ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 11 Nr kol. 172

JULIAN BORY

MNOŻENIE I DZIELENIE NA SUWAKU Z DOKŁADNOŚCIĄ DO 6 MIEJSC

W [1] i [2] podałem sposób dokładniejszego podnoszenia do kwadratu i pierwiastkowania na normalnym 25 centymetrowym suwaku. W uzupełnieniu powyższych prac podaję obecnie równie prostą metodę pozwalającą doryvczo pomnożyć lub podzielić przez siebie dwie liczby a i b z dokładnością do 6 miejsc, zamiast 3-4 miejsc osiąganych normalnie na suwaku.

M n o ż e n i e

Mamy pomnożyć przez siebie dwie liczby a i b, 4-7-cyfrowe (ściślej: mające 4-7 cyfr "z n a c z ą c y c h", tj. liczonych od pierwszego miejsca różnego od zera).

W tym celu w liczbie a przesuwamy przecinek - oznaczając przesunięty przecinek w odróżnieniu od właściwego [1] znakiem ˅, tak żeby podzielić tę liczbę na dwie części:

1) Część całkowitą A, dwucyfrową (przy mniejszej wymaganej dokładności jednocyfrową), a dla liczb zaczynających się od jedynki [2] trzycyfrową,

2) Resztę $\alpha < 1$, mającą 3-4 cyfry znaczące, zależnie od tego, ile możemy odczytać na 25-centymetrowym suwaku - a więc zależnie od tego, czy pierwsza cyfra znacząca tej reszty jest 1, 2, 3, czy 4-9.

[1] Którego położenie uwzględniamy w wyniku.

[2] Wyjątkowo większych - patrz przykład 3.

Zatem z a m i a s t liczby 0,07234865 napiszemy:

$$a = 72\check{3}487 = 72 + \check{0}3487 = A + \alpha^{1)}$$

względnie przy mniejszej dokładności:

$$a = 7\check{2}349 = 7 + \check{0}2349$$

zamiast zaś liczby 1723,4865 napiszemy:

$$a = 172\check{3}487 = 172 + \check{0}3487$$

Przy tym gdy reszta α wypada większa niż 0,6, to piszemy:

$$a = A + \alpha = (A + 1) - (1 - \alpha) \qquad (1)$$

i kładąc

$$A + 1 = A'; \; 1 - \alpha = \alpha' < 0{,}4 \qquad (2)$$

dostajemy:

$$a = A' - \alpha' \qquad (3)$$

gdzie część całkowita A' jest o 1 większa od A, zaś reszta $\alpha' < 0{,}4$ da się odczytać na suwaku c z t e r o c y f r o w o.

Np. zamiast 0,08860823 piszemy

$$a = 88\check{6}082 = \left(\begin{array}{l} 89\check{\ } \\ \quad -3918 \end{array}\right) = 89 - \check{0}3918 = A' - \alpha'$$

W rezultacie więc, tylko reszty leżące między 0,4 a 0,6 będą uwzględniane trzycyfrowo, zaś wynoszące do 0,4 i p o n a d 0,6 czterocyfrowo.

---

1) W liczbie 0,07234865 odcięto ostatnią cyfrę 5, której nie możemy uwzględnić, znakiem ⌞.

Podobnie rozbijamy liczbę b:

$$b = B + \beta, \quad \text{gdy } \beta \leq 0{,}6,$$

względnie

$$b = (B + 1) - (1 - \beta) = B' - \beta',$$

gdy $\beta > 0{,}6$, zatem $\beta' < 0{,}4$

Zakładamy przy tym, że liczby a i b są dane z tym samym (w przybliżeniu) błędem względnym δ. Według teorii błędów jest wtedy dla liczenia na suwaku [1]

$$a(1 \pm \delta) \cdot b(1 \pm \delta) \approx ab(1 \pm \sqrt{3} \cdot \delta)$$

tak że w wyniku da się odczytać t a s a m a i l o ś ć c y f r co w obu czynnikach, z nieco większym prawdopodobnym błędem względnym[2].

Iloczyn ab będzie równy:

$$ab = (A + \alpha)(B + \beta) = A(B + \beta) + \alpha(B + \beta) =$$

$$= AB + A\beta + \alpha \cdot b \tag{4}$$

względnie:

$$(A' - \alpha')(B + \beta) = A'B + A'\beta - \alpha' \cdot b \tag{4a}$$

---

[1] Patrz str.112.

[2] Podamy dalej dokładnie bezwzględny błąd wyniku przy naszym sposobie liczenia.

$$(A+\alpha)(B'-\beta') = AB' - A\beta' + \alpha . b = (B'A + b.\alpha) - A\beta^{1)} \qquad (4b)$$

$$(A'-\alpha')(B'-\beta') = A'B' - A'\beta' - \alpha' . b \qquad (4c)$$

Liczby całe A i B mnożymy przez siebie n a s u w a k u d o k ł a d n i e, w sposób który podamy dalej. Dwa pozostałe mnożenia ($AB + \alpha b$) wykonujemy z dokładnością suwaka.

Wobec tego, że liczby całe A i B mają po 1-3 cyfr, b ma tyleż cyfr przed przecinkiem, zaś α i β są mniejsze niż 0,6 względnie α' i β' mniejsze niż 0,4, otrzymujemy zwiększenie dokładności w przybliżeniu o ilość cyfr A i B.

