ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: GÓRNICTWO z. 219 Nr kol. 1234

Stanisław **KOWALIK**
Katedra Organizacji i Ekonomiki Górnictwa
Politechniki Śląskiej

WYKORZYSTANIE TEORII ZBIORÓW ROZMYTYCH DO PODEJMOWANIA DECYZJI

Streszczenie. W pracy omówiono podstawowe pojęcia teorii zbiorów rozmytych. Te pojęcia wykorzystano do podejmowania decyzji. Zdefiniowano decyzję rozmytą opierając się na celu rozmytym i ograniczeniu rozmytym. Podano też określenie decyzji optymalnej.

USAGE OF A FUZZY SETS THEORY IN DECISION MAKING PROCESSES

Summary. The basic ideas of the fuzzy sets theory have been presented in the paper. These ideas are being used in decision making processes. A definition of a fuzzy decision, and an idea of an optimal decision have also been presented.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ РАЗМЫТЫХ МНОЖЕСТВ ДЛЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Резюме. В работе представлены основные понятия теории расплывчатых множеств. Эти понятия были использованы для принятия решений. Сформулировано размытое решение на основании размытой цели и размытого ограничения. Дано также определение оптимального решения.

1. WSTĘP

Informacje dotyczące otaczającego nas świata często są nieprecyzyjne, niepełne lub niepewne. Powstała niedawno teoria zbiorów rozmytych stwarza możliwość opisu formalnego tej informacji nieprecyzyjnej [2; 14; 20; 30; 48]. Te matematyczne metody teorii zbiorów rozmytych pozwalają pełniej i w sposób bardziej naturalny opisać zjawiska świata rzeczywistego. Sytuacje niepewne w podejmowaniu decyzji obawiają się tutaj poprzez niejednoznaczność i nieprecyzyjność opisu warunków, w jakich ma być podjęta decyzja. Innymi słowy opis otaczającego nas świata jest niedokładny, a my musimy podejmować pewne decyzje. Teoria zbiorów rozmytych, jak na razie, nie jest jednoznaczną strukturą matematyczną. "Jest to raczej rodzina teorii o różnym stopniu ogólności i różnych specyficznych możliwościach zastosowań" [2]. My będziemy wzorowali się na klasycznej teorii zbiorów rozmytych opracowanej przez L.A. Zadeha [48]. Po raz pierwszy w 1965 roku Zadeh w swojej pracy [48] określił pojęcie rozmytości (fuzziness) oraz sformułował podstawowe pojęcia dotyczące zbiorów rozmytych (fuzzy sets). Na tych pojęciach opierają się reguły tzw. logiki rozmytej. W 1970 roku wspólnie z Bellmanem opublikował pracę [1] o podejmowaniu decyzji w warunkach rozmytych. W następnych latach teoria zbiorów rozmytych szybko się rozbudowała i zrobiła błyskawiczną karierę. W 1973 roku Zadeh w swojej pracy [50] podaje podstawowe pojęcia i reguły logiki rozmytej. Warto w tym miejscu wspomnieć, że na wiele lat przed wprowadzeniem pojęcia zbioru rozmytego, polski matematyk Jan Łukasiewicz stworzył podstawy logiki wielowartościowej [34; 35]. W związku z rozwojem nowej teorii, prace Łukasiewicza budzą ponowne zainteresowanie [22; 33; 36; 44; 47]. Teoria zbiorów rozmytych wzoruje się na klasycznej teorii zbiorów z uwzględnieniem tzw. funkcji przynależności elementu do zbioru. W związku z tym wprowadza się specjalny zapis zbiorów rozmytych oraz określa się działania na tych

zbiorach. Wprowadza się też pojęcie liczb rozmytych oraz odpowiednie operatory arytmetyczne. Podejmowanie decyzji w rozmytych warunkach otoczenia polega na odpowiednim wnioskowaniu z przesłanek o charakterze rozmytym. Prezentowana teoria znalazła już szereg zastosowań w różnych dziedzinach. Na przykład prace [25; 26; 45] dotyczą topologii indukowanej w zbiorach rozmytych; prace [18; 21; 32] omawiają miarę w zbiorach rozmytych; a praca [31] rozważa struktury algebraiczne w tych zbiorach. Z zakresu sterowania ukazały sie prace [6; 7; 8, 10; 11; 12; 23; 39; 40]. Zastosowania w mechanice przedstawione sa w pracach [5; 43], a w budowie modeli sieciowych w pracach [3; 4]. Zagadnienie stabilności z wykorzystaniem zbiorów rozmytych przedstawiono w publikacji [38]. Rozważa się też pojęcie entropii z wykorzystaniem tych zbiorów [15; 16; 17]. Teoria ta ma też zastosowanie w takich dziedzinach, jak organizacja [27; 28]; wnioskowanie [9; 13; 37]; podejmowanie decyzji [10; 13; 14; 29; 46]; diagnozowanie medyczne [41; 42; 49].

2. ZBIORY ROZMYTE

W klasycznej teorii zbiorów każdy zbiór ma jednoznacznie określone granice oddzielające elementy należące do niego od nie należących. Jeżeli mamy zbiór A i element x, to możemy stwierdzić, czy element x należy do zbioru A, czy też nie należy. Oznaczmy przez X przestrzeń wszystkich rozpatrywanych elementów x. W tej przestrzeni jest określona funkcja przynależności elementu x do zbioru A [2; 14; 20; 30]. Ta funkcja zdefiniowana jest następująco

$$\forall \; x \in X, \qquad \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in A \\ 0 & \text{dla } x \notin A. \end{cases} \tag{1}$$

Funkcja przynależności $\mu_A(x)$ odwzorowuje przestrzeń X w zbiór $\{0,1\}$. W wielu przypadkach, gdy operuje się pojęciami charakteryzowanymi w sposób nieprecyzyjny, występują trudności w określeniu przynależności elementu do danego zbioru. Funkcja przynależności określona wzorem (1) jest wtedy niewygodna i mocno ograniczająca zastosowanie jej do sytuacji niedokładnie określonych. Zadeh w swej pracy [48] wprowadził pojęcie zbioru rozmytego. Zbiór rozmyty ma taką własność, że jego funkcja przynależności odwzorowuje przestrzeń X w odcinek [0,1]. Jest to więc rozszerzenie przeciwdziedziny funkcji przynależności określonej wzorem (1) na odcinek [0,1].

Definicja 1 [13]

Zbiorem rozmytym A określonym na przestrzeni X jest zbiór uporządkowanych par:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \text{ dla } x \in X\}, \tag{2}$$

gdzie $\mu_A(x)$ jest funkcją przynależności zbioru A.

Przykład 1

Niech X oznacza zbiór cyfr {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},
A - oznacza cyfrę średnią,
B - oznacza cyfrę dużą.

