ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 11 Nr kol. 172

KAROL PETHE

OSZACOWANIE MODUŁU WSPÓŁCZYNNIKA b_n FUNKCJI ANALITYCZNYCH ŚREDNIO JEDNOKROTNYCH ZEWNĄTRZ KOŁA JEDNOSTKOWEGO

W pracy tej zajmuję się oszacowaniem modułów współczynników w klasie funkcji analitycznych średnio jednokrotnych o środku 0 (w sensie M. Biernackiego)[1] których rozwinięcie w szereg Laurenta dla $|z| > 1$ ma postać

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}.$$

Korzystać będę z następujących twierdzeń:

Twierdzenie 1. Jeżeli funkcja

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

jest analityczna w obszarze $|z| > 1$ z wyłączeniem bieguna w $z = \infty$ i średnio jednokrotna o środku 0 w tym obszarze, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1. \tag{1}$$

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcja

$$g(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$$

jest analityczna w obszarze $|z| > 1$ z wyłączeniem bieguna w $z = \infty$ i średnio p-krotna o środku 0 w tym obszarze, to

$$\sum_{n=-p}^{\infty} n\,|c_n|^2 \leqslant 0.$$

Twierdzenie 2 zastosuję do kwadratu funkcji $f(z)$, który na mocy twierdzenia M. Biernackiego 2 jest funkcją średniodwukrotną o środku 0 dla $|z| > 1$.

Mamy więc w tym przypadku

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\,|c_{n-1}|^2 \leqslant 2, \tag{2}$$

gdzie

$$c_{n-1} = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} 2\, b_k\, b_{(n-1)-k} + \frac{1-(-1)^n}{2}\, b^2_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} + 2\, b_n.$$

Znane dotychczas oszacowanie modułu współczynnika b_n otrzymuje się z nierówności (1) pomijając po lewej stronie wszystkie nieujemne wyrazy oprócz wyrazu n-tego. Oszacowanie to ma postać

$$|b_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Lepsze oszacowanie modułu b_n można uzyskać wykorzystując łącznie nierówności (1) i (2) (3).

Rozważmy w tym celu nierówności

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \left(k|b_k|^2 + (n-1-k)|b_{(n-1)-k}|^2\right) + \frac{1-(-1)^n}{2}\,\frac{n-1}{2}\left|b_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\right|^2 +$$

$$+ n|b_n|^2 \leqslant 1,$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} 2\, b_k\, b_{(n-1)-k} + \frac{1-(-1)^n}{2}\, b^2_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} + 2\, b_n\right|^2 \leqslant \frac{2}{n-1}$$

otrzymane z (1) i (2) przez pominięcie po lewych stronach obu nierówności pewnej nieujemnej sumy wyrazów. Przy oznaczeniu

$$\sqrt{2}\, b_k = \tilde{b}_k,\ \sqrt{2}\, b_{(n-1)-k} = \tilde{b}_{(n-1)-k},\ k = 1,2,\ldots,\left[\frac{n-2}{2}\right],$$

gdy n nieparzyste

$$b_{\frac{n-1}{2}} = \tilde{b}_{\frac{n-1}{2}},$$

nierówności te przyjmują postać

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1}{2}\left(k\,|\tilde{b}_k|^2 + (n-1-k)|\tilde{b}_{(n-1)-k}|^2\right) + n|b_n|^2 \leqslant 1, \tag{3}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \tilde{b}_k \tilde{b}_{(n-1)-k} + 2 b_n \right|^2 \leqslant \frac{2}{n-1}. \tag{4}$$

Znalezienie z tych nierówności najlepszego oszacowania modułu b_n sprowadza się do znalezienia największej wartości jaką może przybierać ten współczynnik przy wszelkich układach $\{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_{n-1}\}$ z zachowaniem warunków (3) i (4).

Nie pomniejszając ogólności możemy przyjąć, że współczynnik b_n jest rzeczywisty i ujemny.

