

BOHDAN MOCHNACKI
Katedra Matematyki D

ANALIZA DYFUZJI NEUTRONÓW TERMICZNYCH
W REAKTORZE JĄDROWYM W OPARCIU O TEORIĘ
PROCESÓW STOCHASTYCZNYCH

Streszczenie. Artykuł niniejszy stanowi próbę zastosowania teorii procesów stochastycznych do badania "losu" dyfundującego w strefie aktywnej reaktora jądrowego neutronu termicznego. Statystyczny charakter omówionych poniżej zjawisk, pozwolił zamodelować procesy dyfuzji, pochłaniania i rozszczepienia tak, aby spełniały one kryteria stawiane procesom MARKOWA [1], [2]. W dalszej części pracy rozwiązano równania KOZMOGOROWA [1], [2], metodą funkcji tworzącej [2]. Rozwiązanie problemu sprowadziło się do znalezienia całki równania RICCATI'ego. Rozwiązanie otrzymano (rozkład prawdopodobieństw poszczególnych procesów w funkcji czasu), w postaci szeregu funkcyjnego. Po sprawdzającym tok obliczeń zbadaniu zbieżności i sumy uzyskanego szeregu, znaleziono charakterystyki przejścia dla kilku stref aktywnych jednorodnych nieskończonych reaktorów na U-235, z moderatorem grafitowym. Dane liczbowe dotyczące przekrojów czynnych na występujące reakcje jądrowe zaczerpnięto z [3]. Porównanie otrzymanych wyników z innymi istniejącymi rozwiązaniami wypadło pozytywnie, co pokazano w końcowej części artykułu.

1. Zjawiska z którymi spotykamy się w wielu dziedzinach współczesnej fizyki i techniki można podzielić na dwie obszerne grupy.

Do grupy pierwszej zaliczymy procesy zdeterminowane, procesy których przebieg przy znajomości pewnych parametrów możemy jednoznacznie określić. Za przykład tego typu zjawiska może posłużyć sprężyste zderzenie dwóch kul. Znając ich masy, prędkości, oraz kierunku ruchu przed zderzeniem, możemy jednoznacznie scharakteryzować ich ruch po zderzeniu (oczywiście przy pewnych założeniach upraszczających).

Drugą grupę zjawisk stanowią procesy stochastyczne (przypadkowe). Niemożliwym jest np. jednoznaczne odtworzenie ruchu cząstki materii dyfundującej pośród innych cząsteczek, właśnie z powodu przypadkowości tego procesu.

Możemy tu jednak opierając się na matematycznej teorii opisującej zjawiska tego rodzaju podać rozkład prawdopodobieństw, że omawiana cząstka w chwili t znajdzie się w miejscu X . Podstawową częścią jądrowego reaktora na neutrony termiczne jest jego strefa aktywna składająca się z paliwa i moderatora (spowalniająca).

Neutrony powstałe w wyniku rozszczepienia paliwa, zostają wskutek zderzeń z atomami moderatora spowolnione do energii termicznych (energii, przy których pozostają w równowadze termicznej z atomami ośrodka); dyfundując w strefie aktywnej mogą ulegać zderzeniom z atomami paliwa powodując jego rozszczepienie połączone z emisją nowej generacji neutronów; w ten sposób przy sprzyjających warunkach można uzyskać w reaktorze kontrolowaną reakcję łańcuchową.

W dalszej części artykułu zajmiemy się losem pojedynczego neutronu, od chwili gdy został spowolniony do energii termicznych do chwili gdy wszedł w reakcję jądrową z atomem ośrodka. Tego rodzaju analiza może odzwierciedlić nawet całokształt zjawisk występujących w strefie aktywnej reaktora jądrowego, przy założeniu dla niego nieskończonych wymiarów (prawdopodobieństwo ucieczki neutronu z reaktora = 0), przy założeniu że strefę jego wypełnia mieszanina moderatora i paliwa, którym jest U-235 (brak wychwytu rezonansowego przy moderacji) oraz jeżeli pominiemy rozszczepienie jąder paliwa przez neutrony szybkie, prawdopodobieństwo tego zjawiska jest niewielkie wynosi około 5% [4].