Funkcje przynależności zbiorów rozmytych A i B mogą być następujące:

$\mu_A(0) = 0$,	$\mu_B(0) = 0$,
$\mu_A(1) = 0$,	$\mu_B(1) = 0$,
$\mu_A(2) = 0{,}4$,	$\mu_B(2) = 0$,
$\mu_A(3) = 0{,}7$,	$\mu_B(3) = 0$,
$\mu_A(4) = 1$,	$\mu_B(4) = 0$,
$\mu_A(5) = 1$,	$\mu_B(5) = 0{,}3$,
$\mu_A(6) = 0{,}8$,	$\mu_B(6) = 0{,}6$,
$\mu_A(7) = 0{,}5$,	$\mu_B(7) = 0{,}8$,
$\mu_A(8) = 0$,	$\mu_B(8) = 1$,
$\mu_A(9) = 0$,	$\mu_B(9) = 1$.

Przykład 2

Niech X = R jest przestrzenią liczb rzeczywistych, a A zbiorem liczb dużo wiekszych od 100. Funkcje przynależności zbioru A możemy określić następująco

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 100, \\ \dfrac{1}{1+100(x-100)^{-1}} & \text{dla } x \rangle 100. \end{cases}$$

Definicja 2

Nośnikiem zbioru A nazywamy zbiór U elementów przestrzeni X, dla których $\mu_A(x) > 0$. Oznaczamy go przez supp A (ang. support)

$$\text{supp } A = \{x : \mu_A(x) > O\}. \tag{3}$$

Definicja 3

Wysokością zbioru A jest kres górny funkcji $\mu_A(x)$, tzn.

$$\sup_{x \in U} \mu_A(x). \tag{4}$$

Definicja 4

Zbiór rozmyty nazywamy znormalizowanym, gdy jego wysokość jest równa 1.

W celu uproszczenia zapisu zbioru rozmytego L.A. Zadeh wprowadził specjalną notację do teorii zbiorów rozmytych [2], [48]. Zbiory rozmyte, których nośniki są nieprzeliczalne, zapisujemy w postaci

$$A = \int_U \mu_A(x)/x. \tag{5}$$

Jeżeli nośnik jest przeliczalny, to zbiór rozmyty zapisujemy w postaci

$$A = \sum_i \mu_A(x_i)/x_i. \tag{6}$$

Jeśli elementy nośnika U nie są liczbami, to wzór (6) modyfikujemy do postaci

$$A = \sum_i \mu_A(x_i)x_i. \tag{7}$$

Tak więc zbiory A i B przedstawione w przykładzie 1 można zapisać w postaci

$$A = 0{,}4/2 + 0{,}7/3 + 1/4 + 1/5 + 0{,}8/6 + 0{,}5/7,$$

$$B = 0{,}3/5 + 0{,}6/6 + 0{,}8/7 + 1/8 + 1/9.$$

Należy zwrócić uwagę na to, że w takim zapisie biorą udział jedynie elementy należące do nośnika rozpatrywanego zbioru.

W teorii zbiorów rozmytych wprowadza się też pojęcia zawierania się i równości zbiorów.

Definicja 5

Zbiór rozmyty A zawiera się w zbiorze rozmytym B ($A \subseteq B$) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in X} \mu_A(x) \leq \mu_B(x). \tag{8}$$

Definicja 6
Zbiór rozmyty A jest równy zbiorowi rozmytemu B (A = B) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in X} \mu_A(x) = \mu_B(x). \tag{9}$$

3. OPERATORY ROZMYTE

3.1. Suma

Definicja 7
Sumą zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór A∪B określony następująco

$$A \cup B = \int_X \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) / x. \tag{10}$$

Funkcja przynależności tego wyraża się wzorem

$$\forall_{x \in X} \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x). \tag{11}$$

3.2. Iloczyn (przecięcie)

Definicja 8
Iloczynem zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór A∩B określony następująco

$$A \cap B = \int_X \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) / x. \tag{12}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem

$$\forall_{x \in X} \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x). \tag{13}$$

3.3. Dopełnienie (uzupełnienie)

Definicja 9

Uzupełnieniem zbioru rozmytego A nazywamy zbiór A′ określony następująco

$$A' = \int_X (1 - \mu_A(x)) / x. \tag{14}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem

$$\forall_{x \in X} \mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x). \tag{15}$$

3.4. Suma ograniczona

Definicja 10

Sumą ograniczoną zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór A⊕B określony następująco

$$A \oplus B = \int_X \min(\mu_A(x) + \mu_B(x), 1) / x. \tag{16}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem

$$\forall_{x \in X} \mu_{A \oplus B}(x) = \min(\mu_A(x) + \mu_B(x), 1). \tag{17}$$

3.5. Różnica ograniczona

Definicja 11

Różnicą ograniczoną zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór $A \bigcirc B$ określony następująco

$$A \bigcirc B = \int_X \max(\mu_A(x) - \mu_B(x), 0) / x. \tag{18}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem

$$\forall_{x \in X} \mu_{A \bigcirc B}(x) = \max(\mu_A(x) - \mu_B(x), 0). \tag{19}$$

3.6. Iloczyn ograniczony

Definicja 12

Iloczynem ograniczonym zbiorów rozmytych A i B nazywamy $A \odot B$ określony następująco

$$A \odot B = \int_X \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1) / x. \tag{20}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem

$$\forall_{x \in X} \mu_{A \odot B}(x) = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1). \tag{21}$$

3.7. Suma algebraiczna

Definicja 13

Sumą algebraiczną zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór $A \dot{+} B$ określony następująco

$$A \dot{+} B = \int_X (\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)) / x. \tag{22}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem

$$\forall_{x \in X} \mu_{A \dot{+} B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x). \tag{23}$$

3.8. Iloczyn algebraiczny

Definicja 14

Iloczynem algebraicznym zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór AB określony następująco

$$AB = A \cdot B = \int_X (\mu_A(x)\mu_B(x)) / x. \tag{24}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem

$$\forall_{x \in X} \mu_{AB}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x). \tag{25}$$

3.9. Suma drastyczna

Definicja 15

Sumą drastyczną zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór $A \dot{\vee} B$ określony następująco

$$A \dot{\vee} B = \int_X (\mu_{A \dot{\vee} B}(x)) / x. \tag{26}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem

$$\forall_{x \in X} \mu_{A \dot{\vee} B}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \mu_A(x) > 0 \text{ i } \mu_B(x) > 0, \\ \mu_A(x) & \text{dla } \mu_B(x) = 0, \\ \mu_B(x) & \text{dla } \mu_A(x) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

3.10. Iloczyn drastyczny

Definicja 16

Iloczynem drastycznym zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór $A \hat{\cdot} B$ określony następująco

$$A \hat{\cdot} B = \int_X (\mu_{A \hat{\cdot} B}(x)) / x. \tag{28}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem

$$\forall_{x \in X} \mu_{A \hat{\cdot} B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \mu_A(x) < 1 \text{ i } \mu_B(x) < 1, \\ \mu_A(x) & \text{dla } \mu_B(x) = 1, \\ \mu_B(x) & \text{dla } \mu_A(x) = 1. \end{cases} \tag{29}$$

3.11. Mnożenie przez liczbę rzeczywistą

W przypadku gdy liczba rzeczywista dodatnia α przemnożona przez wysokość zbioru A nie jest większa od 1, możemy zdefiniować mnożenie zbioru przez liczbę.