Istotnie, gdyby $b_n = |b_n| e^{i\vartheta n}$, gdzie $\vartheta_n \neq \pi$, to można by zastąpić badanie modułów współczynników funkcji $f(z)$ badaniem modułów współczynników funkcji

$$\varphi(z) = e^{-i\varphi} f(ze^{i\varphi}), \quad \varphi = \frac{\vartheta n - \pi}{n+1},$$

gdyż moduły współczynników tej funkcji są równe modułom współczynników b_n funkcji $f(z)$ przy czym n-ty współczynnik funkcji $\varphi(z)$ jest rzeczywisty i ujemny.

W dalszym ciągu zakładamy, że $n \geqslant 3$. Kres górny $|b_n^*|$ wartości modułu współczynnika b_n ze względu na wszystkie układy liczb $\{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_{n-2}\}$ jest większy od $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{n-1}}$.

Istotnie przyjmując $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_2 = \dots = \tilde{b}_{n-2} = 0$ otrzymujemy $|b_n| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{n-1}}$ przy czym nierówność (3) jest ostra. Przyjmując więc $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_{n-2}$ rzeczywiste, dostatecznie małe i takie, żeby $\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \tilde{b}_k \tilde{b}_{(n-1)-k} > 0$ otrzymujemy pewne $b_n < -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{n-1}}$.

Lemat 1

Niech $|b_n^*|$ oznacza kres górny wartości modułu współczynnika b_n ze względu na wszystkie układy liczb $\{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_{n-2}\}$ spełniające nierówności (3) i (4). Przy wszelkich $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_{n-2}$ spełniających wraz z b_n^* nierówności (3) i (4) mamy

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1}{2}\left(k|\tilde{b}_k|^2 + (n-1-k)|\tilde{b}_{(n-1)-k}|^2\right) + n\, b_n^* = 1, \tag{5}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \tilde{b}_k\, \tilde{b}_{(n-1)-k} + 2\, b_n^*\right|^2 = \frac{2}{n-1}. \tag{6}$$

Dowód

Rozważmy trzy przypadki.

1° Przypuśćmy, że przy pewnych $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_{n-2}$

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1}{2}\left(k|\tilde{b}_k|^2 + (n-1-k)|b_{(n-1)-k}|^2\right) + n\, b_n^{*2} < 1, \tag{5'}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \tilde{b}_k\, \tilde{b}_{(n-1)-k} + 2\, b_n^*\right|^2 < \frac{2}{n-1}. \tag{6'}$$

Wtedy istniałoby takie $\varepsilon > 0$, że zwiększając $|b_n^*|$ o ε ostre nierówności (5) i (6), wobec ciągłości ich lewych stron, można byłoby zachować. To jest niemożliwe wobec maksymalności $|b_n^*|$.

2° Przypuśćmy, że przy pewnych $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_{n-2}$

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1}{2}\left(k|\tilde{b}_k|^2 + (n-1-k)|\tilde{b}_{(n-1)-k}|^2\right) + n\, b_n^{*2} = 1, \qquad (5)''$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \tilde{b}_k\, \tilde{b}_{(n-1)-k} + 2\, b_n^*\right|^2 < \frac{2}{n-1}. \qquad (6)''$$

Wówczas wobec ciągłości lewej strony nierówności (6)" można tak zmniejszyć $|\tilde{b}_1|$, $|\tilde{b}_2|, \ldots, |\tilde{b}_{n-2}|$ i powiększyć $|b_n^*|$ ażeby ostra nierówność (6)" oraz równość (5) zostały zachowane, co wobec maksymalności $|b_n^*|$ jest niemożliwe.