2. Aby omawiane zagadnienia wyrazić "językiem" teorii procesów stochastycznych wprowadzimy następujące oznaczenia i symbolikę

a) Wybrany do rozważań neutron (w chwili $t=0$) spowolniony do energii termicznych będziemy nazywać neutronem "w stanie 1".

b) Neutron termiczny pochłonięty przez atom paliwa lub moderatora (bez rozszazepienia) nazywać będziemy neutronem "w stanie 0" a tego typu reakcję jądrową "przejściem 1-0".

c) Proces rozszazepiania jąder paliwa połączony z generacją n neutronów będziemy nazywali przejściem 1- n . Przejście tego typu może być zrealizowane na wiele sposobów, w kilku generacjach; neutron ze stanu "1" rozmoży się dając w k -tym pokoleniu n neutronów.

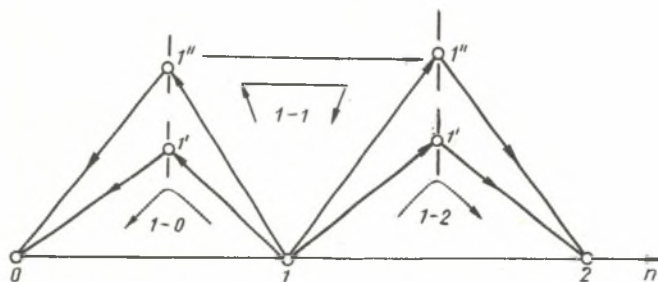
d) Dla uproszczenia matematycznej strony zagadnienia założymy w dalszym ciągu, że jednym możliwym przejściem podczas pojedynczej reakcji rozszazepienia jest emisja dwóch nowych neutronów (reakcja 1-2).

e) Jeżeli neutron po czasie t nie zajdzie w żadną z omawianych reakcji będziemy nazywać to przejściem 1-1, - procesem pozostania w reaktorze w stanie 1.

f) Podczas moderaacji i dyfuzji neutron może ulegać licznym zderzeniom sprężystym z atomami ośrodka (stany pośrednie $1'$, $1''$; $1'''$ ) nie będą one miały jednak wpływu na jego ostateczny los.

Pojedyncze przejścia pomiędzy poszczególnymi stanami obrazuje rys. 1.

Zmodelowany w ten sposób proces dyfuzji neutronów nazywany jest procesem MARKOWA.



Rys. 1. Przejścia 1-0 1-1 i 1-2, $\lambda_{1n} \neq 0$

3. Rozpatrzmy proces MARKOWA o skończonej liczbie stanów (0,1,2,.....n).

Przez $P_{1n}(t)$ oznaczymy prawdopodobieństwo przejścia od stanu 1 do stanu n , w czasie t . Ponieważ po czasie t neutron znajduje się na pewno w jednym ze stanów $1, 2, \dots, n$, więc dla prawdopodobieństw przejść zachodzi równość:

$$\sum_{i=0}^n P_{1n}(t) = 1 \quad (1)$$

Wprowadzimy tu jeszcze wielkość nazywaną [1] - intensywnością przejścia:

$$\lambda_{1n} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{1n}(t)}{t} \quad \text{dla } n \neq 1 \quad (2)$$

Parametr ten posiadający wymiar $[1/s]$ fizycznie oznacza prędkość wzrostu krzywej prawdopodobieństwa zajścia pewnego zjawiska z czasem. Praktycznie intensywność przyjmuje się za stałą, wynikającą z fizycznej analizy danego procesu. W omawianym przypadku podczas pojedynczej reakcji jądrowej neutron albo jest absorbowany, albo generuje dwa nowe neutrony.

Wynika stąd, że intensywność $\lambda_{1n} = 0$ dla $n > 2$.