Iloczyn liczb całych A i B

Liczby całe A i B możemy przez siebie pomnożyć na suwaku dokładnie, jak długo ich iloczyn nie przekracza 4000[2]. Wypada on wtedy w tej części suwaka, w której da się go odczytać czterocyfrowo - przy sprawdzeniu w razie potrzeby iloczynu ostatnich cyfr. Np.:

$$97 . 41 = 3977, \quad \text{bo } 7 . 1 = 7$$

$$173 . 18 = 3114^{3)} \quad \text{bo } 3 . 8 = 24$$

---

1) Tj. obliczamy najpierw oba iloczyny d o d a t n i e i sumujemy je, potem bierzemy iloczyn ujemny. W iloczynach dodatnich nastawiamy najpierw na suwaku wartości B' względnie b - jako zbliżone do siebie, potem A względnie α. Patrz przykład 3.

2) Oczywiście tylko w razie umiejętności p r e c y z y j n e g o a przy tym p e w n e g o posługiwania się suwakiem. W podręczniku [2] podałem przy końcu rozdziału 5 i 7 jak można przy szybkim nastawianiu r z e c z y w i ś c i e osiągnąć dokładność 1‰ względnie błąd ±0,5‰.

3) Patrz przykład 5 - przyjęto tam $A \approx 10\,B$ ze względu na małe β.

Gdy iloczyn AB jest większy niż 4000, to przy dwucyfrowym B mnożymy A przez każdą cyfrę B oddzielnie. Np.:

$$64 \cdot 78 = \left\{\begin{array}{l} 448 \\ \underline{\ \ 512} \\ 4992 \end{array}\right. \qquad 173 \cdot 87 = \left\{\begin{array}{l} 1384 \\ \underline{\ \ 1211} \\ 15051 \end{array}\right.$$

I podobnie, gdy trzycyfrowe B ma pośrodku zero:

$$173 \cdot 807 = \left\{\begin{array}{l} 1384.. \\ \underline{\ \ \ \ \ 1211} \\ 139611 \end{array}\right.$$

Przez liczbę leżącą między 90 a 100 mnożymy w następujący sposób:

$$93 \cdot 78 = \begin{pmatrix} 100 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot 78 = \left\{\begin{array}{l} 78.. \\ \underline{-546} \\ 7254 \end{array}\right.$$

$$184 \cdot 93 = 184 \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ -7 \end{pmatrix} = \left\{\begin{array}{l} 184.. \\ \underline{-1288} \\ 17112 \end{array}\right. \quad (4 \cdot 7 = 28)$$

Jeżeli obie liczby A i B są trzycyfrowe mniejsze niż 200, wykonamy mnożenie najlepiej w następujący sposób:

$$173 \cdot 18\underset{\wedge}{7} = \left\{\begin{array}{l} 3114 \\ \underline{\ \ 1211} \\ 32351 \end{array}\right. \quad (8.3 = 24)$$

albo

$$173 \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ -13 \end{pmatrix} = \left\{\begin{array}{l} 346.. \\ \underline{-2249} \\ 32351 \end{array}\right. (3 \cdot 3 = 9)$$

Prawdopodobny średni błąd sumy iloczynów $A\beta + \alpha b$

Błąd pojedynczego n a s t a w i e n i a na suwaku przyjmujemy 0,5‰[1]. Przy wykonaniu jednego m n o ż e n i a (lub dzielenia) mamy dwa nastawienia plus odczyt, zatem t r z y nastawienia.

Zatem prawdopodobny błąd jest według teorii błędów $\sqrt{3}$ razy większy, wynosi więc $\pm\sqrt{3} \cdot 0{,}5‰ = \pm 0{,}9‰$ wartości odczytu. Odnosi się to także do iloczynu $A\beta$ gdy obliczamy go na suwaku, gdyż nastawiamy tak A jak β w przybliżeniu.

Prawdopodobny błąd s u m y dwóch mnożeń $I_1 + I_2$ jest

$$0{,}9‰ \cdot \sqrt{I_1^2 + I_2^2} \tag{5}$$

Możemy od razu z góry ocenić błąd iloczynu dwóch liczb ab liczonego naszym sposobem, w następujący sposób:

$$\begin{array}{l} A \quad \alpha \quad B \quad \beta \\ 8.,5.. \times 2..,6.. = \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} (AB) & 16... \\ (A\beta) & \quad 48,. \\ (\alpha b) & \quad\; \underline{1....} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 16...,. \\ \pm 1 \end{array}$$

$$\text{Błąd sumy} = 0{,}9‰ \cdot \sqrt{100^2 + 48^2} = 0{,}9‰ \cdot 111 \approx 0{,}1$$

Zatem w wyniku powyższego mnożenia odczytamy 6 miejsc z błędem ± 1 na ostatnim miejscu.

Zapytajmy jeszcze, jaki będzie błąd iloczynu ab, jeżeli reszty α i β będą dane z m n i e j s z ą dokładnością niż można odczytać na suwaku. Liczby a i b są wtedy dane z

---

[1] Patrz [2] str.37-38.

małą ilością cyfr, a chcemy wiedzieć, z jaką maksymalną dokładnością można je pomnożyć przez siebie.

W takim przypadku błędy bezwzględne reszt α i β są równe ± 5 za ich ostatnimi cyframi. Błąd całkowity obliczenia będzie

$$\sqrt{(A.\Delta\beta)^2 + (b.\Delta\alpha)^2}$$

Zastępowanie reszt α i β większych niż 0,6 przez $1-\alpha'$ względnie $1-\beta'$ jest tu zbędne. Patrz przykłady 6-7 i 9.