Przypadek $|\tilde{b}_1| = |\tilde{b}_2| = \ldots = |\tilde{b}_{n-2}| = 0$ jest niemożliwy ponieważ z (6)" otrzymalibyśmy, że

$$|b_n^*| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{n-1}}, \text{ co jest niemożliwe.}$$

3° Przypuśćmy teraz, że przy pewnych $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_{n-2}$

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1}{2}\left(k|\tilde{b}_k|^2 + (n-1-k)|\tilde{b}_{(n-1)-k}|^2\right) + n\, b_n^{*2} < 1, \qquad (5)'''$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \tilde{b}_k \tilde{b}_{(n-1)-k} + 2 b_n^* \right|^2 = \frac{2}{n-1}. \tag{6'''}$$

Można tak zmienić argumenty liczb $\tilde{b}_k, \tilde{b}_{(n-1)-k}$ nie zmieniając ich modułów, ażeby suma

$$H = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \tilde{b}_k \tilde{b}_{(n-1)-k} = R e^{i\Theta}$$

przybrała dowolny argument i zachowała swój moduł. Ponieważ $R > 0$, wobec $|b_n^*| > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{n-1}}$ więc przez powyższą zmianę, zmieniając Θ i nie zmieniając b_n^*, można by zmniejszyć lewą stronę (6)''', gdyby $\Theta > 0$ i otrzymać przypadek 1°, co niemożliwe. A więc

$$\Theta \neq 0, \quad H > 0.$$

Jeżeli następnie powiększymy $|\tilde{b}_1|, |\tilde{b}_2|, \ldots, |\tilde{b}_{n-2}|$ do liczb $|\tilde{b}_1^o|, |\tilde{b}_2^o|, \ldots, |\tilde{b}_{n-2}^o|$ tak ażeby

$$\frac{|\tilde{b}_1^o|}{|\tilde{b}_1|} = \frac{|\tilde{b}_2^o|}{|\tilde{b}_2|} = \ldots = \frac{|\tilde{b}_{n-2}^o|}{|\tilde{b}_{n-2}|} = C,$$

to wówczas suma H pozostanie nadal rzeczywista dodatnia i zostanie powiększona. Wobec tego na to, ażeby zachodziła równość $(6)'''$, moduł współczynnika $|b_n^*|$ musi być powiększony (przy czym dla C dostatecznie bliskich 1 nierówność $(5)'''$ zostanie zachowana) wbrew temu, że jest on maksymalny.

Lemat 2

Jeżeli kres górny $|b_n^*|$ jest osiągnięty przy pewnych $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_{n-2}$, to iloczyny

$$\tilde{b}_k\, \tilde{b}_{(n-1)-k}, \quad k = 1,2,\ldots,\left[\frac{n-1}{2}\right],$$

są rzeczywiste i nieujemne.

Dowód

Z ostatniego dowodu wynika, że

$$H = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \tilde{b}_k\, \tilde{b}_{(n-1)-k} > 0.$$

Istnieje składnik $\tilde{b}_{ko}\, \tilde{b}_{(n-1)-k_o}$ sumy H taki, że

$$\mathrm{Re}(\tilde{b}k_o\, \tilde{b}_{(n-1)-k_o}) \neq 0. \tag{7}$$

Oznaczmy

$$\tilde{b}_k = \varrho_k e^{i\vartheta_k}, \quad \tilde{b}_{(n-1)-k} = \varrho_{(n-1)-k} e^{i\vartheta_{(n-1)-k}};$$

$$\vartheta_k + \vartheta_{(n-1)-k} = \varphi_k, \quad k = 1,2,\ldots,\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Udowodnimy, że każdy iloczyn $\tilde{b}_k \tilde{b}_{(n-1)-k}$ jest rzeczywisty. Niech $\varrho_k\varrho_{(n-1)-k} > 0$, $k \neq k_o$, $I_m(\tilde{b}_k \tilde{b}_{(n-1)-k}) + I_m(\tilde{b}_{k_o} \tilde{b}_{(n-1)-k_o}) = C_k$, mamy

$$\varrho_k\varrho_{(n-1)-k} \sin\varphi_k + \varrho_{k_o}\varrho_{(n-1)-k_o} \sin\varphi_{k_o} = C_k. \tag{8}$$

Oznaczmy dalej

$$F(\varphi_k,\varphi_{ko}) = \mathrm{Re}(\tilde{b}_k \tilde{b}_{(n-1)-k}) + \mathrm{Re}(\tilde{b}_{k_o} \tilde{b}_{n-1)-k_o}) = \tag{9}$$

$$= \varrho_k\varrho_{(n-1)-k} \cdot \cos\varphi_k + \varrho_{k_o}\varrho_{(n-1)-k_o} \cdot \cos\varphi_{k_o}$$

