Aby wyniki te można było porównać z doświadczeniem, należy dokładnie sprecyzować co się rozumie przez jon uchodzący. W tym celu należy sobie wyobrazić, że każda kolumna jest otoczona walcem współosiowym o promieniu  $R$  rys. 4, przy czym  $R$  będzie porównywalne z średnią odległością dwóch kolumn.



Rys. 4. Walec współosiowy otaczający kolumnę

Każdy jon, który przez powierzchnię  $S$  wyjdzie na zewnątrz należy uważać za "uchodzący". Całkowita liczba jonów, które uszły z kolumny nazywa się "stratą dyfuzyjną" tej kolumny.

Liczba jonów dyfundujących przez powierzchnię  $S$  w czasie będzie równa:

$$\Delta N_1 = -S \frac{\Delta n}{\Delta r} \cdot D \cdot \Delta t \quad (2.13)$$

zatem

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = -DS \left( \frac{\partial n}{\partial r} \right)_R \quad (2.14)$$

$$N_1 = - \int_0^{\infty} DS \left( \frac{\partial n}{\partial r} \right)_R dt \quad (2.15)$$

ponieważ

$$S = 2\pi R, \quad (h = 1)$$

to

$$N_1 = - \int_0^{\infty} 2\pi R D \left( \frac{\partial n}{\partial r} \right)_R dt \quad (2.16)$$

Podstawiając do (2.16) równanie (2.8) jest:

$$N_1 = 4R^2 D \int_0^{\infty} \frac{N_t}{(4Dt + b^2)^2} \exp\left(-\frac{R^2}{4Dt + b^2}\right) dt \quad (2.17)$$

Wprowadzając zmienne:

$$\xi = \frac{R^2}{4Dt + b^2}, \quad \xi_0 = \frac{R^2}{b^2} \quad (2.18)$$

równanie (2.17) przybierze postać:

$$N_1 = - \int_{\xi_0}^0 N + \exp(-\xi) d\xi \quad (2.19)$$

Uwzględniając równanie (2.11) będzie:

$$\frac{N_1}{N_0} = - \int_{\xi_0}^0 \frac{\exp(-\xi) d\xi}{1 + \frac{cN_0}{8\pi D} \ln \frac{\xi_0}{\xi}} \quad (2.20)$$

Najdogodniej całkę (2.20) można znaleźć stosując całkowanie geometryczne. W tabeli I przytoczono dane wynikające z obserwacji, doświadczalnych oraz obliczone na podstawie wzoru (2.20),

przy założeniu  $\xi_0 = \frac{R^2}{b^2} = 550$ , którą to wartość znaleziono doświadczalnie.

Tablica I

Rodzaj środowiska	$N_1/N_0$	
	wartość doświadczalna	wartość teoretyczna
t/2	1,0	0,97
powietrze	0,65	0,62
CO <sub>2</sub>	0,43	0,39
CS <sub>2</sub>	1,30 · 10 <sup>-3</sup>	1,43 · 10 <sup>-3</sup>
hexan	1,10 · 10 <sup>-3</sup>	1,11 · 10 <sup>-3</sup>
CCl <sub>4</sub>	1,04 · 10 <sup>-3</sup>	1,05 · 10 <sup>-3</sup>

Z powyższej tablicy jest widoczna bardzo dobra zgodność wartości doświadczalnych z teoretycznymi zarówno dla cieczy jak i dla gazów.

Należy zaznaczyć, że dla cieczy  $\frac{\alpha N_0}{8\pi D} > 100$  i dlatego wartość 1 w porównaniu z  $\frac{\alpha N_0}{8\pi D}$  w całce (2.20) można zaniedbać, zatem otrzymuje się równanie:

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{8\pi D}{\alpha N_0} \int_0^{\xi_0} \frac{\exp(-\xi) d\xi}{\ln \frac{\xi_0}{\xi}} = \frac{8\pi D}{\alpha N_0} \cdot C \quad (2.21)$$

gdzie: C oznacza wartość stałą, która dla  $\xi_0 = 550$  wynosi  $C = 0,150$ .

