STANISŁAW OCHOŃSKI
Katedra Geometrii Wykreślnej

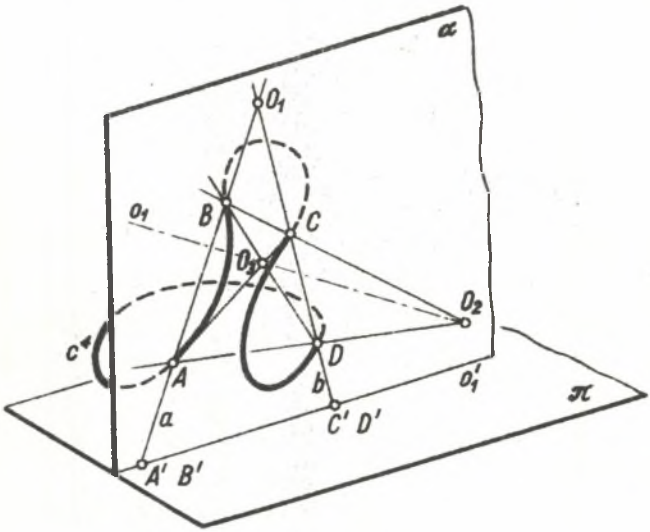
KONSTRUKCJA PUNKTÓW PODWÓJNYCH RZUTU ŚRODKOWEGO KRZYWEJ PRZESTRZENNEJ RZĘDU CZWARTEGO GATUNKU PIERWSZEGO

Krzywą przestrzenną rzędu czwartego, gatunku pierwszego będziemy nazywali krzywą bikwadratową i oznaczali przez c^4.
Rzutem środkowym krzywej bikwadratowej na płaszczyznę jest na ogół krzywa płaska czwartego rzędu z dwoma punktami podwójnymi.
W przypadku gdy środek rzutów jest punktem krzywej c^4, rzut jest krzywą płaską rzędu trzeciego.
Jeżeli środek rzutów jest jednym z czterech wierzchołków powierzchni stożkowych należących do pęku powierzchni drugiego stopnia, dla którego krzywa bikwadratowa jest krzywą podstawową (bazą pęku) to jej rzut jest krzywą stopnia drugiego.

W artykule tym podamy konstrukcję punktów podwójnych rzutu środkowego krzywej bikwadratowej na płaszczyznę w oparciu o dwie niezdegenerowane powierzchnie drugiego stopnia należące do pęku powierzchni, którego bazą jest rozważana krzywa c^4.

Zauważmy, że na dowolnej płaszczyźnie α (nie będącej ścianą czworościanu,którego wierzchołkami są wierzchołki powierzchni stożkowych należących do pęku powierzchni), która przecina krzywą bikwadratową w czterech punktach rzeczywistych ABCD, istnieją trzy takie punkty O_i, z których rzucona owa krzywa na dowolną płaszczyznę $\pi \neq \alpha$ i $\pi \not\ni O_i$ jest krzywą płaską czwartego rzędu z dwoma punktami podwójnymi (rys. 1).
Owe środki rzutów O_i $(i = 1,2,3)$ są punktami przekątnymi czworokąta zupełnego ABCD wpisanego z rozważaną krzywą bikwadratową.

Wierzchołki ABCD tego czworokąta zupełnego są punktami podstawowymi pęku stożkowych, w których płaszczyzna α przecina pęk powierzchni drugiego stopnia o krzywej podstawowej c^4.



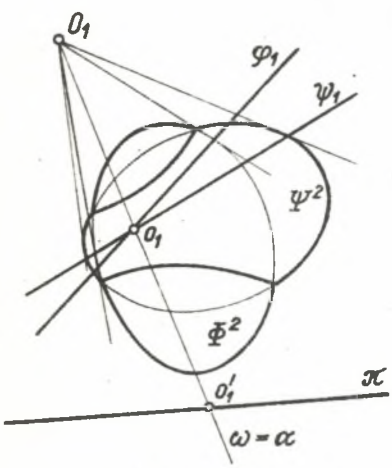
Rys. 1

Z uwagi na to, że wspólne biegunowe dowolnego punktu O_i ($i = 1,2,3$) względem stożkowych pęku przechodzą przez dwa pozostałe punkty O_i, punkty te są punktami podwójnymi trzech zdegenerowanych stożkowych należących do pęku stożkowych przechodzących przez punkty ABCD.
Rzucając np. z punktu O_1 krzywą c^4 na płaszczyznę π stwierdzamy, że rzut o_1' biegunowej o_1 punktu O_1 względem stożkowych pęku zawiera dwa punkty podwójne $A' = B'$ i $C' = D'$ rzutu owej krzywej.
Pozostałe punkty rzutu $(c^4)'$ są obrazami pojedynczych punktów krzywej c^4.