Przyjmując (8) ze stałym C_k jako warunek uboczny traktujemy $F(\varphi_k, \varphi_{ko})$ jako funkcję zmiennej φ_k.
Rozważmy dwa przypadki

1°
$$\frac{dF(\varphi_k, \varphi_{ko})}{d\varphi_k} \neq 0.$$

Wówczas zachowując warunek (8) a więc i rzeczywistość H można przez odpowiednią zmianę φ_k i φ_{ko} zwiększyć wyrażenie (9). Wtedy suma H także się zwiększy.

Możemy więc przez zmianę wartości φ_k i φ_{ko} zwiększyć sumę H, a następnie przywrócić jej dawną wartość przez odpowiednie zmniejszenie modułów $|\tilde{b}_1|, |\tilde{b}_2|, \ldots, |\tilde{b}_{n-2}|$. Wtedy równość (6) zostanie zachowana natomiast równość (5) przejdzie na ostrą nierówność co wobec Lematu 1 jest niemożliwe.

2^0 Niech
$$\frac{dF(\varphi_k, \varphi_{ko})}{d\varphi_k} = 0.$$

Wtedy z (9) otrzymujemy

$$\frac{dF(\varphi_k, \varphi_{ko})}{d\varphi_k} = -\varrho_k \varrho_{(n-1)-k} \sin\varphi_k - \varrho_{k_o}\varrho_{(n-1)-k_o} \sin\varphi_{k_o} \frac{d\varphi_{ko}}{d\varphi_k} = 0,$$

natomiast z (7) i (8) dostajemy

$$\frac{d\varphi_{k_o}}{d\varphi_k} = -\frac{\varrho_k\varrho_{(n-1)-k} \cos\varphi_k}{\varrho_{k_o}\varrho_{(n-1)-k_o} \cos\varphi_{k_o}},$$

stąd

$$\frac{dF(\varphi_k, \varphi_{k_o})}{d\varphi_k} = -\varrho_k\varrho_{(n-1)-k}(\sin\varphi_k - \cos\varphi_k \cdot \operatorname{tg}\varphi_{k_o}) = 0,$$

co daje w rezultacie

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \operatorname{tg} \varphi k_o,$$

stąd

$$\varphi_k = \varphi_{k_o} + m_k\pi, \qquad (m_k = 0,\ 1,\ -1)$$

Wstawiając φ_k, $k = 1,2,\dots,\left[\frac{n-1}{2}\right]$ do sumy H otrzymujemy

$$H = e^{i\varphi_{k_o}} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \varrho_k \varrho_{(n-1)-k} e^{im_k\pi}, \quad m_{k_o} = 0.$$

Ponieważ suma H jest rzeczywista więc

$$\varphi_{k_o} = m\pi \ \text{ i } \ \varphi_k = (m + m_k)\pi.$$

Dalej pokażemy, że iloczyny $\tilde{b}_k \tilde{b}_{(n-1)-k}$ są nieujemne. Przypuśćmy a contrario, że istnieje takie j_o, dla którego

$$\tilde{b}_{j_o} \tilde{b}_{(n-1)-j_o} < 0. \tag{10}$$

Ponieważ $H > 0$, to istnieje taki wskaźnik j_1, że

$$\tilde{b}_{j_1} \tilde{b}_{(n-1)-j_1} > 0. \tag{11}$$

Niech

$$\tilde{b}_{j_o}\,\tilde{b}_{(n-1)-j_o}+\tilde{b}_{j_1}\,\tilde{b}_{(n-1)-j_1}=C'. \tag{12}$$

Wobec (10) i (11) można tak zmniejszyć $|\tilde{b}_{j_o}|$, $|\tilde{b}_{(n-1)-j_o}|$, $|\tilde{b}_{j_1}|$, $|\tilde{b}_{(n-1)-j_1}|$, ażeby warunek (12) był zachowany. Wtedy równość (6) będzie spełniona natomiast równość (5) przejdzie na ostrą nierówność, co wobec Lematu 1 jest niemożliwe.