Definicja 17

Iloczynem zbioru rozmytego A przez liczbę rzeczywistą α nazywamy zbiór αA określony następująco

$$\alpha A = \int_X \alpha\mu_A(x)/x. \tag{30}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem

$$\forall_{x \in X} \mu_{\alpha A}(x) = \alpha\mu_A(x). \tag{31}$$

3.12. Potęgowanie algebraiczne zbioru rozmytego

Dla liczby rzeczywistej $\alpha>0$ możemy określić potęgę zbioru rozmytego A^α w myśl następującej definicji

Definicja 18

Potęgą α zbioru rozmytego A nazywamy zbiór A^α określony następująco

$$A^\alpha = \int_X [\mu_A(x)]^\alpha / x. \tag{32}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem

$$\forall_{x \in X} \mu_{A^\alpha}(x) = [\mu_A(x)]^\alpha \tag{33}$$

3.13. Iloczyn kartezjański

Definicja 19

Iloczynem kartezjańskim zbioru rozmytego A z przestrzeni X i zbioru rozmytego B z przestrzeni Y nazywamy zbiór AxB określony następująco

$$AxB = \int_{XxY} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) / (x,y). \tag{34}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem

$$\forall_{x \in X} \; \forall_{y \in Y} \; \mu_{AxB}(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)). \tag{35}$$

3.14. Obcięcie zbioru rozmytego

Definicja 20

α-obcięciem zbioru rozmytego A nazywamy zbiór A_α określony następująco

$$A_\alpha = \{x \in X \; : \; \mu_A(x) \geq \alpha\}, \qquad a \in [0,1]. \tag{36}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem

$$\forall_{x \in X} \; \mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) & \text{dla } \mu_A(x) \geq \alpha, \\ 0 & \text{dla } \mu_A(x) < \alpha. \end{cases} \tag{37}$$

Natomiast funkcja charakterystyczna tego zbioru wyraża się wzorem

$$\chi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \mu_A(x) \geq \alpha, \\ 0 & \text{dla } \mu_A(x) < \alpha. \end{cases} \tag{38}$$

3.15. Koncentracja

Jako szczególne przypadki potęgowania, które często występują w zastosowaniach, rozpatruje się operacje koncentracji i rozpraszania.

Definicja 21

Koncentracją zbioru rozmytego A nazywamy zbiór CON(A) określony następująco

$$\mathrm{CON}(A) = A^2. \tag{39}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem

$$\mu_{\mathrm{CON}(A)}(x) = \mu_A^2(x). \tag{40}$$

3.16. Rozpraszanie

Definicja 22

Rozproszeniem zbioru rozmytego A nazywamy zbiór DIL(A) określony następująco

$$\mathrm{DIL}(A) = A^{1/2}. \tag{41}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem

$$\mu_{\mathrm{DIL}(A)}(x) = \mu_A^{1/2}(x). \tag{42}$$

3.17. Intensyfikacja kontrastu

Definicja 23

Zbiorem rozmytym o zintensyfikowanym kontraście nazywamy zbiór INT(A) określony następująco

$$\mathrm{INT}(A) = \begin{cases} \mathrm{CON}(A) & \text{dla } \mu_A(x) < 0{,}5, \\ \mathrm{DIL}(A) & \text{dla } \mu_A(x) \geq 0{,}5. \end{cases} \tag{43}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem

$$\mu_{\mathrm{INT}(A)}(x) = \begin{cases} \mu_A^2 & \text{dla } \mu_A(x) < 0{,}5, \\ \mu_A^{1/2} & \text{dla } \mu_A(x) \geq 0{,}5. \end{cases} \tag{44}$$

3.18. Zmniejszenie kontrastu

Definicja 24

Zbiorem rozmytym o zmniejszonym kontraście nazywamy zbiór BLR(A) określony następująco

$$\mathrm{BLR}(A) = \begin{cases} \mathrm{DIL}(A) & \text{dla } \mu_A(x) < 0{,}5, \\ \mathrm{CON}(A) & \text{dla } \mu_A(x) \geq 0{,}5. \end{cases} \tag{45}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem

$$\mu_{\mathrm{BLR}(A)}(x) = \begin{cases} \mu_A^{1/2}(x) & \text{dla } \mu_A(x) < 0{,}5, \\ \mu_A^2(x) & \text{dla } \mu_A(x) \geq 0{,}5. \end{cases} \tag{46}$$

3.19. Przykłady zastosowania operatorów rozmytych dla zbiorów przeliczalnych

Zilustrujemy teraz wprowadzone operacje na przykładzie dwóch zbiorów A-cyfra średnia oraz zbioru B-cyfra duża. Zbiory te były określone w przykładzie 1 w rozdziale 2.

$A \cup B$ = 0.4/2 + 0.7/3 + 1/4 + 1/5 + 0.8/6 + 0.8/7 + 1/8 + 1/9,

$A \cap B$ = 0.3/5 + 0.6/6 + 0.5/7,

A' = 1/0 + 1/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0.2/6 + 0.5/7 + 1/8 + 1/9,

B' = 1/(0+1+2+3+4) + 0.7/5 + 0.4/6 + 0.2/7,

$A \oplus B$ = 0.4/2 + 0.7/3 + 1/(4+5+6+7+8+9),

$A \bigcirc B$ = 0.4/2 + 0.7/3 + 1/4 + 0.7/5 + 0.2/6,

$A \odot B$ = 0,3/5 + 0.4/6 + 0.3/7,

$A \boxplus B$ = 0.4/2 + 0.7/3 + 1/(4+5) + 0.92/6 + 0.9/7 +1/(8+9),

AB = 0,3/5 + 0.48/6 + 0.4/7,

$A \boxtimes B$ = 0.4/2 + 0.7/3 + 1/(4+5+6+7+8+9),

$A \wedge B$ = 0.3/5,

0.2A = 0.08/2 + 0.14/3 + 0.2/4 + 0.2/5 + 0.16/6 + 0.1/7,

0.5B = 0.15/5 + 0.3/6 + 0.4/7 + 0.5/8 + 0.5/9,

A^3 = 0.064/2 + 0.343/3 + 1/(4+5) + 0.512/6 + 0.125/7,

B^3 = 0.027/5 + 0.216/6 + 0.512/7 + 1/(8+9),

AxB = 0.3/[(2,5) + (3,5) + (4,5) + (5.5) + (6.5) + (7.5)] + 0.4/[(2,6) + (2.7) + (2.8) + (2.9)} + 0.5/[(7,6) + (7.7) + (7.8) + (7.9)] + 0.6/[(3,6) +(4,6) + (5,6) + (6,6)] 0.7/[(3,7) + (3,8) + (3,9)] + 0.8/[(6,7) + (6,8) + (6,9) + (4,7) + (5,7)] + 1/[(4,8) + (4,9) + (5,8) + (5,9)],

