ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 11 Nr kol. 172

CZESŁAW KLUCZNY

O PEWNYCH WARUNKACH STABILNOŚCI DLA RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO $x'' + f(x,x') = 0$

Streszczenie. W pracy tej podano pewne warunki stabilności dla rozwiązań równania różniczkowego drugiego rzędu (1). Dla uzyskania ich wykorzystano w pewien specjalny sposób idee Lapunowa, tak że w otrzymanych warunkach sama funkcja Lapunowa nie występuje. Ich charakter jest czysto jakościowy. Podane przykłady wskazują, że warunki te mogą mieć liczne zastosowania.

1. Modyfikując w pewien sposób metodę Lapunowa otrzymujemy w nocie niniejszej proste twierdzenia dotyczące stabilności rozwiązania zerowego równania różniczkowego

$$x''+ f(x,x') = 0, \tag{1}$$

przy założeniu, że rozwiązania tego równania rozważane w płaszczyźnie fazowej nawijają się dokoła początku układu.

Podamy najpierw następującą definicję.

D e f i n i c j a. Rodzinę krzywych położonych w płaszczyźnie xy nazywamy rodziną L , jeżeli są spełnione następujące warunki:

a) każda krzywa rodziny jest krzywą Jordana złożoną ze skończonej liczby łuków regularnych i zawiera w swoim wnętrzu początek układu współrzędnych O,

b) jeżeli krzywa należy do rodziny, to przez każdy punkt jej wnętrza poza początkiem układu O przechodzi dokładnie jedna krzywa rodziny.

Rozważmy teraz układ dwóch równań różniczkowych:

$$x' = g(x,y), \quad y' = h(x,y). \tag{2}$$

Zakładamy, że funkcje $g(x,y)$ i $h(x,y)$ są ciągłe w zbiorze spójnym D, który za wyjątkiem początku układu jest pokryty przez krzywe rodziny L. Zakładamy także, że rozwiązania układu (2) są jednoznaczne w D, a punkt O jest punktem osobliwym układu (2).

Niech $N(x,y)$ oznacza wektor prostopadły w punkcie (x,y) do przechodzącej przez ten punkt krzywej rodziny L i skierowany na zewnątrz krzywej. W przypadku, gdy krzywa przechodząca przez (x,y) nie ma w tym punkcie określonej stycznej, wektor $N(x,y)$ jest prostopadły do stycznej prawej lub lewej.

Oznaczmy jeszcze przez $F(x,y)$ wektor o współrzędnych $g(x,y)$ i $h(x,y)$.

Jest oczywiste, że jeżeli w obszarze D iloczyn skalarowy (F,N) jest ujemny lub równy zeru, to rozwiązanie zerowe układu (2) jest stabilne, a jeżeli ponadto ten iloczyn skalarowy jest ujemny w co najmniej jednym punkcie każdej krzywej rodziny to rozwiązanie zerowe jest stabilne asymptotycznie.

2. Powyższe uwagi zastosujemy teraz do równania (1). Zastąpimy to równanie przez układ

$$x' = y, \quad y' = -f(x,y). \tag{3}$$

Wprowadzimy następujące założenia:

HIPOTEZA A.

1° Funkcja $f(x,y)$ jest ciągła w otoczeniu S początku układu O, a rozwiązania układu (3) są w tym otoczeniu jednoznaczne,

2° rozwiązania układu (3) nawijają się około punktu O.

Rodzinę L krzywych można skonstruować w różny sposób. Zauważmy najpierw, że istnieje liczba $\delta > 0$, taka że dla $0<|\xi|\leq\delta$ łuk całki układu (3) wychodzącej z punktu $(\xi,0)$ po wykonaniu półobrotu dokoła punktu 0 spotyka oś x w punkcie $(\xi_1,0)$. Jeżeli $\xi < 0$, to $\xi_1 > 0$, a łuk całki zawarty między punktami $(\xi,0)$ i $(\xi_1,0)$ jest zawarty w półpłaszczyźnie $y \geq 0$. Jeżeli $\xi > 0$, to $\xi_1 < 0$, a łuk, o którym mowa jest zawarty w drugiej półpłaszczyźnie.

Rozważmy najpierw pierwszy z tych przypadków. Niech $y = \varphi(x,\xi)$ $\xi \leq x \leq \xi_1$, będzie równaniem tego łuku. Bez ograniczenia ogólności możemy przyjąć, że dla $-\delta\leq\xi< 0$, każda z krzywych przedstawionych równaniem

$$y^2 = \varphi^2(x,y), \quad \xi \leq x \leq \xi_1, \quad -\delta \leq \xi < 0 \tag{4}$$

jest zawarta w otoczeniu S .

Łatwo widać, że rodzina krzywych danych wzorem (4) jest rodziną krzywych L w sensie definicji podanej w punkcie 1.

Przypuśćmy, że punkt (x,y), $y \geq 0$, leży na jednej z krzywych (4). Wektor $N(x,y)$ określony w punkcie 1 ma współrzędne $(f(x,y),y)$. Punkt $(x,-y)$ leży na tej samej krzywej, a z uwagi na symetrię krzywej wektor $N(x,-y)$ ma współrzędne $(f(x,y),-y)$. Wynika stąd, że iloczyn skalarowy w punkcie $(x,-y)$,$(y \geq 0)$, wyraża się wzorem

$$(F,N) = y\left[f(x,-y) - f(x,y)\right]. \tag{5}$$

Oczywiście, że w punkcie (x,y), $y \geq 0)$ jest $(F,N) = 0$.