### 1. Stopień przybliżenia otrzymanego rozwiązania

Aby wzór (2.20) można było porównać z doświadczeniem, należy ocenić stopień przybliżenia jaki jest możliwy do osiągnięcia przy wybranym rozwiązaniu równania (2.6).

Różniczkując rozwiązanie (2.12) łatwo znaleźć, że spełnia ono następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} \right) - \alpha \frac{e^{-\frac{r^2}{4Dt + b^2}}}{2} n^2 \quad (3.1)$$

Przedłożone równanie można interpretować następująco: proces dyfuzji zachodzi według normalnego prawa i również rekombinacja jest proporcjonalna do  $n^2$ , lecz współczynnik rekombinacji  $\beta = \frac{1}{2} \alpha \exp \left( -\frac{r^2}{4Dt + b^2} \right)$  nie jest stały. W każdej chwili jest on wewnątrz pewnego koła mniejszy od  $\alpha$  a poza tym kołem większy niż  $\alpha$ .

Promień tego koła daje się określić z równania  $\exp\left(\frac{r^2}{4Dt+b^2}\right) = 2$ . Przeciętnie zmienny współczynnik rekombinacji  $\beta$  zgadza się z  $\alpha$ .

Ze sposobu otrzymania rozwiązania (2.12) wynika, że całkowita strata rekombinacyjna w całej kolumnie będzie dobrze odana przez równanie (3.1).

Łatwo jest sprawdzić, gdy podstawimy rozwiązanie (2.12) do ostatniego członu równania (2.6) lub (3.1) i następnie scałkuje po całej kolumnie. Można tutaj otrzymać wartość liczbowej granicy dla błędu przy obliczaniu straty dyfuzyjnej, gdy to obliczenie przeprowadzi się raz na podstawie równania (2.6) potem na podstawie równania (3.1).

Całkując (2.6) po cylindrze o wysokości 1 od 0 do R i następnie całkując według czasu od 0 do  $\infty$ , to można otrzymać przy zastosowaniu prawa Gaussa na stratę dyfuzyjną wyrażenie:

$$R_1 = -\int_0^{\infty} D 2\pi \left(\frac{\partial n}{\partial r}\right)_R dt = \int_0^R [n]_0^{\infty} 2r\pi dr - \int_0^{\infty} dt \int_0^R \alpha n^2 2r\pi dr \quad (3.2)$$

analogicznie z (3.1)

$$R_2 = -\int_0^{\infty} D 2R\pi \left(\frac{\partial n}{\partial r}\right)_R dt = \int_0^R [n]_0^{\infty} 2r\pi dr - \int_0^{\infty} dt \int_0^R \alpha n^2 \frac{e^{-\frac{r^2}{4Dt+b^2}}}{2} 2r\pi dr \quad (3.3)$$

Podstawiając do obu tych równań rozwiązanie (2.12), następnie całkując według  $r$  potem według  $t$  oraz wprowadzając zmienne (2.18) to z (3.2) wynika

$$R_1 = N_0 \left( e^{-\frac{2R^2}{b^2}} - e^{-\frac{R^2}{b^2}} \right) - \int_{\xi_0}^0 \frac{N_0 e^{-\xi}}{\frac{\alpha N_0}{8\pi D} \lg \frac{\xi_0}{\xi}} d\xi \quad (3.4)$$

analogicznie z (3.3)

$$R_2 = - \int_{\xi_0}^0 \frac{N_0 e^{-\xi}}{\frac{\alpha N_0}{8\pi D} \lg \frac{\xi_0}{\xi}} d\xi \quad (3.5)$$

Wyrażenie na  $R_2$  zgadza się z wyrażeniem (2.20) otrzymanym bezpośrednio z (2.12). Wartość (3.4) otrzymana z równania różniczkowego (2.6) jest nieco różna od wartości (2.20). Gdyby (2.12) było ścisłym rozwiązaniem równania (2.6) to otrzymana bezpośrednio wartość (2.12) byłaby identyczna z wartością (3.4). Różnica pomiędzy (3.4) i (2.20) określa zatem wartość osiąganego błędu.