$A_{0.6}$ = 0.7/3 + 1/4 + 1/5 + 0.8/6,

$B_{0.6}$ = 0.6/6 + 0.8/7 + 1/8 + 1/9,

CON(A) = 0.16/2 + 0.49/3 + 1/(4+5) + 0.64/6 + 0.25/7,

CON(B) = 0.09/5 + 0.36/6 + 0.64/7 + 1/(8+9),

DIL(A) = $\sqrt{0.4}$/2 + $\sqrt{0.7}$/3 + 1/(5+6) + $\sqrt{0.8}$/6 + $\sqrt{0.5}$/7,

DIL(B) = $\sqrt{0.3}$/5 + $\sqrt{0.6}$/6 + $\sqrt{0.8/7}$ + 1/(8+9),

INT(A) = 0.16/2 + $\sqrt{0.7}$/3 + 1/(5+6) + $\sqrt{0.8}$/6 + $\sqrt{0.5}$/7,

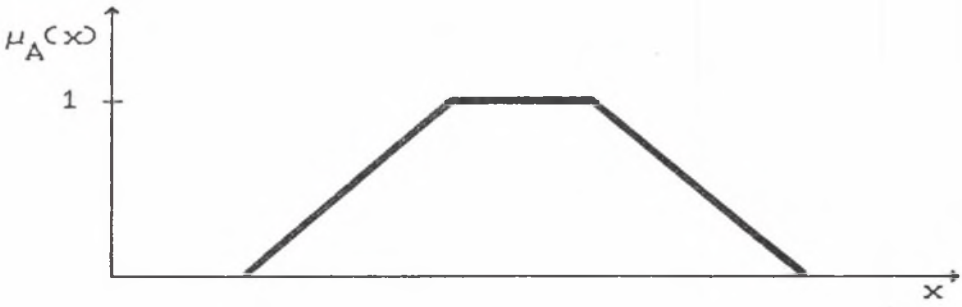
INT(B) = 0.09/5 + $\sqrt{0.6}$/6 + $\sqrt{0.8}$/7 = 1/(8+9),

BLR(A) = $\sqrt{0.4}$/2 + 0.49/3 + 1/(4+5) + 0.64/6 + 0.25/7,

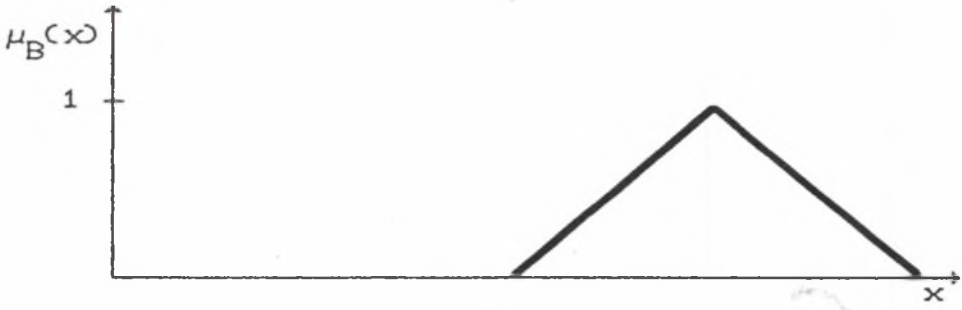
BLR(B) = $\sqrt{0.3}$/5 +0.36/6 + 0.64/7 + 1/(8+9).

3.20. Przykłady zastosowania operatorów rozmytych dla zbiorów o ciągłej funkcji przynależności

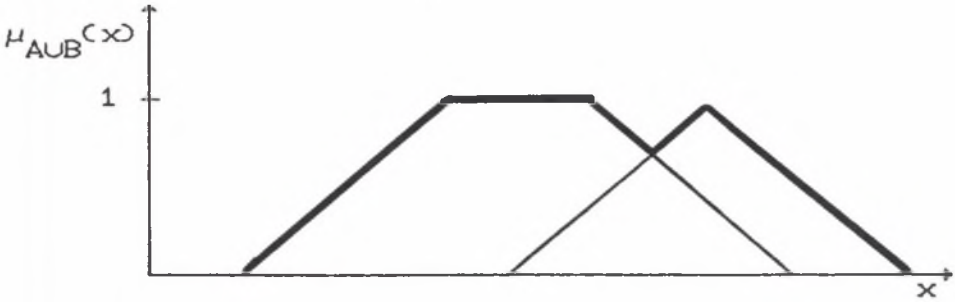
Zilustrujemy teraz wprowadzone operacje na przykładzie dwóch zbiorów A i B przedstawionych na rysunkach 1 i 2. Kolejne rysunki prezentują otrzymane zbiory rozmyte w wyniku zastosowania różnych operatorów.



Rys.1. Zbiór rozmyty A o funkcji przynależności $\mu_A(x)$
Fig.1. Fuzzy set A of membership function $\mu_A(x)$

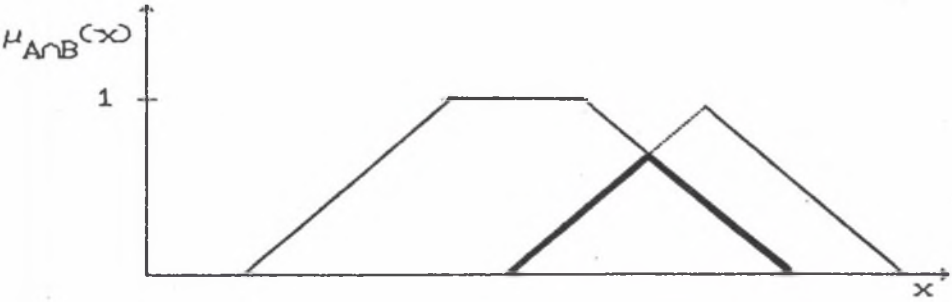


Rys.2. Zbiór rozmyty B o funkcji przynależności $\mu_B(x)$
Fig.2. Fuzzy set B of membership function $\mu_B(x)$



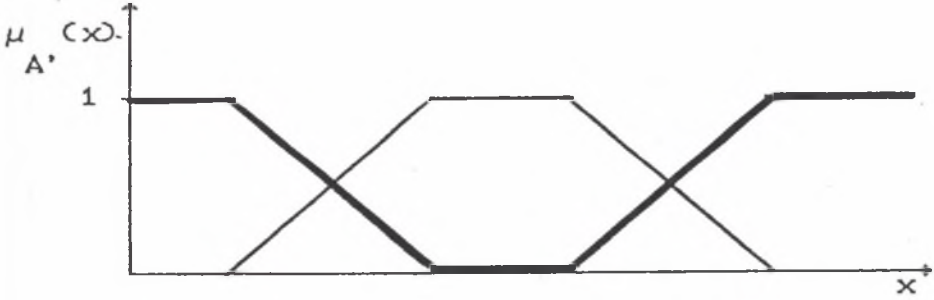
Rys.3. Suma zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{A \cup B}(x)$