Postępując podobnie w drugim przypadku, gdy $\xi > 0$, otrzymamy inną rodzinę L krzywych, lecz wartość iloczynu skalarowego w punkcie $(x,-y)$, gdzie teraz $y \leq 0$, jest także dana wzorem (5), a w punkcie (x,y) jest równa zeru.

Zauważmy, że prawa strona wzoru (5) jest funkcją parzystą ze względu na y.

Z tych rozważań i poczynionych uwag wynika następujące TWIERDZENIE 1.

Jeżeli założenia Hipotezy A są spełnione, to rozwiązanie zerowe równania (1) jest stabilne, stabilne asymptotycznie lub niestabilne odpowiednio do trzech warunków następujących:

(α) $y[f(x,y) - f(x,-y)] \geqslant 0$ w S,

(β) $y[f(x,y) - f(x,-y)] \geqslant 0$ w S i istnieje łuk wychodzący z punktu 0, na którym poza samym punktem 0 jest $y[f(x,y) - f(x,-y)] > 0$.

(γ) $y[f(x,y) - f(x,-y)] \leqslant 0$ w S i na pewnym łuku, opisanym w (β) jest $y[f(x,y) - f(x,-y)] < 0$.

Rodzina krzywych L może być także skonstruowana, gdy weźmiemy pod uwagę łuki rozwiązań wychodzących z punktu $(0,\eta)$, $\eta > 0$, (lub $\eta < 0$), zawarte w półpłaszczyźnie $x \geqslant 0$ (lub w półpłaszczyźnie $x \leqslant 0$). Te przypadki mogą być przedyskutowane w sposób zupełnie analogiczny. W wyniku otrzymamy następujące TWIERDZENIE 2.

Jeżeli założenia Hipotezy A są spełnione, to rozwiązanie zerowe równania (1) jest stabilne, stabilne asymptotycznie lub niestabilne odpowiednio do następujących trzech warunków:

(α_1) $y[f(x,y) + f(-x,y)] \geqslant 0$ w S,

(β_1) $y[f(x,y) + f(-x,y)] \geqslant 0$ w S i istnieje łuk wychodzący z punktu 0, na którym poza samym punktem 0 jest $y[f(x,y) + f(-x,y)] > 0$,

(γ_1) $y[f(x,y) + f(-x,y)] \leqslant 0$ w S i na pewnym łuku opisanym w (β_1) jest $y[f(x,y) + f(-x,y)] < 0$.

U w a g a. Dla prostoty zakładaliśmy w Hipotezie A, że całki układu (3) nawijają się dokoła początku układu współrzędnych. W rzeczywistości, dla dowodu twierdzenia 1 wystarczy założyć zamiast tego, że dla ξ dostatecznie małych, łuk całki wychodzącej z punktu $(\xi,0)$ spotyka oś x po raz pierwszy w punkcie o odciętej ξ_1 takiej, że $\xi \cdot \xi_1 < 0$ i że ξ_1 dąży do zera wraz z ξ. Analogiczną uwagę można uczynić odnośnie Twierdzenia 2.

Z a s t o s o w a n i a. Stosując do niżej podanych funkcji Twierdzenie 1 (przypadki a) do e)) lub Twierdzenie 2 (d) -(f) przekonamy się z łatwością, że w każdym z tych przypadków rozwiązanie zerowe równania (1) jest stabilne asymptotycznie.

a) $f(x,y) = \alpha x + \beta x^2 y + \gamma y^3 + g(x,y^2) + h(x,y)$,
gdzie α, β, γ oznaczają stałe dodatnie dowolne,
$g(x,y^2) = O(r^2)$, $h(x,y) = O(r^3)$, $r^2 = x^2 + y^2$,[x)]

b) $f(x,y) = \alpha x + \gamma y^{2n+1} + xg(x,y^2) + y^{2n+1}h(x,y)$,
$\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $g(x,y^2) = O(r^2)$, $h(x,y) = O(r)$,

c) $f(x,y) = \alpha x + \beta x^2 y + g(x,y^2) + x^2 yh(x,y)$,
$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $g(x,y^2) = O(r^2)$, $h(x,y) = O(r)$,

d) $f(x,y) = \alpha x + \beta x^2 y + xg(x^2,y) + x^2 yh(x,y)$,
$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $g(x,y) = O(r)$, $h(x,y) = O(r)$,

e) $f(x,y) = \alpha x + \beta x^4 y + xg(x^2,y) + x^4 yh(x,y)$,
$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $g(x^2,y) = O(r)$, $h(x,y) = O(r)$,

f) $f(x,y) = \alpha x + \gamma y^3 + xg(x^2,y) + y^3 h(x,y)$,
$\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $g(x^2,y) = O(r)$, $h(x,y) = O(r)$.

[x)] Symbol $p(x,y) = O(r^n)$ oznacza, że istnieje stała M taka, że dla dość małych r jest $p(x,y) \leqslant Mr^n$.

We wzorach tych można oczywiście położyć $h(x,y) = 0$ lub $g(x,y) = 0$. Występujący w każdym z tych przypadków człon αx ze współczynnikiem α dodatnim zapewnia nawijanie się całek układu (3) dokoła początku układu współrzędnych.

LITERATURA

[1] Małkin I.G.: Teoria ustoicziwosti dwiżenia, G.I.T.L, Moskwa 1952.

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $x'' = f(x,x')$

Р е з ю м е

В этой работе даны некоторые условия устойчивости для тривиального решения уравнения (1). Эти условия получены по специальном применении идеи Ляпунова и у них качественный характер.

ON SOME STABILITY CONDITIONS FOR THE EQUATION $x'' = f(x,x')$

S u m m a r y

In this paper are given some stability conditions for the zero-solution of the equation above. They are obtained by application in a special way the idea of Lyapunov and are of qualitative character.