Mnożenie liczby wielocyfrowej a przez liczbę całą B

Często jest potrzebne mnożenie liczby dowolnie wielocyfrowej a przez liczbę jednocyfrową B. Między innymi stosowałem je w pracy [1], metodą niezbyt wygodną. Obecna jest znacznie lepsza.

Rozbijamy mianowicie a na części A_i takie, żeby iloczyny A_iB wypadły mniejsze niż 4000. Nadto przesuwamy przecinek w liczbie a tak, żeby otrzymać na końcu resztę $\alpha < 1$. Zatem:

$$aB = (A_1 + A_2 + A_3 + \alpha)\,B = A_1B + A_2B + A_3B + \alpha B \qquad (6)$$

Kolejne iloczyny A_iB wypisujemy pod poprzednimi lub - jeśli jest miejsce - nad poprzednimi. Patrz przykłady 10-11 i 13-15.

Przy B równym 4 lub 6, 7, 8, 9 mamy dziesiątkę języka suwaka stale nastawioną na jedną z tych cyfr - patrz przykłady 10 i 11. Jak uniknąć przesuwania języka - pokazuje przykład 11.

Przez 2 i 3 mnożymy nie na suwaku, lecz w pamięci. Zamiast mnożyć przez 5, przesuwamy przecinek o jedno miejsce w prawo i dzielimy w pamięci przez 2.

Dalej:

$2{,}5 = 10 \cdot \frac{1}{4}$ (dzielimy przy pomocy suwaka - patrz dzielenie przez liczbę całą)

Wreszcie dwie liczby trzycyfrowe:

$125 = 1000 \cdot \frac{1}{8}$, $875 = 1000(1 - \frac{1}{8})$ (patrz przykład 12)

Także przez d w u c y f r o w e B możemy czasem mnożyć metodą podaną w równ. (6).

Przede wszystkim chcemy się w rachunku posuwać z reguły o 2-3 cyfry. Żeby A_iB było mniejsze od 4000 przy k a ż d y m d w u c y f r o w y m A_i, musi być $\underline{B < 40}$. Gdy $B = 50$, to przy $A_i > 80$ iloczyn A_iB byłby większy niż 4000, zatem za każdym razem gdy w liczbie a będą występowały cyfry 8 lub 9, będziemy mogli brać A_i tylko jednocyfrowe. Ostatecznie jako górną granicę można przyjąć $\underline{B = 50}$.

Dalej: Gdy B wynosi od 23 do 49, to na te liczby nastawiamy dziesiątkę języka. Żeby uniknąć przesuwanie języka, mnożymy 23 przez 1 do 3 w pamięci, zaś 49 tylko przez 1 (uwzględniając przedłużenie skal przed jedynkę).

Gdy zaś B wynosi od 11 do 14, to na te liczby nastawiamy j e d y n k ę języka. Żeby uniknąć przesuwanie języka, mnożymy 14 przez 8 w pamięci (uwzględniając przedłużenie skal za dziesiątkę i przed jedynkę). 11 zaś da się pomnożyć nawet przez 99 na suwaku. Przy tym aż do $A_iB = 4000$ bierzemy A trzycyfrowe, ponad 4000 dwucyfrowe.

Gdy $B = 16$ do 22, to mnożymy a przez każdą cyfrę B oddzielnie.

Patrz przykłady 13-15.

<u>Przykłady mnożenia liczb a i b</u>

1) $97\check{3}826 \cdot 21\check{1}258 \left[= (A + \alpha)(B + \beta)\right] \approx 2058$
± 2 (możliwy błąd przy mnożeniu na suwaku = 0,9‰ z 2058)

$$\left(\begin{array}{l} 97 \;.\; 21 = \\ 97 \;.\; 0{,}1258 = \\ 0{,}3826 \;.\; 21{,}13 = \end{array}\right) \begin{array}{r} 2037 \\ \left.\begin{array}{r} 12{,}20 \\ \underline{8{,}08} \end{array}\right\} \\ 2057{,}28 \\ \pm 1 \end{array}$$

Błąd: 0,9‰ z $\sqrt{12{,}20^2 + 8{,}08^2}$ tj. z 14,6 wynosi 0,013, czyli $\approx \pm 1$ na drugim miejscu za przecinkiem

Oczywiście można się obejść bez wypisywania czynników po lewej stronie, dlatego wzięte zostały w nawiasy.

2) Powyższy przykład liczony z m n i e j s z ą d o k ł a d n o ś c i ą:

$$\check{9}73826 \;.\; \check{2}1125\underline{8}\ (\approx 20{,}58)_{\pm 2} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2617 \end{pmatrix} \;.\; \check{2}1126\ \left[= (A'-\alpha')(B+\beta)\right]$$

$$\left(\begin{array}{l} 10 \;.\; 2 = \\ 10 \;.\; 0{,}1126 = \\ -\,0{,}2617 \;.\; 2{,}113 = \end{array}\right) \begin{array}{r} 20 \\ \left.\begin{array}{r} 1{,}126 \\ \underline{-\,0{,}553} \end{array}\right\} \\ 20{,}573 \\ \pm 11 \end{array}$$

Błąd: 0,9‰ z $\sqrt{1{,}126^2 + 0{,}553^2}$ tj. z 1,25 wynosi 0,0011.