Fig.3. Sum of fuzzy sets of membership function $\mu_{A \cup B}(x)$



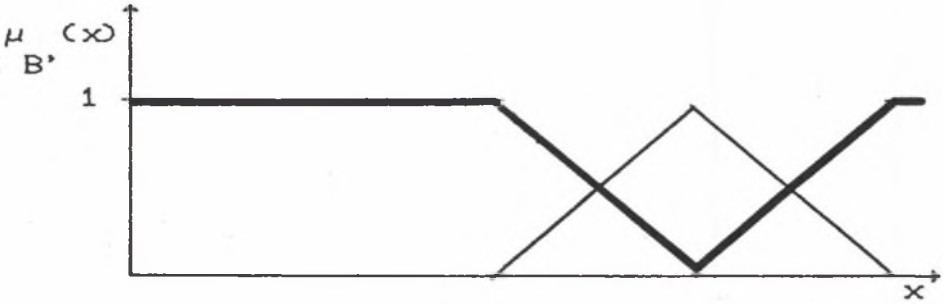
Rys.4. Iloczyn zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{A \cap B}(x)$

Fig.4. Product of fuzzy sets of membership function $\mu_{A \cap B}(x)$



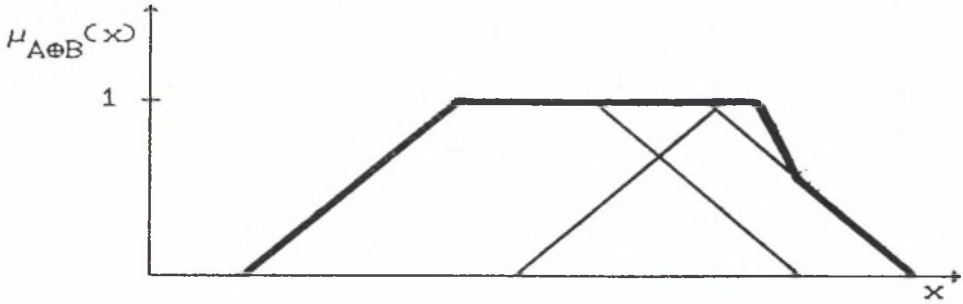
Rys.5. Dopełnienie zbioru rozmytego o funkcji przynależności $\mu_{A'}(x)$

Fig.5. Complement of fuzzy set of membership function $\mu_{A'}(x)$



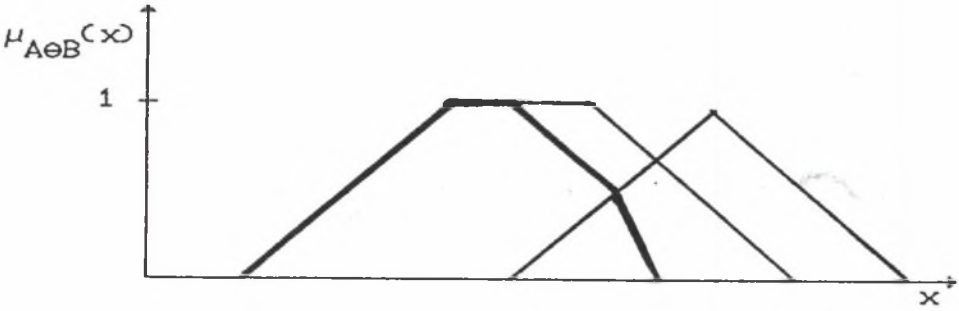
Rys.6. Dopełnienie zbioru rozmytego o funkcji przynależności $\mu_{B'}(x)$

Fig.6. Complement of fuzzy set of membership function $\mu_{B'}(x)$



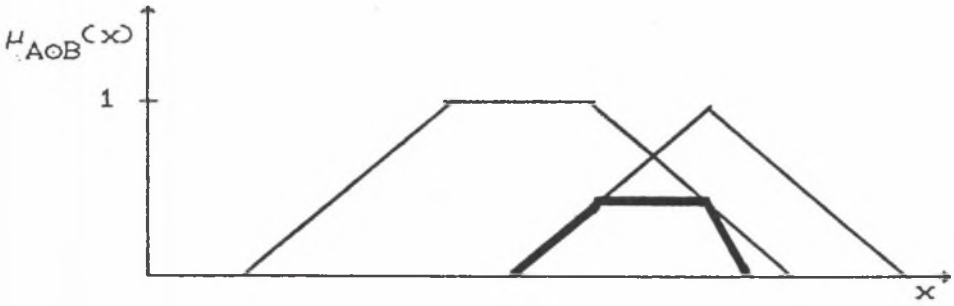
Rys.7. Suma ograniczona zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{A\oplus B}(x)$

Fig.7. Limited sum of fuzzy sets of membership function $\mu_{A\oplus B}(x)$

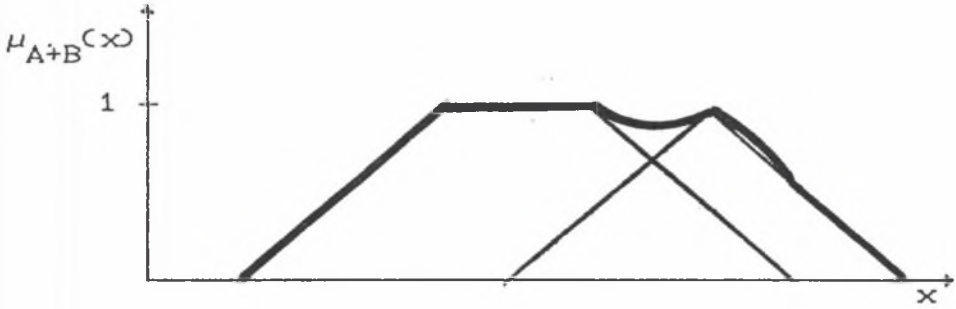


Rys.8. Różnica ograniczona zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{A\ominus B}(x)$

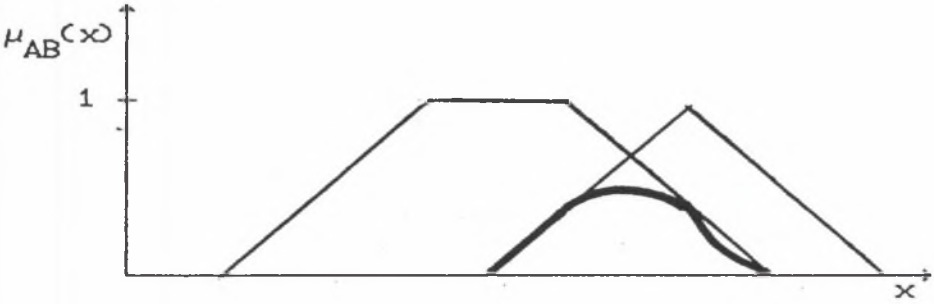
Fig.8. Limited difference of fuzzy sets of membership function $\mu_{A\ominus B}(x)$