Z otrzymanych wartości liczbowych wynika, że dla rozpatrywanego zakresu ( $\xi_0$  zawarte między 500 i 1000) wyrażenia (3.4) i (3.5) nieznacznie tylko różnią się tylko od siebie.

Dla gazów (gdzie  $\frac{\alpha N_0}{8\pi D}$  jest małe) odchylenie wynosi tylko 1-2%.

W przypadku cieczy ( $\frac{\alpha N_0}{8\pi D} > 100$ ) odchylenie jest większe, wynosi około 6-8%, ale należy w tym przypadku mieć na uwadze że strata dyfuzyjna wynosi około  $\frac{1}{1000}$  straty rekombinacyjnej.

Im większe  $\xi_0$  to znaczy im większa średnica cylindra  $C$  w porównaniu z początkową średnicą kolumny, tym mniejsza będzie

różnica między wyrażeniami (3.4) i (3.5). Dla rzeczywistych stosunków rozpatrywanych wielkości błąd nie powinien przekroczyć wspomnianych wartości granicznych.

Z podanych wartości liczbowych w tabelicy I wynika bardzo dobra zgodność teorii z doświadczeniem, jednak nie może być ona uważana za potwierdzenie przedłożonej hipotezy. Liczba jonów, które uniknęły rekombinacji na skutek dyfuzji jest oczywiście pewną fikcją, gdyż przy jednakowej prędkości obu rodzajów jonów oraz przy braku pola elektrycznego ostatecznie żadne jony nie unikną rekombinacji, w tym kryje się także niepewność założenia  $\xi_0 = \text{const.}$

#### 4. Rozważania matematyczne

Ze względu na nieznaczną rolę dyfuzji jaka ma miejsce w przypadku jonizacji kolumnowej można założyć, że współczynnik dyfuzji jonów obu znaków jest w przybliżeniu równy zero. Założenie to pociąga za sobą inną postać wzoru określającego rozkład jonów wokół osi kolumny, w tym przypadku wzór (2.8) przyjmie postać:

$$n_c = \frac{N}{\pi b^2} \exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right) \quad (4.1)$$

Jak widoczne jest rozkład ten niezależny jest od czasu, którego średnia odległość dana jest przez wyrażenie

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{\pi b^2}{4}} = \frac{b}{2} \sqrt{\pi} \quad (4.2)$$

Podstawiając do równania (4.1)  $b = 0$  to wtedy widać, że liczba jonów  $N$  zachowuje swoją wartość, a natomiast  $n_c$  będzie wszędzie równe zero, oprócz wartości  $r = 0$ , w tym przypadku  $n_c$  będzie reprezentowało nieskończoną gęstość objętościową. Jest to zatem przypadek idealny, że wszystkie jony będą dokładnie matematycznie rozmieszczone na osi kolumny.



Ponieważ w rzeczywistości  $b \neq 0$ , zatem  $n_c$  będzie wartością skończoną.

Równanie (4.1) pokazuje więc jak zmienia się kolumna w zależności od odległości  $r$  bez uwzględnienia zjawiska rekombinacji. Analogicznie jak poprzednio można wyznaczyć zależność gęstości  $N$  od czasu. Z równania (2.10) wynika, że równanie różniczkowe dla  $N$  ma postać:

$$\frac{dN}{dt} = - \frac{\alpha N^2}{2\pi b^2} \quad (4.3)$$

Rozwiązując to równanie metodą zmiennych rozdzielonych otrzymamy

$$N_t = \frac{N_0}{1 - \frac{\alpha N_0}{2\pi b^2} \cdot t} \quad (4.4)$$

Zatem rzeczywisty kształt krzywych rozkładu przy uwzględnieniu zjawiska rekombinacji można już łatwo otrzymać, gdy podstawimy się równanie (4.4) do wyrażenia (4.1). Ostatecznie więc

$$n_{\alpha} = \frac{N_0}{1 - \frac{\alpha N_0}{2\pi b^2} t} \frac{\exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right)}{\pi b^2} \quad (4.5)$$

Jak widoczne jest liczba jonów zmniejsza się w tym wypadku szybciej z czasem niż wynika to z wyrażenia (2.12). Ze względu na to, że w kolumnie istnieją jony obu znaków więc wydaje się oczywistym założenie dotyczące istotnej roli sił typu kulombowskiego, działających między poszczególnymi jonami. Można zatem nie uwzględniając dyfuzji rozpatrywać tylko wpływ sił kulombowskich, które powodują nieznaczne rozszerzenie kolumny a co się z tym wiąże ograniczają wpływ rekombinacji.