Jeżeli jeden spośród tych trzech środków rzutów O_i ($i = 1,2,3$) jest dany np. O_1, to konstrukcja dwóch pozostałych środków O_i ($i = 2,3$) sprowadza się do określenia takiej płaszczyzny α wiązki płaszczyzn o wierzchołku O_1, która prze-

cianałaby krzywą bikwadratową w punktach ABCD tworzących czworokąt zupełny, dla którego punkt O_1 byłby jednym z punktów przekątnych.
Ponieważ punkt O_1 nie jest wierzchołkiem stożka należącego do pęku powierzchni drugiego stopnia o bazie c^4, to w tej wiązce płaszczyzn istnieje tylko jedna taka płaszczyzna α, która spełnia nałożone warunki. Płaszczyzna ta określona jest przez punkt O_1 oraz wspólną biegunową o_1 punktu O_1 względem stożkowych, w których przecina pęk powierzchni drugiego stopnia o bazie c^4.

Stożkowe te tworzą pęk stożkowych, którego podstawą są punkty ABCD przecięcia krzywej bikwadratowej płaszczyzną $\alpha = (O_1, o_1)$.
Prosta o_1 przecina każdą z tych stożkowych w parze punktów, będących na mocy znanego twierdzenia parami inwolucyjnymi szeregu inwolucyjnego, dla którego prosta o_1 jest podstawą.
Punkty podwójne (zjednoczone) tak otrzymanego szeregu inwolucyjnego na prostej o_1 wraz z danym punktem O_1 są wierzchołkami wspólnego trójkąta biegunowego względem pęku stożkowych.

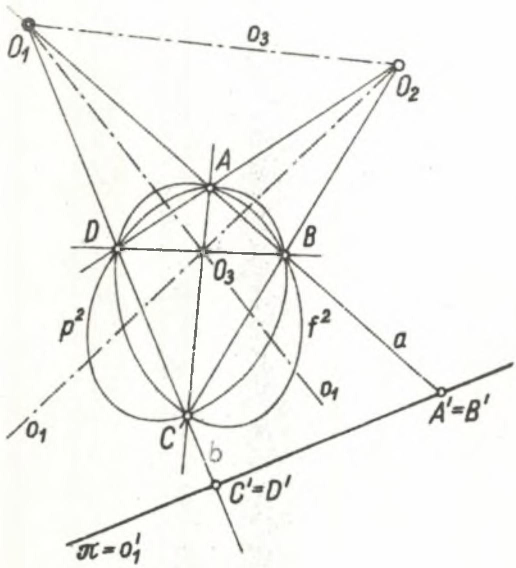


Rys. 2

W celu określenia owej prostej o_1, wyróżnijmy z pęku powierzchni drugiego stopnia o krzywej podstawowej c^4, dwie niezdegenerowane powierzchnie Φ^2 i Ψ^2 (rys. 2).

Wyznaczmy z kolei płaszczyzny biegunowe φ_1 i ψ_1 punktu O_1 względem powierzchni Φ^2 i Ψ^2.
Jeżeli punkt O_1 nie jest wierzchołkiem powierzchni stożkowej należącej do rozważanego pęku powierzchni dru-

giego stopnia, to płaszczyzny φ_1 i ψ_1 przecinają się w prostej, którą oznaczmy przez o_1.



Rys. 3

Płaszczyzna ω określona przez dany punkt O_1 i uprzednio skonstruowaną prostą o_1 powierzchnię Φ^2 przecina w stożkowej f^2, a powierzchnię Ψ^2 w stożkowej p^2 (rys. 3).

Z łatwością wykażemy, że prosta o_1 jest wspólną biegunową punktu O_1 względem stożkowych f^2 i p^2.

Dowolna płaszczyzna ε przechodząca przez punkt O_1 powierzchnię Φ^2 przecina w stożkowej e^2, a płaszczyznę biegunową φ_1 punktu O_1 względem powierzchni Φ^2 w prostej e.

Prosta e na mocy znanego twierdzenia jest biegunową punktu O_1 względem stożkowej e^2.