Spróbujmy nie wprowadzać ujemnej reszty $-\alpha'$:

$$\left(\begin{array}{l} 9 \;.\; 2 = \\ 9 \;.\; 0{,}1126 = \\ 0{,}738 \;.\; 2{,}113 = \end{array}\right) \begin{array}{r} 18 \\ \left.\begin{array}{r} 1{,}013 \\ \underline{1{,}559} \end{array}\right\} \\ 20{,}572 \\ \pm 17 \end{array}$$

Błąd: 0,9 ‰ z 1,86 $\approx$ 0,0017

Gdybyśmy mogli odczytać αb tylko trzycyfrowo, tak jak poprzednio α'b, błąd wypadłby tu na drugim miejscu za przecinkiem.

3) $807\check{4}82 \cdot 403\check{7}257 = 807\check{4}82 \cdot 404\check{\ }$ ($\approx$326 000) $\left[= (A+\alpha)(B'-\beta')\right]$
(6 miejsc) (7 miejsc) $\quad -2743$

Korzystamy z możności dokładnego mnożenia trzycyfrowego A przez trzycyfrową B' mające w ś r o d k u z e r o, przy czym oba iloczyny częściowo są mniejsze od 4000.

Wobec ujemnego $-\beta'$ piszemy najpierw iloczyny dodatnie i ich sumę, potem iloczyn ujemny (patrz równ. 4b).

$$B'A = 404 \cdot 807 = \begin{cases} 3228 \\ \quad 3228 \end{cases}$$
$$b\alpha = 403{,}7 \cdot 0{,}482 = \quad 194{,}7 \quad \text{Błąd: } 0{,}9‰ \text{ z } \sqrt{194{,}7^2+221{,}4^2}$$
$$326222{,}7 \qquad \text{tj. z 294 wynosi 0,3}$$
$$-A\beta' = -807 \cdot 0{,}2743 = \quad -221{,}4$$
$$326001{,}3$$
$$\pm 3$$ (7 miejsc, ostatnia cyfra niepewna)

4) $172\check{7}483 \cdot 122\check{6}087$ ($\approx$ 21200) $= 173 \cdot 123 =$
$\qquad -2517 \quad -3913$

$\left[= (A'-\alpha')(B'-\beta')\right]$ (po 7 cyfr, obie liczby zaczynają się od jedynek).

$$\left(\begin{aligned} &173 \cdot 123 = \\ &-173 \cdot 0{,}3913 = \\ &-0{,}2517 \cdot 122{,}6 = \end{aligned}\right) \begin{cases} 2076 \\ \quad 519 \end{cases}$$
$$-\ 67{,}7\ldots \quad \text{Błąd } 0{,}9‰ \text{ z } 68 \approx 0{,}06$$
$$-\ 30{,}87 \quad \text{(6 cyfr dokładnych)}$$
$$21180{,}4$$
$$\pm 6$$

5) $172\check{7}483 \cdot 1\check{7}96087$ ($\approx$ 3102) $= 173 \cdot 18$
$\qquad -2517 \quad -03913$
(po 7 cyfr, obie liczby zaczynają się od jedynek).

Bierzemy tu "b" nie 180_{-3913}, lecz 18_{-03913}, zmniejszając w ten sposób B' i β' 10-krotnie. Wobec tego wszystkie iloczyny w $ab = A'B' - A'\beta' - \alpha' b$ maleją 10-krotnie i $A'B'$ jest mniejsze od 4000.

$$
\begin{array}{lr}
173 \cdot 18 = & 3114 \\
-173 \cdot 0{,}03913 = & -6{,}77 \\
-0{,}2517 \cdot 17{,}96 = & -4{,}52 \\
\hline
 & 3102{,}71 \\
 & \pm 7
\end{array}
$$

Błąd 0,9‰ z 8,1 ≈ 0,007 (6 cyfr)

6) $1\check{5}15 \cdot 40\check{7}3$ (≈ 617)
$\quad\pm 5 \qquad \pm 5$

Liczba a jest tu dana zaledwie z dokładnością z jaką ją można odczytać na suwaku, liczba b z dokładnością o jedną cyfrę większą. Pytamy z jaką maksymalną dokładnością można obliczyć iloczyn ab.

Nie mnożymy $\check{1}515 \cdot \check{4}073$, gdyż wtedy α byłoby za duże w stosunku do A i nie dostalibyśmy żadnej poprawy wyniku. Z drugiej strony (w myśl uwagi na str.5) nie potrzebujemy zastępować $40\check{7}3$ przez 41_{-27}.

$$
\begin{array}{rl}
AB = & 600 \\
A\beta = & 10{,}94 \\
A\cdot\Delta\beta = & \pm 8 \ (15 \cdot 0{,}005) \\
\alpha b = & 6{,}11 \\
\Delta\alpha\cdot b = & \pm 2 \ (0{,}005 \cdot 40{,}7) \\
\hline
 & 617{,}05 \approx 617{,}1 \\
 & \ \pm 2 \qquad\quad \pm 2
\end{array}
$$

Powyższy przekład jest wzięty z podręcznika Arnolda [3], który niesłusznie podaje 15,15 . 40,74 = 617,06.