W związku z tym autor zakłada, że siły tego typu spowodują wyrównanie początkowo istniejących niejednorodności w uporządkowaniu jonów, które można będzie uważać za skończone, gdy kolumna zetknie się z sąsiednimi otaczającymi ją kolumnami. "Zastratę" kulombowską można by w tym przypadku uważać jony, które zostaną usunięte z kolumny na skutek działania sił typu kulombowskiego. W przypadku słuszności tych założeń można by uważać, że w przybliżeniu stosunek jonów uchodzących do powstałych wewnątrz kolumny powinien być określony w myśl wzoru (2.19) równaniem:

$$N_1 = - \int_{\xi_0}^0 \frac{N_0 e^{-\xi} d\xi}{1 - \frac{\alpha N_0}{2\pi b^2} t} \quad (4.6)$$

zatem

$$\frac{N_1}{N_0} = - \int_{\xi_0}^0 \frac{e^{-\xi} d\xi}{1 - \frac{\alpha N_0}{2\pi b^2} t} \quad (4.7)$$

Po wykonaniu całkowania

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha N_0}{2\pi b^2} t} \left( 1 - e^{-\frac{R^2}{b^2}} \right) \quad (4.8)$$

Również można także teraz założyć analogicznie jak w przypadku równania (2.12) że wyrażenie (4.5) spełnia następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\beta n^2 \quad (4.9)$$

gdzie:

$$\beta = \alpha \frac{\exp\left(\frac{r^2}{b^2}\right)}{2}$$

Jak jest widoczne rekombinacja jest proporcjonalna do  $n^2$ , lecz współczynnik rekombinacji nie jest stały, w każdej chwili zawarty on jest wewnątrz pewnego koła którego promień określa równanie

$$r = b \sqrt{\ln 2} \quad (4.10)$$

W tym przypadku również można obliczyć wartość liczbową błędu granicznego przy obliczaniu straty kulombowskiej, gdy obliczenie to przeprowadzi się raz na podstawie równania (2.6) a następnie na podstawie równania (4.9). W oparciu o wyrażenie (3.4) będzie:

$$\Delta R_1 = N_0 \left[ \exp\left(-\frac{2R}{b^2}\right) - \exp\left(-\frac{R}{b^2}\right) \right] - \int_{\frac{R}{2}}^0 \frac{N_0 e^{-\xi}}{1 - \frac{\alpha N_0}{2\pi b^2} t} d\xi$$

Po wykonaniu całkowania

$$\Delta R_1 = N_0 \left[ \exp\left(-\frac{2R}{b^2}\right) - \exp\left(-\frac{R}{b^2}\right) \right] - \frac{N_0}{1 - \frac{\alpha N_0}{2\pi b^2}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2R}{b^2}\right) \right] \quad (4.11)$$

W oparciu o wzór (3.5) można będzie napisać

$$\Delta R_2 = - \int_{\xi_0}^0 \frac{N_0 \exp(-\xi) d\xi}{1 - \frac{\alpha N_0}{2\pi b^2} t}$$

$$\Delta R_2 = \frac{N_0}{1 - \frac{\alpha N_0}{2\pi b^2} t} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{R^2}{b^2}\right) \right] \quad (4.12)$$

Wyrażenie (4.12) zgadza się z wyrażeniem (4.8). Wartość (4.11) jest nieco różna od (4.8). Różnica pomiędzy wartościami (4.11) oraz (4.8) jest miarą jaką może osiągnąć błąd. W przybliżeniu za graniczną wartość błędu można uważać wyrażenie

$$\Delta B = N_0 \left[ \exp\left(-\frac{2R}{b^2}\right) - \exp\left(-\frac{R^2}{b^2}\right) \right] \quad (4.13)$$

Widoczne jest, że otrzymane zależności różnią się znacznie od wyrażeń otrzymanych przez G. Jaffego, jednak nie są one oparte na nowym równaniu różniczkowym, które by opisywało właściwie rozpatrywane zjawiska i dla tego należy do nich podchodzić z dużą tolerancją.