Intensywności przejścia λ_{10} i λ_{11} w reaktorze jądrowym przyjęto za proporcjonalne do prędkości dyfundującego neutronu termicznego i makroskopowych przekrojów czynnych ośrodka na dane reakcje (obie te wielkości przyjęto dla pasma energii termicznych na stałe). Wobec tego:

$$\lambda_{1n} = v_{th} \sum_{1n} \left[\frac{1}{s} \right] \quad (3)$$

gdzie: $v_{th} \left[\frac{cm}{s} \right]$ - średnia prędkość neutronów termicznych.

$\sum_{1n} \left[\frac{1}{cm} \right]$ makroskopowy przekrój czynny na 1-n reakcję neutronową.

Dla przejść $1 - 0$, $1 - 1$, $1 - 2$, będzie więc:

$$\lambda_{10} = v_{th} \sum_{10} \quad (4)$$

$$\lambda_{12} = v_{th} \Sigma_{12} \quad (5)$$

$$\lambda_{11} = - v_{th} (\Sigma_{10} + \Sigma_{12}) \quad (6)$$

gdzie:

Σ_{10} - makroskopowy przekrój czynny paliwa i moderatora na pochłanianie,

Σ_{12} - makroskopowy przekrój czynny U-235 na rozszczepianie neutronami termicznymi

Intensywność pozostania wraz z pozostałymi musi oczywiście w sumie dać 0.

4. Możemy teraz przystąpić do obliczania poszczególnych prawdopodobieństw przejścia procesów $P_{1n}(t)$.

W tym celu posłużymy się równaniami KOŁOMOGOROWA. Dla procesu MARKOWA o skończonej (0,1,2,...n) liczbie stanów przyjmą one postać:

$$\frac{d}{dt} P_{1n}(t) = \sum_{s=0}^n \lambda_{1s} P_{s1}(t) \quad (7)$$

lub

$$\frac{d}{dt} P_{1n}(t) = \sum_{s=0}^n \lambda_{s1} P_{1s}(t)$$

Wprowadzenie tych równań można znaleźć w wielu [1],[2] książkach poświęconych procesom stochastycznym i teorii prawdopodobieństwa.

Otrzymamy więc w naszym przypadku dla obliczenia prawdopodobieństw przejścia układ równań różniczkowych liniowych. Przy rozwiązywaniu tego układu posłużymy się metodą funkcji tworzących. Niech $F(t,x)$ będzie funkcją tworzącą prawdopodobieństw $P_{1n}(t)$, a $\varphi(x)$ funkcją tworzącą intensywności λ_{1n}

$$F(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{1n}(t) x^n \quad (9)$$

Funkcją tworzącą $F(t, x)$ nazywamy [2] funkcję opisaną szeregiem potęgowym (9), gdzie $|x| \leq 1$.

Należy podkreślić, że

$$F(t, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{1n}(t) = 1 \quad (13)$$

więc szereg po prawej stronie równania (9) jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w przedziale $|x| \leq 1$. Funkcja tworząca prawdopodobieństw wyznacza jednoznacznie rozkład $P_{1n}(t)$, gdyż da się w jeden tylko sposób przedstawić jako szereg potęgowy.

Analogicznie

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^2 \lambda_{1n} x^n \quad (10)$$

Mamy więc

$$\varphi(x) = \lambda_{10} x^0 + \lambda_{11} x^1 + \lambda_{12} x^2 \quad (11)$$

$$\varphi(x) = v_{th} \left[\sum_{10}' - (\sum_{10}' + \sum_{12}') x + \sum_{12}' x^2 \right] \quad (12)$$

Równanie KOŁMOGOROWA z użyciem funkcji tworzącej przyjmie postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, x) = \varphi[F(t, x)] \quad (14)$$

czyli:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(t, x) = v_{th} \left[\sum_{10}' - (\sum_{10}' + \sum_{12}') F(t, x) + \right. \\ \left. + \sum_{12}' F^2(t, x) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Równanie to należy rozwiązać przy warunku początkowym:

$$F(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{1n}(0) x^n = x \quad (16)$$

ponieważ w chwili $t=0$, neutron nie znajdzie jeszcze w żadną reakcję typu $1-n(n \neq 1)$, natomiast z całą pewnością pozostanie w reaktorze w stanie 1, w stanie początkowym. Będzie więc $P_{10}(0) = P_{12}(0) = \dots = P_{1n}(0) = 0$, natomiast $P_{11}(0) = 1$.