<u>Lemat</u> 3

Kres górny modułu współczynnika $|b_n^*|$ jest osiągnięty dla pewnych rzeczywistych i nieujemnych $\tilde{b}_1^*, \tilde{b}_2^*, \dots, \tilde{b}_{n-2}^*$.

<u>Dowód</u>

Z Lematu 2 wynika, że kres górny $|b_n^*|$ jest osiągnięty przy pewnych $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_{n-2}$ takich dla których iloczyny

$$\tilde{b}_k\,\tilde{b}_{(n-1)-k} \quad k=1,2,\dots,\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

są rzeczywiste i nieujemne.

Jeżeli więc przyjmiemy

$$\tilde{b}_k^* = |\tilde{b}_k|,\quad \tilde{b}^*_{(n-1)-k} = |\tilde{b}_{(n-1)-k}|,$$

to równości (5) i (6) zostaną zachowane.

Z Lematu 3 wynika, że poszukiwanie maksymalnej wartości (b_n) sprowadza się do poszukiwania $\sup|b_n|$ przy rzeczywistych i nieujemnych $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_{n-2}$. Mamy więc znaleźć maksymalne $|b_n|$ spełniające układ nierówności (3) i (4) przy rzeczywistych nieujemnych $\tilde{b}_k$, $k=1,2,\dots,n-2$ i ujemnym b_n.

Należy zauważyć, że jeżeli nierówności (3) i (4) zachodzą dla pewnych $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_{n-2}$ to zachodzą one również dla $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_{k-1}, \tilde{b}^o_k, \tilde{b}_{k+1}, \dots, \tilde{b}_{(n-1)-k-1}, \tilde{b}^o_{(n-1)-k}, \tilde{b}_{(n-1)-k+1}, \dots,$ $\tilde{b}_{n-2}$

takich, że

$$\tilde{b}^o_k\, \tilde{b}^o_{(n-1)-k} = \tilde{b}_k\, \tilde{b}_{(n-1)-k}$$

$$K\, \tilde{b}^o_k + (n-1-k)\, \tilde{b}^o_{(n-1)-k} \leqslant k\, \tilde{b}^2_k + (n-1-k)\, \tilde{b}^2_{(n-1)-k}.$$

Stąd wynika, że przy ustalonych $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_{k-1}, \tilde{b}_{k+1}, \dots,$ $\tilde{b}_{(n-1)-k-1}, \tilde{b}_{(n-1)-k+1}, \dots, \tilde{b}_{n-2}$ nierówności (3) i (4) będą zachodziły jeżeli przyjmiemy

$$\tilde{b}_k\, \tilde{b}_{(n-1)-k} = \text{const.} \tag{13}$$

i że wyrażenie $k\, \tilde{b}^2_k + (n-1-k)\, \tilde{b}^2_{(n-1)-k}$ jest minimalne.
Mamy więc do rozwiązania zagadnienie znalezienia ekstremum funkcji dwóch zmiennych $\tilde{b}_k$ i $\tilde{b}_{(n-1)-k}$ z warunkiem ubocznym (13).
Przy oznaczeniu

$$\varphi(\tilde{b}_k, \tilde{b}_{(n-1)-k}) = k\, \tilde{b}^2_k + (n-1-k)\tilde{b}^2_{(n-1)-k} + \lambda\, \tilde{b}_k \tilde{b}_{(n-1)-k}$$

mamy

$$\frac{\partial \varphi(\tilde{b}_k, \tilde{b}_{(n-1)-k})}{\partial \tilde{b}_k} = 2k\, \tilde{b}_k + \lambda\, \tilde{b}_{(n-1)-k} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi(\tilde{b}_k, \tilde{b}_{(n-1)-k})}{\partial \tilde{b}_{(n-1)-k}} = 2(n-1-k)\tilde{b}_{(n-1)-k} + \lambda \tilde{b}_k = 0$$