## 5. Uwagi ogólne

Należy podkreślić, że otrzymane wzory są oparte na ogólnej teorii podanej przez G. Jaffego dotyczącej jonizacji kolumnowej. Autor podkreślił w podanych rozważaniach możliwość występowania sił typu kulombowskiego, podczas zaniedbania dyfuzji jonów. Jednak nie zostały tutaj uwzględnione podstawowe założenia wpływające z przyjętej hipotezy. Ze względu na to wyrażenie (4.8) a także równania (4.11) i (4.12) określające gra-

niczną wartość błędu zostały określone dosyć intuicyjnie w oparciu o rozwiązanie podane przez G. Jaffego.

Chcąc ściśle podkreślić rolę sił kulombowskich należałoby wprowadzić nowe założenia, które by dotyczyły ruchu jonów w ich własnym polu elektrycznym. Z tym wiąże się podanie nowego równania różniczkowego, które uwzględniałoby dwa zasadnicze zjawiska tzn. zjawisko rekombinacji oraz zjawisko ruchu jonów pod działaniem sił typu kulombowskiego. Wydaje się być bardzo interesujące przeprowadzenie analogicznych rozważań dotyczących teorii jonizacji w kolumnach w przypadku działania stałego pola elektrycznego odpowiednio skierowanego do osi kolumny.

Maszynopis złożono w Redakcji dnia 18.II.1966 r.

#### LITERATURA

- [1] Adamczewski I.: Zeszyty Naukowe P.G.Ch. 1.25. 1955.
- [2] Skanawi G.: Fizyka dielektryków t. I Moskwa 1949 (po rosyjsku).
- [3] Zakrzewski T.: Postępy Fizyki Z. 2 1966 (w druku).
- [4] Jaffe G.: Annalen der Physik - 32. 148. 1910.
- [5] Adamczewski I.: Acta Phys. Pol. 3. 235. 1934.
- [6] Adamczewski I.: Ruchliwość i rekombinacja jonów w cieczach dielektrycznych - A.N.T. 1936 (praca doktorska).
- [7] Jaffe G.: Annalen der Physik - 42. 303. 1913.
- [8] Jaffe G.: Annalen der Physik - 1. 977. 1929.
- [9] Plumley H.I.: Phys. Rev. - 59. 200. 1941.
- [10] Langeven P.: Annales de Chimie et de Physique. 28. 243. 1903.

- [11] Adamczewski I.: Acta Phys. Pol. 8. 31 i 8.45. 1939.  
[12] Moulin M.: Ann. de Chim. et Phys. 21. 550. 1910.

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕОРИИ ИОНИЗАЦИИ В КОЛОНКАХ

### Р е з ю м е

Автор опираясь на теорию Иоффе провёл математические исследования теории ионизации в колонках. При этом обратил внимание на наличие сил кулоновского типа, а также указал возможность построения новых уровней учитывающих роль электрических сил в диэлектрических жидкостях.

## MATHEMATISCHEN BETRACHTUNGEN ÜBER DIE IONISATION IN KOLONNEN

### Z u s a m m e n f a s s u n g

Nach einer eingehenden Besprechung der Theorie von Jaffe, besonders ihrer Übereinstimmung mit dem Experiment, wird danach der Ionisationsvorgang in Kolonnen mathematisch untersucht. Die Diffusionserscheinungen ausser Acht lassend, werden für die Ionendichte während der Ionisation, Formeln von neuer Gestalt abgeleitet. Die Voraussetzungen hinsichtlich der Wirkungen von Coulomb-Kräfte werden diskutiert.