Równanie (15) jest ze względu na zmienną t równaniem RICCATIego. Łatwo sprawdzić, że jego całką szczególną będzie

$$F_1(t, x) = 1 \tag{17}$$

otrzymamy bowiem po wstawieniu do równania (15):

$$0 = v_{th} (\sum_{10} - \sum_{10} - \sum_{12} + \sum_{12}) \tag{18}$$

Równanie (15) staje się równaniem liniowym po podstawieniu:

$$F(t, x) = \frac{1}{U(t, x)} + F_1(t, x); \quad U(t, x) \neq 0 \tag{19}$$

oraz:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, x) = - \frac{\partial}{\partial t} U(t, x) \frac{1}{U^2(t, x)} \tag{20}$$

Po podstawieniu (19) i (20), równanie (15) przyjmie postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, x) - v_{th} (\sum_{10} - \sum_{12}) U(t, x) = -v_{th} \sum_{12} \tag{21}$$

Należy tu podkreślić, że równanie (21) jest równaniem cząstkowym; rozwiążemy je jako zwyczajne, traktując stałą całkowania otrzymaną z rozwiązania (21), jako funkcję x .

Całką równania (21) będzie:

$$U(t, x) = \frac{\sum_{12}}{\sum_{10} - \sum_{12}} + C(x) e^{v_{th}(\sum_{10} - \sum_{12})t} \tag{22}$$

Podstawimy otrzymaną wartość do przewidywanej w postaci (19) całka ogólnej równania RICCATIego, która po przekształceniach przyjmie wartość:

$$F(t, x) = \frac{\sum_{10} + c(x)(\sum_{10} - \sum_{12}) e^{v_{th}(\sum_{10} - \sum_{12})t}}{\sum_{12} + c(x)(\sum_{10} - \sum_{12}) e^{v_{th}(\sum_{10} - \sum_{12})t}} \quad (23)$$

Z warunku (16) otrzymamy:

$$c(x) = \frac{\sum_{10} - \sum_{12} x}{\sum_{10} - \sum_{12} (x - 1)} \quad (24)$$

Wobec tego:

$$F(t, x) = \frac{\sum_{10} (1 - x) + (\sum_{12} x - \sum_{10}) e^{v_{th}(\sum_{10} - \sum_{12})t}}{\sum_{12} (1 - x) + (\sum_{12} x - \sum_{10}) e^{v_{th}(\sum_{10} - \sum_{12})t}} \quad (25)$$

Po podzieleniu licznika przez mianownik i rozwinięciu reszty dzielenia w szereg potęgowy będzie:

$$F(t, x) = \frac{\sum_{10} - \sum_{10} e^{v_{th}(\sum_{10} - \sum_{12})t}}{\sum_{12} - \sum_{10} e^{v_{th}(\sum_{10} - \sum_{12})t}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sum_{10}}{\sum_{12}}\right)^2 e^{v_{th}(\sum_{10} - \sum_{12})t} \frac{[1 - e^{v_{th}(\sum_{10} - \sum_{12})t}]^{n-1}}{[1 - \frac{\sum_{10}}{\sum_{12}} e^{v_{th}(\sum_{10} - \sum_{12})t}]^{n+1}} \cdot x^n \quad (26)$$

Porównując otrzymaną zależność z równaniem (9) znajdziemy szukane funkcje określające poszczególne prawdopodobieństwa przejścia:

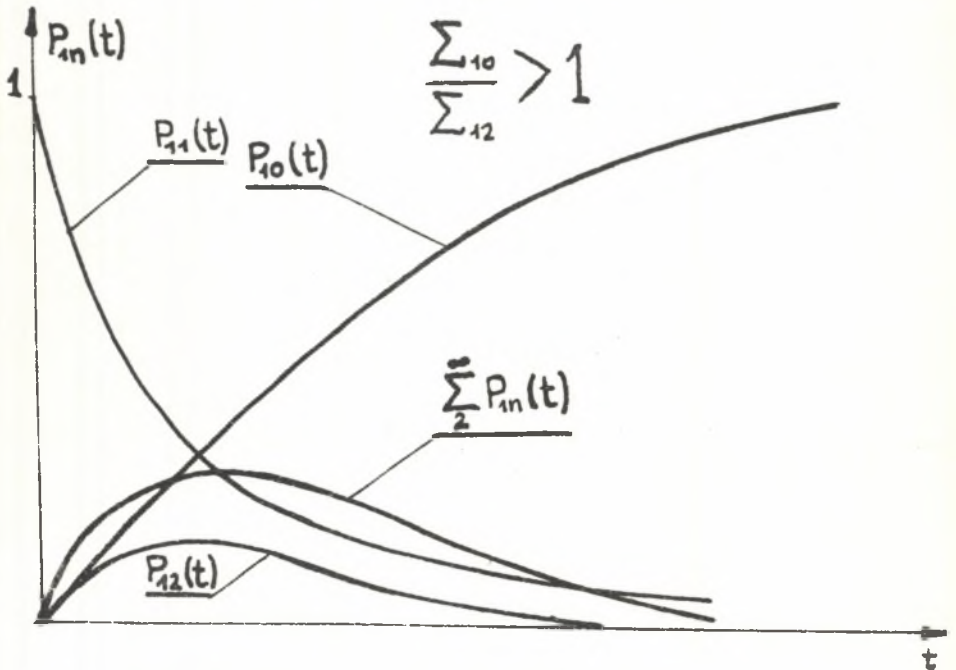
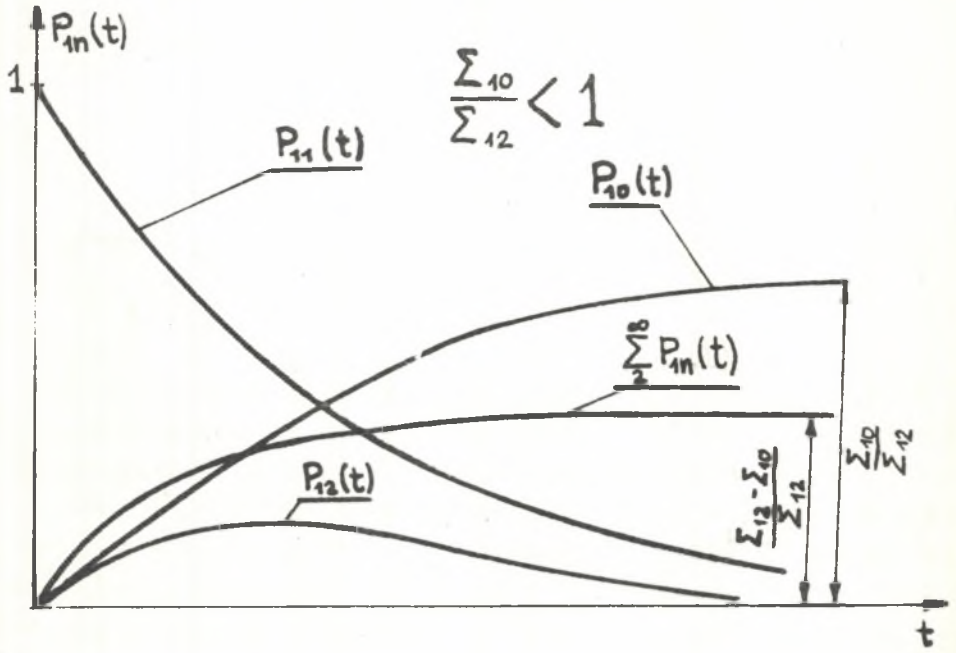
$$P_{10}(t) = \frac{\sum_{10} - \sum_{10} e^{v_{th}(\sum_{10} - \sum_{12})t}}{\sum_{12} - \sum_{10} e^{v_{th}(\sum_{10} - \sum_{12})t}} \quad (27)$$