$$\tilde{b}_{(n-1)-k} = -\frac{\lambda \tilde{b}_k}{2(n-1-k)}, \tag{14}$$

$$\tilde{b}_k\left(2k - \frac{\lambda^2}{2(n-1-k)}\right) = 0$$

Jeżeli $\tilde{b}_k \neq 0$ to $\lambda^2 = 4k(n-1-k)$,

stąd

$$\tilde{b}_{(n-1)-k} = \sqrt{\frac{k}{n-1-k}}\, \tilde{b}_k. \tag{14'}$$

Gdy $\tilde{b}_k = 0$, to wobec (14) $\tilde{b}_{(n-1)-k} = 0$ i związek (14)' również zachodzi.

Podstawiając teraz (14)' do lewych stron nierówności (3) i (4) otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} k\, \tilde{b}_k^2 + n\, b_n^2 \leqslant 1, \tag{15}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sqrt{\frac{k}{n-1-k}}\; \tilde{b}_k^2 + 2\, b_n\right|^2 \leqslant \frac{2}{n-1}. \tag{16}$$

Wybierzmy dalej spośród wartości $k = 1,2,\ldots,\left[\frac{n-1}{2}\right]$ dowolne dwie np: i,j gdzie $i < j$.

Jeżeli nierówności (15) i (16) zachodzą dla pewnych $\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\ldots,\tilde{b}_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ to zachodzą one także dla takich $\tilde{b}_1,\ldots,$ $\tilde{b}_{i-1},\tilde{b}^o_i,\tilde{b}_{i+1},\ldots,\tilde{b}_{j-1},\tilde{b}^o_j,\tilde{b}_{j+1},\ldots,\tilde{b}_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ dla których

$$\sqrt{\frac{i}{n-1-i}}\,\tilde{b}^{o\,2}_i+\sqrt{\frac{j}{n-1-j}}\,\tilde{b}^{o\,2}_j=\sqrt{\frac{i}{n-1-i}}\,\tilde{b}^2_i+\sqrt{\frac{j}{n-1-j}}\,\tilde{b}^2_j,$$

$$i\,\tilde{b}^{o\,2}_i+j\,\tilde{b}^{o\,2}_j\leqslant i\,\tilde{b}^2_i+j\,\tilde{b}^2_j.$$

Wobec tego nierówności (15) i (16) będą zachodziły także wtedy, gdy

$$i\,\tilde{b}^2_i+j\,\tilde{b}^2_j$$

będzie minimalne, przy warunku

$$\sqrt{\frac{i}{n-1-i}}\,\tilde{b}^2_i+\sqrt{\frac{j}{n-1-j}}\,\tilde{b}^2_j=\text{const.}\tag{17}$$

Mamy zatem znów zagadnienie znalezienia ekstremum funkcji zmiennych $\tilde{b}_i$, $\tilde{b}_j$ z warunkiem ubocznym (17).

Przy oznaczaniu

$$\varphi(\tilde{b}_i,\tilde{b}_j)=i\,\tilde{b}^2_i+j\,\tilde{b}^2_j+\lambda^o\left(\sqrt{\frac{i}{n-1-i}}\,\tilde{b}^2_i+\sqrt{\frac{j}{n-1-j}}\,\tilde{b}^2_j\right)$$

otrzymamy

$$\frac{\partial \varphi(\tilde{b}_i,\tilde{b}_j)}{\partial \tilde{b}_i} = 2\,\tilde{b}_i\,\Big(i + \lambda^0\sqrt{\frac{i}{n-1-i}}\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi(\tilde{b}_i,\tilde{b}_j)}{\partial \tilde{b}_j} = 2\,\tilde{b}_j\Big(j + \lambda^0 \cdot \sqrt{\frac{j}{n-1-j}}\Big) = 0.$$

Gdyby $\tilde{b}_i \neq 0$ i $\tilde{b}_j \neq 0$ to byłoby

$$(i-j)\big[(n-1) - (i+j)\big] = 0. \tag{18}$$

Ponieważ $i \neq j$ oraz $i + j < n - 1$ warunek (18) nie może zachodzić.