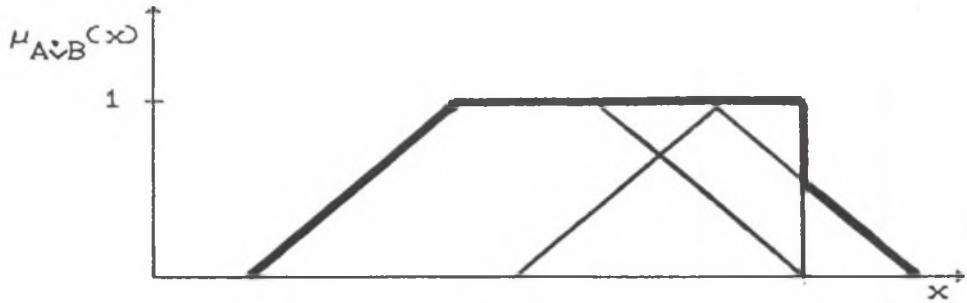
Rys. 9. Iloczyn ograniczony zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{A \odot B}(x)$
Fig.9. Limited product of fuzzy sets of membership function $\mu_{A \odot B}(x)$



Rys.10. Suma algebraiczna zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{A \dot{-} B}(x)$
Fig.10 Algebraic sum of fuzzy sets of membership function $\mu_{A \dot{-} B}(x)$

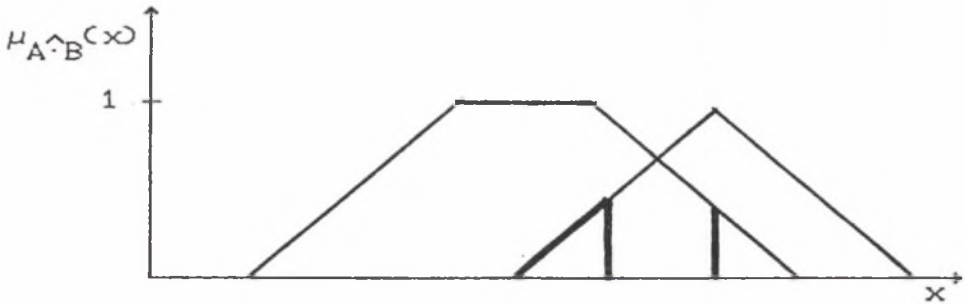


Rys.11. Iloczyn algebraiczny zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{AB}(x)$
Fig.11. Algebraic product of fuzzy sets of membership function $\mu_{AB}(x)$



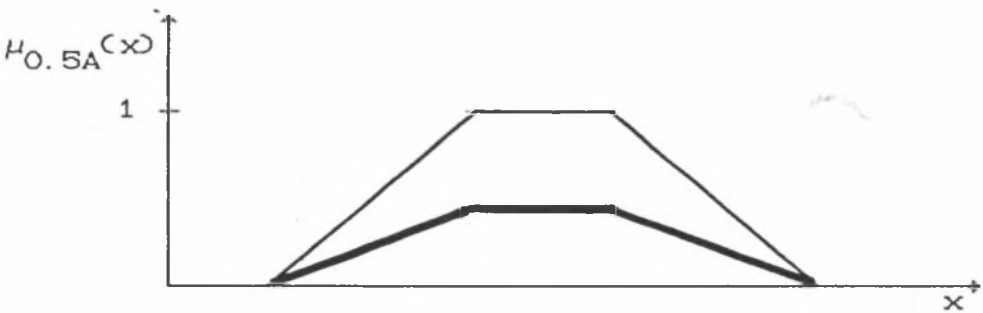
Rys.12. Suma drastyczna zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{A \dot{\vee} B(x)}$

Fig.12. Drastic sum of fuzzy sets of memership function $\mu_{A \dot{\vee} B(x)}$



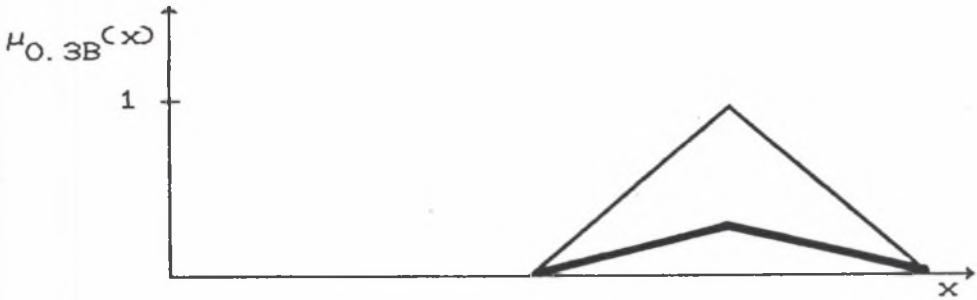
Rys.13. Iloczyn drastyczny zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{A \wedge B(x)}$

Fig.13. Drastic product of fuzzy sets of membership function $\mu_{A \wedge B(x)}$

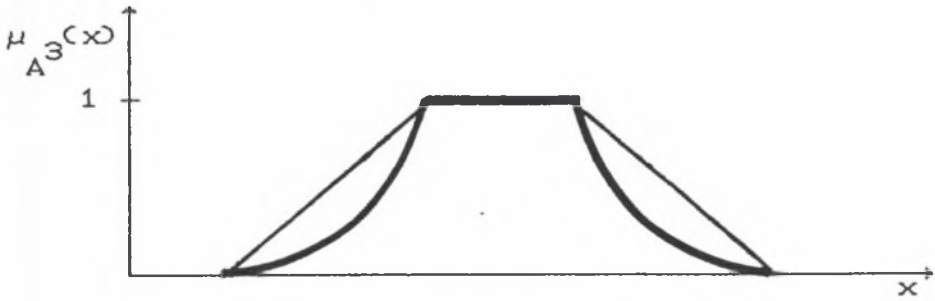


Rys.14. Mnożenie zbioru rozmytego A przez liczbę α=0,5

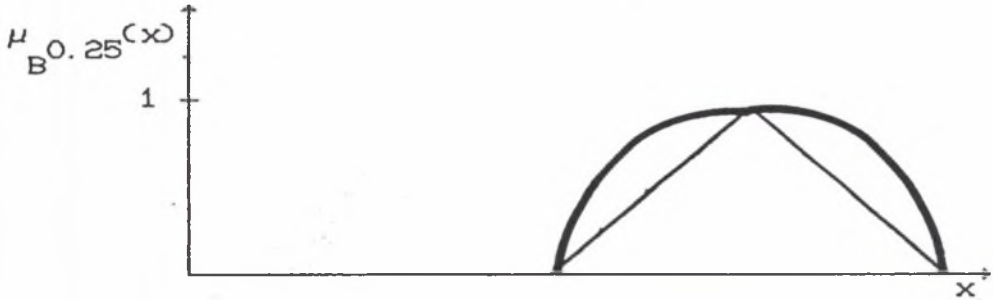
Fig.14. Multiplication of fuzzy set A by number α=0,5