7) $1\check{5}150 \;.\; 4\check{0}730 \;(\approx 617)$
± 5

$$\begin{array}{lrr}
AB & = & 600 \\
A\beta & = & 10{,}94 \\
\pm 0{,}9‰ \text{ z } 10{,}94 & = & \pm 1 \\
\alpha b & = & 6{,}11 \\
\Delta\alpha . b & = & \underline{\pm 2} \\
 & & 617{,}05 \\
 & & \pm 2
\end{array}$$

Zatem o b i e liczby a i b muszą być dane z dokładnością o jedno miejsce większą niż u Arnolda żeby móc napisać wynik 617,05.
± 2

8) $1\check{5}1500 \;.\; 4\check{0}730 \;(\approx 617) = 1\check{5}1500 \;.\; 41$
± 5 -270 ± 5

$$\begin{array}{lrr}
AB' & = & 615 \\
\alpha b & = & 6{,}11 \\
\pm 0{,}9‰ \text{ z } 6{,}11 & = & \pm 6 \\
A\beta' & = & -4{,}05 \\
A . \Delta\beta' & = & \underline{\pm 8} \\
 & & 617{,}06 \\
 & & \pm 40
\end{array}$$

Mając dane z pierwszej liczby 6 cyfr dokładnych zastępujemy drugą przez 41 -270 ± 5. Dostajemy wynik 617,06 ± 1.

Gdybyśmy mieli także z drugiej liczby 6 cyfr ($4\check{0}7300 = 41$ -2700), to błąd iloczynu $A\beta'$ liczonego na suwaku byłby $\pm 0{,}9$‰ z 4,05 tj. $\pm 0{,}004$. A ponieważ $\sqrt{6^2 + 4^2} \approx 7$, zatem wynik: 617,06 ± 7.

9) $4\check{3}72 \cdot 12\check{3}48$ (≈ 540)
$\pm 5 \quad \pm 5$

$AB = 516$

$A\beta = 14{,}97$

$A \cdot \Delta\beta = \pm 2$

$\alpha b = 8{,}89$

$\Delta\alpha \cdot b = \pm 6$

$539{,}86$
± 6

Przykłady mnożenia wielocyfrowego a przez całkowite $B < 50$

10) $\underbrace{497}_{A_1}\underbrace{64}_{A_2}\underbrace{\overset{\pm 5}{473}}_{\alpha} \cdot 8$ (≈ 3980) $= 3976\ \check{3}782$

$$\begin{array}{r} 3976\ \check{3}782 \\ 512 \\ \hline 398115782 \\ \pm 4 \end{array}$$

W wyniku przybliżonym piszemy tylko kolejne cyfry, nie oglądając się na przecinek.

± 5 jest w liczbie a możliwym błędem. Nastawiamy dziesiątkę języka stale na 8 linijki. $8 \cdot 497 = 3976 < 4000$. A_2 przyjmujemy 64, nie 643, bo $8 \cdot 643 > 4000$. Przed 473 dajemy przesunięty przecinek i mnożymy 8 przez $\check{0}473$, które ma trzy cyfry znaczące, dające się uwzględnić na suwaku. Błąd: $\pm 5 \cdot 8 = \pm 40$ na czwartym miejscu za przecinkiem, czyli ± 4 na trzecim.

11) $\underset{A_1}{11}\underset{A_2}{96}\underset{A_3}{12}\underset{A_4}{97}\underset{A_5}{11}\underset{A_6}{26}\underset{\alpha}{\overset{\pm 2}{3784}} \cdot 7$ (≈ 837) $= 77 \quad 49'78'4\check{2}652$

$$\begin{array}{r} 77 \quad 4978 4\check{2}652 \\ 672.903 \quad 42 \\ \hline 837290797884652 \\ \pm 1 \end{array}$$

Nastawiamy dziesiątkę języka na 7 linijki. Żeby uniknąć przesuwania języka, nie bierzemy trzycyfrowego $A_1 = 119$, gdyż musielibyśmy wtedy przesunąć na 7 jedynkę języka, tylko $A_1 = 11$, i mnożymy 11 przez 7 w p a m i ę c i. Przez A_3 = 129 możemy 7 pomnożyć na suwaku bez przesuwania języka, jeżeli suwak ma skalę linijki przedłużoną w lewo poza jedynkę (zwykle do 0,89); odczytamy tu 0,903. Nie bierzemy A_5 = 126, co wymagałoby nawet przy przedłużonej skali linijki przesunięcia jedynki języka na 7, tylko 12, które mnożymy w pamięci. Przed 3784 dajemy przesunięty przecinek i mnożymy 7 przez 6 (= 42) i przez 0̌3784 (= 2̌652).

Ponieważ błąd liczby 3784 c z y t a n e j n a s u w a k u wynosi ±2, zatem błąd wyniku jest ±2.7 ≈ ±10 na czwartym miejscu za przecinkiem, czyli ±1 na trzecim.

A_1 A_2 A_3 α

12) 8'785'432̌411 . $\underbrace{875}$

1 o ±5 $1000(1-\frac{1}{8})$

−1'098'179̌0514

76872533596

±4

Mnożenie przez 875 zastępujemy odjęciem od danej liczby jej 8 części i przesunięciem (w ostatecznym wyniku) przecinka o trzy miejsca na prawo.

Nastawiamy tu 8 języka stale na 10 linijki. Żeby uniknąć przesuwania języka, dzielimy pierwszą cyfrę dzielnej 8 przez 8 w pamięci. Następnie dzielimy 785 < 4000, biorąc 784:8 = = 98 (bo 8 . 8 = 64). Do 785 brak 1. Do tego 1 dopisujemy w myśli 432, 1432:8 = 179, bo 8 . 9 = 72; Reszta 0. Dajemy teraz przesunięty przecinek, 0̌411:8 = 0̌0514. Błąd jest ±5.0,875 ≈ ±4 pod ±5.