Wynika stąd, że co najwyżej jeden ze współczynników $\tilde{b}_k$, $k = 1,2,\ldots,\left[\frac{n-1}{2}\right]$ jest różny od zera. Otrzymujemy więc

$$k\,\tilde{b}_k^2 + n\,b_n^2 \leqslant 1,$$

$$2\,|b_n| - \sqrt{\frac{k}{n-1-k}}\;b_k^2 \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Przy maksymalnym $|b_n^*|$, jak łatwo zauważyć, ostatnie nierówności przechodzą w równości. Mamy więc

$$k\,\tilde{b}_k^2 + n\,b_n^{*2} = 1$$

$$2\sqrt{k(n-1-k)}\;|b_n^*| - k\,\tilde{b}_k^2 = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\,\sqrt{k(n-1-k)}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$n|b_n^*|^2 + 2\sqrt{k(n-1-k)}\,|b_n^*| - \sqrt{\frac{2}{n-1}}\,\sqrt{k(n-1-k)} - 1 = 0, \qquad (19)$$

ponieważ pochodna

$$\frac{dy}{dk} = -\frac{\dfrac{n-1-2k}{\sqrt{k(n-1-k)}}\left(y - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}\right)}{2ny + 2\sqrt{k(n-1-k)}},$$

gdzie

$$1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

a funkcja $y(k)$ określona równaniem

$$n y^2 + 2\sqrt{k(n-1-k)}\, y - \sqrt{\frac{2}{n-1}}\sqrt{k(n-1-k)} - 1 = 0,$$

i

$$y > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

jest niedodatnia, więc $|b_n^*|$ spełnia równanie (19) dla $k=1$.

Wobec powyższego otrzymujemy następujące oszacowanie na (b_n)

$$|b_n| \leqslant \frac{-\sqrt{n-2} + \sqrt{n-2+n\left(\sqrt{\dfrac{2(n-2)}{n-1}} + 1\right)}}{n}.$$

Uwzględniając większą ilość wyrazów w nierównościach (3) i (4) polepszyłem w przypadku funkcji o współczynnikach rzeczywistych oszacowanie na $|b_3|$, a panowie A. Badura, R. Liguda i C. Wojciechowski na $|b_4|$, $|b_5|$ i $|b_6|$; polepszenia tych oszacowań są jednak nieznaczne.

Rękopis złożono w Redakcji dnia 23.II.1966 r.

LITERATURA

[1] "Sur les fonctions en moyenne multivalentes" Bulletin des Sciences mathematiques 2^o serie, t. LXX mars-avril 1946 str. 1.

[2] Tamże str. 5 i 8.

[3] Metoda ta jest uogólnieniem metody, którą użył p. J. Charatonik w przypadku b_3 i b_5.

ОЦЕНКА МОДУЛИ b_n ФУНКЦИИ ОДНОЛИСТНЫХ В СРЕДНЕМ ВНЕ ЕДИНИЧНОГО КРУГА

Р е з ю м е

В этой работе я рассматриваю оценку модуля функции однолистных в среднем вне единичного круга о центре в нуле (в смысле Бернаского) розложение которых в ряд Лорента ест

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$$

Исползовуюс неравенствами (1) и (2) я получил оценку

$$|b_n| \leqslant \frac{-\sqrt{n-2} + \sqrt{n-2+n(\sqrt{\frac{2(n-2)}{n-1}} + 1}}{n}$$

AN ESTIMATION OF THE n-th COEFFICIENT OF FUNCTIONS CIRCUMFERENTIALLY OUTSIDE THE UNIT DISC

S u m m a r y

In this paper I interest in the estimation of the moduli of the coefficients of the functions circumferentially univalent outside the unit disc with the origin as centre (in the sense of Biernacki)[1] which Laurent series expansion is:

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

Due to the inequalities (1) and (2) I have obtained the estimation

$$|b_n| \leqslant \frac{-\sqrt{n-2} + \sqrt{n-2+n\sqrt{\frac{2(n-2)}{n-1}} + 1}}{n}$$