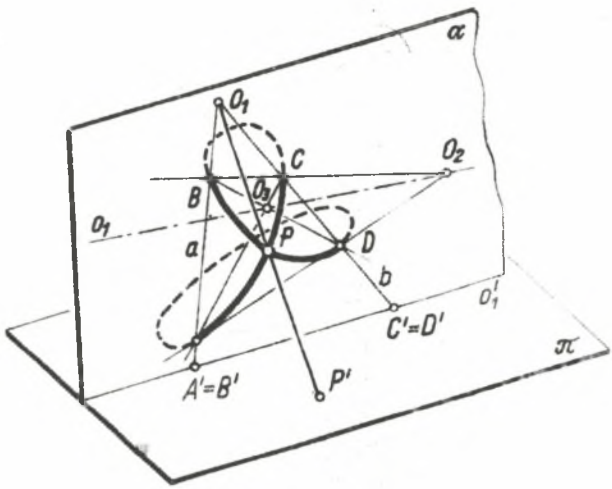
Ta sama płaszczyzna ε powierzchnię Ψ^2 przecina w stożkowej e_1^2, zaś płaszczyznę biegunową ψ_1 punktu O_1 względem powierzchni Ψ^2 w prostej e_1.

Prosta ta jest biegunową punktu O_1 względem stożkowej e_1^2.

Ponieważ prosta o_1 jest wspólną prostą płaszczyzn biegunowych φ_1 i ψ_1 punktu O_1 względem powierzchni Φ^2 i Ψ^2, a więc prosta o_1 jest zarazem wspólną biegunową punktu O_1 względem stożkowych f^2 i p^2.

A zatem płaszczyzna ω określona przez punkt O_1 i prostą o_1 jest szukaną płaszczyzną α wiązki płaszczyzn o wierzchołku O_1, która krzywą c^4 przecina w wierzchołkach ABCD czwo-

rokąta zupełnego wpisanego w tę krzywą, dla którego punkt O_1 jest jednym z punktów przekątnych (rys. 3).
Pozostałe dwa punkty przekątne leżą na prostej o_1. Punkt O_1 jest zarazem punktem podwójnym zdegenerowanej stożkowej należącej do pęku stożkowych przechodzących przez punkty ABCD. Łącząc punkty AB i CD z punktem O_1 otrzymujemy szukane boki a i b czworokąta zupełnego, którego wierzchołkami są punkty ABCD przecięcia stożkowych f^2 i p^2, dla których znane są wierzchołki wspólnego trójkąta biegunowego.
Boki te są promieniami rzucającymi punkty AB i CD krzywej c^4 na płaszczyznę π z punktu O_1.



Rys. 4

Podana konstrukcja punktów podwójnych rzutu środkowego krzywej bikwadratowej na płaszczyznę jest również ważna w przypadku gdy dana jest krzywa bikwadratowa z jednym punktem podwójnym (rys. 4).
Trzecim punktem podwójnym rzutu środkowego tej krzywej jest rzut jej punktu podwójnego.

LITERATURA

[1] Hilbert D. i S. Cohn - Vossen.: Geometria poglądowa - Warszawa 1956 r.

[2] Lewenberg A.: Geometria rzutowa tworów pierwiastkowych - W-wa 1902 r.

[3] Plamitzer A.: Geometria rzutowa układów płaskich i powierzchni drugiego stopnia. - Warszawa 1938 r.

[4] Otto E.: Geometria wykreślna - Warszawa 1954 r.

[5] Ochoński St.: Konstrukcja punktów przecięcia dwóch stożkowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Matematyka-Fizyka Z. 10, Gliwice 1966 r.

КОНСТРУКЦИЯ ДВОЙНЫХ ТОЧЕК ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

Р е з ю м е

В статье представлено конструкцию двойных точек центральной проекции пространственной кривой четвёртого порядка на плоскость. Этот вопрос решено на основании двух поверхностей второго порядка, принадлежащих пучку поверхностей, основанием которого является рассматриваемая кривая.

ÜBER EINE KONSTRUKTION DER DOPPELPUNKTE DER ZENTRALPROJEKTION VON RAUMKURVEN 4-er ORDNUNG

Zusammenfassung

Es wurde eine Konstruktion der Doppelpunkte der Raumkurve 4-er Ordnung in Zentralprojektion erwogen.
Die Konstruktion ist mit Hilfe zweier Flächen 2-er Ordnung ausgeführt, die zu einem Flächenbügel mit betrachteter Raumkurve als Bügelbasis gehören.