$$P_{11}(t) = \left(1 - \frac{\Sigma_{10}}{\Sigma_{12}}\right)^2 e^{v_{th}(\Sigma_{10} - \Sigma_{12})t} \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{\Sigma_{10}}{\Sigma_{12}} e^{v_{th}(\Sigma_{10} - \Sigma_{12})t}\right]^2} \quad (28)$$

$$P_{1n}(t) = \left(1 - \frac{\Sigma_{10}}{\Sigma_{12}}\right)^2 e^{v_{th}(\Sigma_{10} - \Sigma_{12})t} \frac{\left[1 - e^{v_{th}(\Sigma_{10} - \Sigma_{12})t}\right]^{n-1}}{\left[1 - \frac{\Sigma_{10}}{\Sigma_{12}} e^{v_{th}(\Sigma_{10} - \Sigma_{12})t}\right]^{n+1}} \quad (29)$$

Łatwo sprawdzić, że suma występująca w zależności (26), przedstawia sobą szereg funkcyjny zbieżny dla wszystkich $t \in (0, \infty)$ ze względu na to, że omawiany szereg jest szeregiem geometrycznym, a $|x| \leq 1$. Prosty rachunek wykazuje, że sumą tego szeregu traktowanego łącznie z członem $P_{10}(t)$ jest 1.

5. Aby zorientować się w charakterze przebiegu krzywych prawdopodobieństwa przejść w jednorodnych reaktorach jądrowych dokonano obliczeń dla kilku stref aktywnych wypełnionych mieszaniną U-235 i grafitu. Poszczególne strefy aktywne różniły się stosunkiem liczby atomów grafitu do liczby atomów paliwa, a więc stosunkiem $\Sigma_{10} : \Sigma_{12}$. Danych do obliczeń poszczególnych przekrojów czynnych zaczerpnięto z publ. [3] i [4]. Obliczane były $P_{10}(t)$ i $P_{11}(t)$. Pozostałe prawdopodobieństwa $P_{1n}(t)$ traktowano łącznie i wykreślano je jako dopełnienie $P_{10}(t)$ i $P_{11}(t)$ do 1. Ponieważ charakterystyki były dla obliczonych stref bardzo podobne w zakresach $\Sigma_{10} : \Sigma_{12} > 1$ i $\Sigma_{10} : \Sigma_{12} < 1$, więc podajemy ich orientacyjny przebieg dla powyższych przypadków zaznaczając jedynie charakterystyczne cechy i wartości asymptotyczne. Należy podkreślić, że przypadek $\Sigma_{10} : \Sigma_{12} = 1$ nie może być rozważony przy pomocy zależności (27), (28) (29) - ponieważ dla tego przypadku zmienia się wyjściowe równanie (15).



Rys. 2. Prawdopodob. przejść w funkcji czasu

6. Na zakończenie zajmiemy się porównaniem otrzymanych wyników z innymi metodami obliczeń reaktorów jądrowych. Niemożliwym jest tu przeprowadzenie porównania bezpośredniego, ponieważ nie stosowano dotychczas równań KOŁMOGOROWA przy zagadnieniach krytyczności reaktorów jądrowych - posługujemy się tu przede wszystkim współczynnikiem mnożenia k . Wykażemy, że warunek krytyczności wynikający z użycia k oraz z przebiegu krzywych $P_{1n}(t)$ jest ten sam, jeżeli dla obu przypadków przyjmą założenia, że w wyniku pojedynczego rozszczepienia jądra paliwa emitowane są dwa nowe neutrony. Z analizy krzywych $P_{1n}(t)$ wynika bezpośrednio, że przy stosunku $\Sigma_{10} : \Sigma_{12} > 1$ - reakcja łańcuchowa nie zajdzie, ponieważ ze wzrostem czasu $P_{1n}(t)$ dla $n \geq 1$ maleje do zera. Przeciwnie będzie gdy $\Sigma_{10} : \Sigma_{12} < 1$; wówczas po pewnym czasie ustali się asymptotyczna wartość $P_{1n}(t)$ dla $n = 1$, czyli przynajmniej "k" z "m" neutronów pierwotnych zrealizuje samopodtrzymującą się reakcję jądrową. Dla nieskończonego reaktora na U-235 współczynnik mnożenia k określa [4] zależność:

$$k = \nu \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{10} + \Sigma_{12}} \quad (30)$$

gdzie:

ν przeciętna ilość neutronów uzyskana w wyniku pojedynczego rozszczepienia.