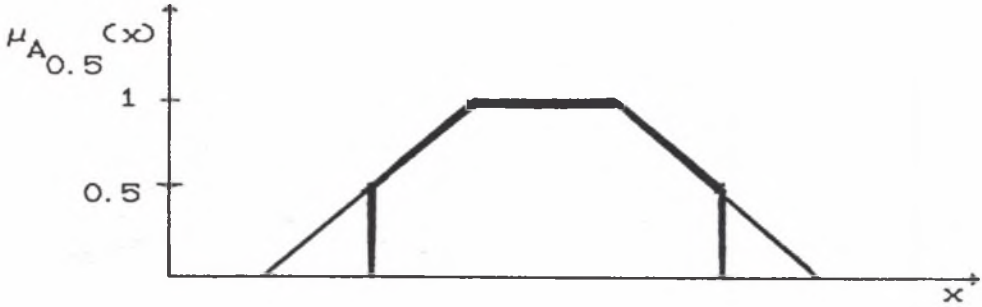
Rys.15. Mnożenie zbioru rozmytego B przez liczbę α=0,3
Fig.15. Multiplication of fuzzy set B by number α=0,3



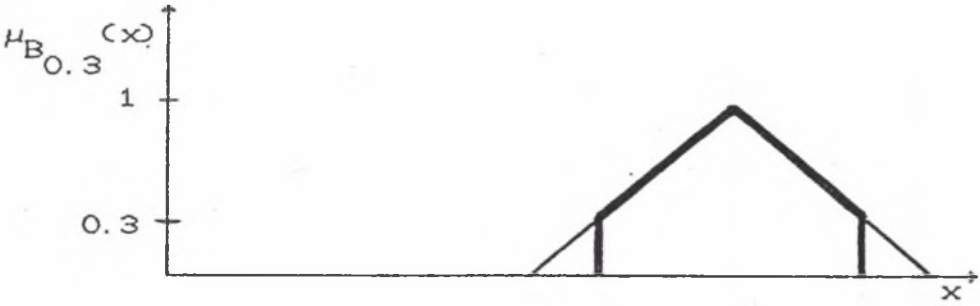
Rys.16. Potęgowanie zbioru rozmytego A (α=3)
Fig.16. Involution of fuzzy set A (α=3)



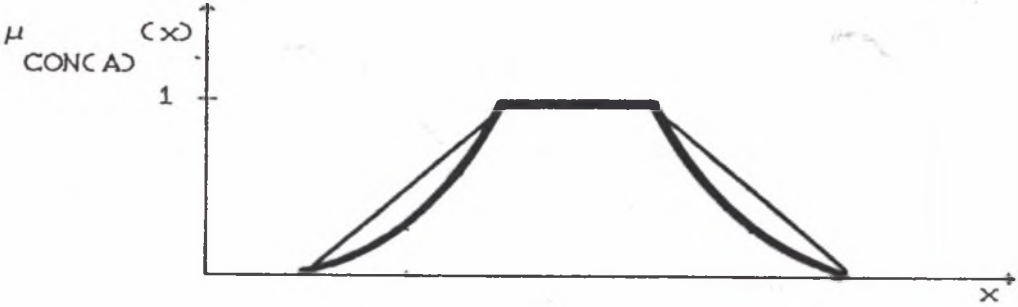
Rys.17. Potęgowanie zbioru rozmytego B (α=0,25)
Fig.17. Involution of fuzzy set B (α=0,25)



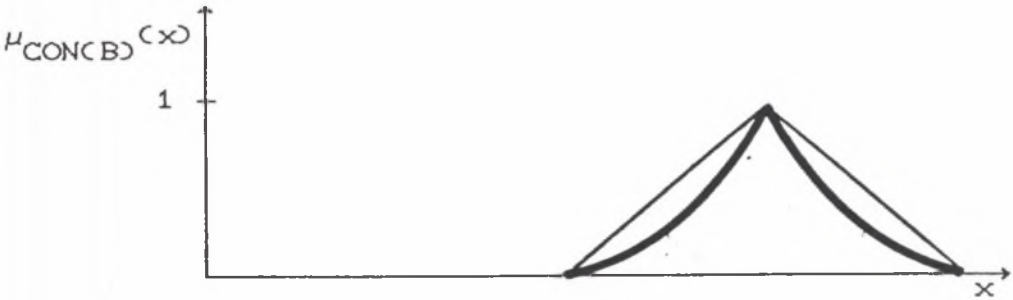
Rys.18. Obcięcie zbioru rozmytego A dla α=0,5
Fig.18. Cut of fuzzy set A for α=0,5



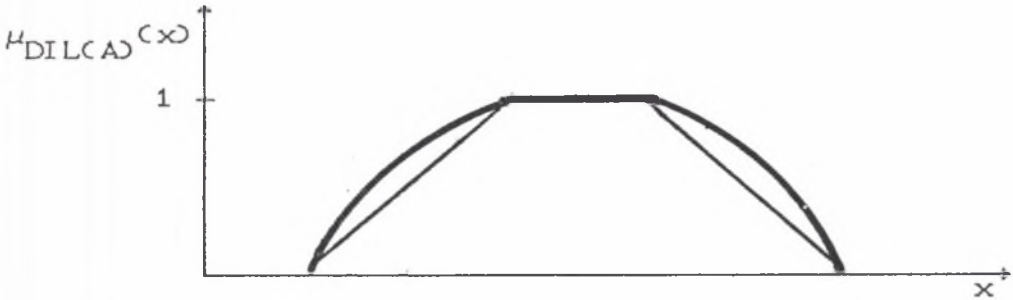
Rys.19. Obcięcie zbioru rozmytego B dla α=0,3
Fig.19. Cut of fuzzy set B for α=0,3