13) 1'3065'24̌947 . 37 (≈ 483) = 37'2405'35̌07

±5 1110 888

4834142307

±2

Nastawiamy dziesiątkę języka na 37. Żeby uniknąć przesuwania języka, mnożymy 37 przez 1 w pamięci. Następnie mnożymy przez 30 – otrzymujemy liczbę c z t e r o c y f r o w ą 1110. – Iloczyn 37 . 24 = 888 możemy odczytać na skali linijki przedłużonej w lewo poza jedynkę, nawet gdy skala ta sięga tylko do 0,89, sprawdzając że ostatnia jego cyfra musi być 8 (7 . 4 = 28). Przed 947 dajemy przesunięty przecinek i mnożymy 37 . 0947. Błąd: $\pm 5 \cdot 37 \approx \pm 200$ na czwartym miejscu za przecinkiem, czyli ± 2 na drugim.

14) 28431810031 52 . 14 ($\approx$ 3980) = 3976112   441
$\quad\quad$ +2 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ 434.1400

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ 398045340441
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ ± 3

Nastawiamy j e d y n k ę języka na 14. Mnożymy 14 . 284, dostając $3976 < 4000$. Następnie mnożymy przez 31, a nie przez 318, gdyż $14 \cdot 318 > 4000$ – nie da się odczytać czterocyfrowo. Żeby uniknąć przesuwania języka, nie mnożymy 14 przez 81, tylko osobno przez 8 (w pamięci lub na przedłużonej poza dziesiątkę skali linijki) i przez 1. 14 . 03152 = 441. Ponieważ błąd liczby 3152 na suwaku wynosi ± 2, zatem błąd wyniku jest $14 \cdot 2 = \pm 30$ na czwartym miejscu za przecinkiem, czyli ± 3 na trzecim.

11) 28431810031 52 . 11 ($\approx$3126) = 3124 1100
$\quad\quad$ ± 2 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ 3498   3465

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ 3127499103465
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ ± 2

Dzielenie

Gdy chcemy wykonać dokładniej dzielenie

$$a : b = c$$

piszemy:

$$a = bc = (B + \beta)(C + \gamma) = C(B + \beta) + \gamma(B + \beta) =$$

$$= CB + C\beta + \gamma \cdot b$$

skąd

$$\gamma = \frac{a - CB - C\beta}{b} \tag{7}$$

Gdy: $b = B' - \beta'$, to

$$\gamma = \frac{a - CB' + C\beta'}{b} = \frac{(a + C\beta') - CB'}{b} \tag{7a}$$

tak, że w tym wypadku sumujemy najpierw $a + C\beta'$, potem odejmujemy CB'. Patrz przykłady 2' i 4'.

Przy dzieleniu postępowanie jest zatem następujące:

1) Wyznaczamy na suwaku w przybliżeniu iloraz c.

2) Wydzielamy z niego część całkowitą C dwucyfrową (przy mniejszej wymaganej dokładności jednocyfrową), a dla liczb zaczynających się od jedynki[1] trzycyfrową. Równocześnie odczytujemy przybliżoną wartość reszty $\gamma < 1$.
To przybliżone γ oznaczymy przez γ^*. Gdy $\gamma^* > 0{,}6$ to piszemy

$$c = C + \gamma = (C + 1) - (1 - \gamma) = C' - \gamma' \tag{8}$$

3) Rozbijamy dzielnik na części $B + \beta$, ewentualnie $B' - \beta'$.

4) Mając C i B, umieszczamy w liczbie a przesunięty przecinek.

5) Odejmujemy od a iloczyny CB i $C\beta$.

6) Dzieląc różnicę $a - CB - C\beta$ przez b, otrzymujemy dokładną wartość γ.

[1] Wyjątkowo dla większych - patrz przykład 3'.

Gdy C wypada z przybliżonego dzielenia większe niż 400[1]) nie możemy odczytać wcale γ^* i nie wiemy, czy jest ono dodatnie czy ujemne, czy więc $a \gtrless CB + C\beta$. Obliczamy wtedy najpierw sumę $-(CB + C\beta)$, potem piszemy a. Patrz przykład 3.

Dzielenie wielocyfrowego a przez liczbę całą $B < 50$

Stosujemy wzór

$$a = B(C_1 + C_2 + C_3 + \gamma) = BC_1 + BC_2 + BC_3 + B\gamma \tag{9}$$

Przy j e d n o c y f r o w y m B nastawiamy B języka na dziesiątkę linijki. Przy dwucyfrowym postępujemy jak podano przy mnożeniu aB.

Przykłady dzielenia liczb a i b

Sprawdzamy wykonane poprzednio mnożenia, przyjmując, że dzielna jest dana do ostatniego miejsca dokładnie, tj. jej błąd wynosi +5 za tym miejscem.

$$1')\quad \underset{a}{\overset{+5}{205728}} : \underset{B+\beta}{\overset{b}{973826}} \approx \underset{C+\gamma^*}{\overset{c}{2112}}$$

$$a = \overset{\pm 5}{2057{,}28}$$

$$-CB = -21{,}97 = \quad -2037$$

$$-C\beta = -21 \cdot 0{,}3826 = \quad -8{,}03$$

± 7 (błąd iloczynu 8,03 liczonego na suwaku)

$$\underset{\pm 9}{12{,}25} : \underset{b}{97{,}4} = 0{,}1257 \quad (\gamma)$$

$+11$ (0,9‰ z 0,126)

± 9 (z podzielenia błędu +0,009 przez 97,4)

(Błąd średni z różnicy $a - CB - C\beta$ wynosi $\pm\sqrt{5^2 + 7^1} = \pm 9$)

$$c = C + \gamma = \underset{\pm 1}{21{,}1257}$$

---

[1]) Tak jest w przykładzie 3.