Przyjmując $\nu = 2$ oraz dzieląc licznik i mianownik wyrażenia przez Σ_{12} otrzymamy:

$$k = \frac{2}{1 + \frac{\Sigma_{10}}{\Sigma_{12}}} \quad (31)$$

Z analizy wzoru (31) wynika bezpośrednio, że przy $\Sigma_{10} : \Sigma_{12} > 1$, współczynnik k będzie mniejszy od 1, zaś gdy $\Sigma_{10} : \Sigma_{12} < 1$, $k > 1$. Podobieństwo otrzymanych wyników jest uwarunkowane przyjęciem przy obliczaniu k , $\nu = 2$. Badania wykazały, że w przypadku rozszczepienia jąder uranu $\nu = 2,5$, w związku z czym

nawet przy stosunku $\Sigma_{10} \Sigma_{12} = 1,5 > 1$, nieskończony reaktor na U-235 będzie krytyczny - wobec czego analiza krytyczności w oparciu o obliczone wyżej $P_{1n}(t)$ daje wyniki zaniżone.

Lepszą zbieżność uzyska się dla reaktorów o skończonych wymiarach, gdy część neutronów ucieka z układu. Wprowadzając efektywną wartość ν' , jako iloczyn 2,5 x prawdopodobieństwo uniknięcia ucieczki z układu, można rozpatrywać układ skończony jako układ o nieskończonych rozmiarach, w którym do obliczenia k użyjemy wartości ν'_{ef} . Zbieżność wyników z analizą krzywych $P_{1n}(t)$ będzie dużo lepsza.

Za najistotniejszy wniosek wynikający z przeprowadzonych w niniejszej pracy obliczeń uważam fakt, że dyfundujący w reaktorze neutron termiczny nie jest przez cały czas jednakowo "podatny" na określone reakcje jądrowe (mimo praktycznie w tym paśmie energii stałych przekrojów czynnych); co więcej krzywa prawdopodobieństw $P_{1n}(t)$ wykazuje wyraźne ekstremum, czyli w pewnym przedziale czasu zajście reakcji jądrowej między stermizowanym neutronem a atomem paliwa jest szczególnie prawdopodobne.

LITERATURA

- [1] Elementy nowoczesnej matematyki dla inżynierów - Praca Zbiorowa, Wrocław 1964.
- [2] FISZ Marek: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka PWN 1957.
- [3] SWIERZAWSKI T.J.: Zbiór zadań z teorii reaktorów jądrowych Politechnika Śląska - skrypt.
- [4] GLEADTONE-EDLUND: Teoria reaktorów jądrowych 1957.

АНАЛИЗ ДИФФУЗИИ ТЕРМИЧЕСКИХ НЕЙТРОНОВ В ЯДЕРНОМ РЕАКТОРЕ
НА ОСНОВАНИИ ТЕОРИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Р е з ю м е

Статья является попыткой применения теории стохастических процессов к исследованию "судьбы" термического нейтрона. Статистический характер выступающих явлений позволяет сделать модель реакторных процессов так, чтобы отвечали они условиям процессов Маркова. Соответствующие уравнения Колмогорова решены методом производящей функции. Таким образом получено распределение вероятностей процессов как функции времени.

ANALYSIS OF THERMIC NEUTRONS DIFFUSION IN THE NUCLEAR REACTOR
ON THE GROUND OF STOCHASTIC PROCESSES THEORY

S u m m a r y

The paper is an attempt to apply the theory of stochastic processes to the investigation of the thermic neutron in the active zone of the nuclear reactor. This process has been modelled so that it should fulfil the conditions of Markov processes. The adequate Kolmogorow's equations have been solved. These searched probability distribution of individual processes in time function has been.