2) Powyższy przykład liczony mniej dokładnie:

$20\check{5}72\underline{8} : \check{9}7383 \approx \check{2}112$, względnie

$$20\check{5}73 \approx \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \quad -2617 \end{pmatrix} . \check{2}112$$

$a \approx (B' - \beta')(C + \gamma^*)$

$$a = \underset{-2}{20,573}$$

$+ C\beta' = + 2 \cdot 0,2617 = + \quad 0,523\underline{4}$ (mnożymy dokładnie w pamięci)

$- CB' = -2 \cdot 10 = \quad \underline{- \ 20}$

$$1,096\underline{2} = 9,74 = \underset{+5}{0,1125}$$

pomijamy

$$c = \underset{\pm 5}{2,1125}$$

Oczywiście możemy też pominąć poprawkę -2 przy a i liczyć wtedy $C\beta' = \underset{(\pm 5)}{0,523}$ na suwaku, nie w pamięci.

3') $\underset{\pm 5}{32600\check{1}3} : 807\check{4}82 \approx 404\check{}$

Korzystamy z możności dokładnego mnożenia trzycyfrowego C mającego w środku zero przez trzycyfrowe B, przy czym oba iloczyny częściowe (4 . 807 i 4 . 807) są mniejsze od 4000.

γ^* nie możemy odczytać, nie wiemy jaki ono ma znak, piszemy więc najpierw $-CB - C\beta$, potem a.

$- CB = - 404 \cdot 807 = \begin{cases} -3228 \\ -3228 \end{cases}$

$- C\beta = - 404 \cdot 0,482 = -194,9$
± 2 (0,9‰ z 1949)

$-326222,9$
± 2

$a = +326001,3$
± 5

$-221,6 : 807 = -0,2747$
± 2 $\quad$ ± 2 (0,9‰ z 0,2747)
± 2 (z podzielenia błędu $\pm$ 0,2 przez 807)

γ wypada więc ujemne.

$c = 403,7253$
$+3$

4) $2118\check{0}43 : 172\acute{7}4\,3 \approx 122\check{6}$, względnie
± 5

$2118\check{0}43 \approx 173 \cdot 123$
$\pm 5 \quad -2517 \quad \mp 4$

$a \approx (B' - \beta')(C' - \gamma^*)$

$a = 21180,4$
± 5

$+C'\beta' = +123 \cdot 0,2517 = 30,97$
± 3

$21211,40$
± 6

$-C'B' = -123 \cdot 17\hat{3} =$
$= -(2091)= -21279$
369

$-67,60 : 172,7 = -0,3914$
± 6 $\quad$ ± 4
± 4 (0,9 z 0,39)
± 3 (+0,06 : 172,7)

$c = 123 = 122,6086$
$-3914 \quad \pm 4$
± 4

$$5')\quad \underset{\pm 5}{310\check{2}71} \;:\; 172\check{7}483 \approx 1\check{7}96$$

$$\text{czyli } \underset{\pm 5}{310\check{2}71} \approx \underset{-2517}{173} \;.\; \underset{-02}{18}$$

$$a \approx (B' - \beta')(C' - \gamma'^{*})$$

$$a = \underset{\pm 5}{3102{,}71}$$

$$+C'\beta' = +18 \;.\; 0{,}2517 = \underset{+5}{4{,}53}$$

$$\underset{\pm 7}{3107{,}24}$$

$$-C'B' = -18 \;.\; 173 = \underline{-3114}$$

$$\underset{\pm 7}{-6{,}76} \;:\; 172{,}7 = -0{,}039\underset{\pm 4}{\underset{\pm 4}{13}}$$

$$c = 18\underset{\pm 6}{-03913} = \underset{\pm 6}{17{,}96087}$$

$$6')\quad \underset{\pm 2}{61\check{7}1} \;:\; \underset{\pm 5}{1\check{5}15} \approx 4\check{0}7$$

Liczba b jest tu dana zaledwie z dokładnością z jaką ją można odczytać na suwaku, liczba a z dokładnością o jedną cyfrę większą. Pytamy, z jaką maksymalną dokładnością można odczytać iloraz a i b.

Nie piszemy $b = \check{1}515$, gdyż w tym wypadku β jest za duże w stosunku do B i nie dostalibyśmy żadnej poprawy wyniku. Z drugiej strony nie potrzebujemy zastępować wyniku $4\check{0}7$ przez $\underset{-3}{41}$.

$$a = \underset{\pm 2}{617{,}1}$$

$$-CB = -600$$

$$-C\beta = -6{,}00$$

$$C\cdot\Delta\beta = \underline{\pm 2}$$

$$\underset{\pm 3}{+11{,}1} : 15{,}15 = \underset{\pm 2}{0{,}726}$$

$$c = C + \varphi = \underset{\pm 2}{40{,}73}$$

7') $\underset{\pm 2}{61\check{7}05} : \underset{\pm 5}{15\check{1}50} \approx 40\check{7}$

$$a = \underset{\pm 2}{617{,}05}$$

$$-CB = -600$$

$$-C\beta = -6{,}00$$

$$C\cdot\Delta\beta = \underline{\pm 2}$$

$$\underset{\pm 3}{+11{,}05} : 15{,}150 = \underset{\pm 2}{0{,}729}$$

$$c = \underset{\pm 2}{40{,}729}$$

8') $\underset{\pm 1}{61\check{7}06} : \underset{\pm 5}{15\check{1}50} \approx 40\check{7} = \underset{-3}{41}$

$$a = \underset{\pm 1}{617{,}06}$$

$$-C'B = -615$$

$$-C'\beta = -6{,}15$$

$$C'\cdot\Delta\beta = \underline{\pm 2}$$

$$\underset{\pm 2}{-4{,}09} : 15{,}150 = \underset{\pm 1}{-0{,}2700}$$

$$c = \underset{\substack{-270\\ \pm 1}}{41} = \underset{\pm 1}{40{,}730}$$

9') 53986 : 4372 ≈ 1235
±6 ±5

a = 539,86
±6

-CB = -516

$-C\beta$ = -8,64

$C\cdot\Delta\beta$ = ±6

15,22 : 43,72 = 0,3480
±8 ±2

c = 12,348
±2

Przykłady dzielenia wielocyfrowego a przez całkowite B < 5.0

10') 3981'15782 : 8 (≈498) = 497'64473
5 3 ±2 ±3

Nastawiamy 8 języka na 10 linijki. 8 . 497 = 3976, do 3981 brak 5. D o p i s u j e m y 15 (a nie 157, bo 5157 > 4000). 8 . 64 = 512, do 515 brak 3. Dajemy teraz p r z e s u n i ę t y p r z e c i n e k, 3782 : 8 = 0473. Błąd liczby 3782 czytanej na suwaku jest ±0,002, to przez 8 daje ±3 na czwartym miejscu za przecinkiem.

11') 8'372'9'079'78'84652 : 7(≈1196) = 1'1961'2971'1'263785
1 02 0 1 2 ±2 ±3

Nastawiamy 7 języka na 10 linijki. Postępujemy jak poprzednio, z tym, że przesunięty przecinek dajemy na 2652, zatem przedostatnie dzielenie jest 184 : 7 a nie 1846 : 7.

12') 7687253 : 875 ≈ 878

czyli 7687253 ≈ 87500 . 88
-2

$$a \approx (B+\beta)(C'-\gamma'^{*})$$

Nie mogąc dzielić przez 1000 . $(1 - \frac{1}{8})$, dzielimy przez liczbę okrągłą 87500.

$$- C'B = -88 \cdot 87 = \begin{cases} -696 \\ -696 \end{cases}$$

$$- C'\beta = -88 \cdot 0{,}5 \qquad \underline{-44{,}000 \pm 0!!}$$

$$-7700{,}000$$

$$\underline{a = +7687{,}253}$$

$$-12{,}747 : 87{,}5 = -0{,}1457 \pm 1 \ (0{,}9‰ \text{ z } 0{,}1457)$$

$$c = 88 - 1457 \pm 1 = 87{,}8543 \pm 1$$

13') 48'34'14'23'07 : 37 (≈ 1306) = 1'30'65'24'94'79
11,24,09 ±5 ±2
1817

Nastawiamy 37 języka na 10 linijki. Ostatnie dzielenie wypada 177 : 37 = 479. Błąd: ±0,5 : 37 ≈ ±0,02.

14') 3980'45'34'04'41 : 14 (≈ 2844) = 284'31'81'00'3154
4,1 1,1 ±5 ±4

Nastawiamy 14 języka na j e d y n k ę linijki.

15') 3127'499'1034'65 : 11 (≈ 2842) = 284'318'1003152
3 1 3 ±2 ±2

Nastawiamy 11 języka na jedynkę linijki.

Maszynopis złożono w Redakcji dnia 29.VI.1966 r.

LITERATURA

[1] Bory J.: Liczenie normalnym suwakiem na 6-8 miejsc przy podnoszeniu do kwadratu i pierwiastkowaniu. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Matematyka - Fizyka" zeszyt 4, 1964.

[2] Bory J.: Suwak logarytmiczny. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1965.

[3] Arnold J.N.: The Complete Slide Rule Handbook. Prentice--Hall, Inc., 1963.

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ НА СЧЁТНОЙ ЛИНЕЙКЕ С ТОЧНОСТЬЮ ДО 6 ЦИФР

Р е з ю м е

В (1) и (2) автор представил способ более точного возведения в квадрат и извлечения второго корня на нормальной 25 сантиметровой линейке. Дополняя вышеуказанные работы, он подаёт теперь простой метод, который позволяет умножить или разделить два числа "а" и "б" с точностью до 6 цифр, вместо 3-4 цифр, которые получаются нормально на счётной линейке.

MULTIPLICATION AND DIVISION ON A SLIDE RULE WITH THE ACCURACY OF 6 DIGITS

S u m m a r y

In [1] and [2] was given a method of more accurate squaring and finding square roots on a normal 25 cm slide rule. Accomplishing these papers there, has been given now a similarly simple method making it possible to multiply or divide two numbers "a" and "b" with an accuracy attaining 6 digits, in place of 3-4 digits, achieved normally on a slide rule.