Rys.20. Koncentracja zbioru rozmytego A
Fig.20. Concentration of fuzzy set A

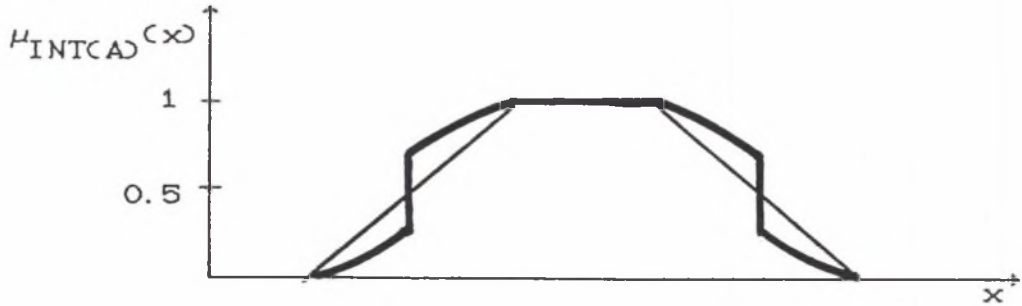


Rys.21. Koncentracja zbioru rozmytego B
Fig.21. Concentration of fuzzy set B

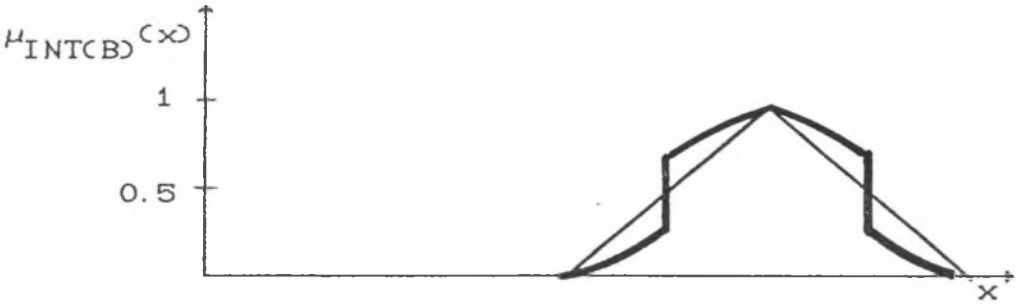


Rys.22. Rozpraszanie zbioru rozmytego A
Fig.22. Disperse of fuzzy set A

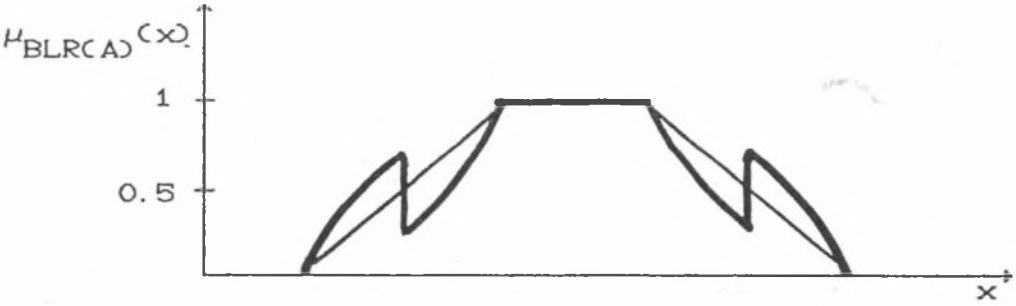
Rys.23. Rozpraszanie zbioru rozmytego B
Fig.23. Disperse of fuzzy B



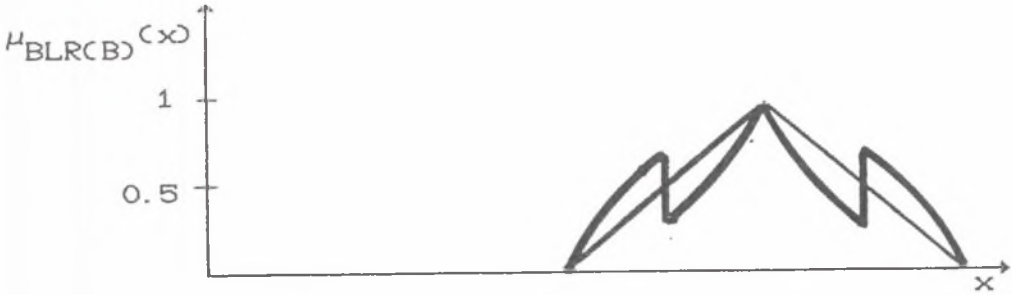
Rys.24. Intensyfikacja kontrastu zbioru rozmytego A
Fig.24. Intensification of contrast of fuzzy set A



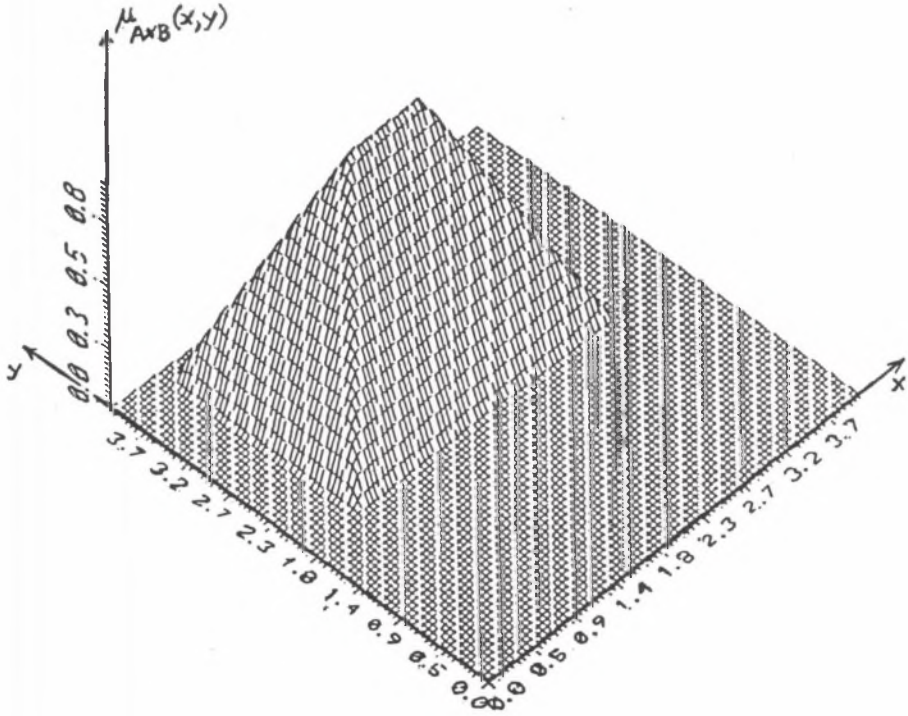
Rys.25. Intensyfikacja kontrastu zbioru rozmytego B
Fig.25. Ontensification of constrast of fuzzy set B



Rys.26. Zmniejszenie kontrastu zbioru rozmytego A
Fig.26. Decrease of constrast of fuzzy set A



Rys.27. Zmniejszenie kontrastu zbioru rozmytego B
Fig.27. Decrease of contrast of fuzzy set B



Rys.28. Iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych A i B
Fig.28. Cartesian product of fuzzy sets A and B

4. WYPUKŁE ZBIORY ROZMYTE

Ważną klasę zbiorów rozmytych są wypukłe zbiory rozmyte mające zastosowanie w problemach optymalizacji i sterowania [13; 14].

Definicja 25 [2; 13; 14]
Zbiór rozmyty A jest wypukły, jeżeli dla dowolnych x_1, $x_2 \in X$ i $\lambda \in [0,1]$ zachodzi

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)] \tag{47}$$

Wykorzystując pojęcie α-obcięcia zbioru rozmytego

$$A_\alpha = \{x \in X \quad \mu_A(x) \geq \alpha\} \tag{48}$$

można też zdefiniować rozmyty zbiór wypukły w następujący sposób:

Definicja 26 [2; 13; 14]
Zbiór rozmyty A jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory A_α są wypukłe dla wszystkich $\alpha \in [0,1]$.
Podobnie można zdefiniować zbiór rozmyty wklęsły.

Definicja 27 [13; 14]
Zbiór rozmyty A jest wklęsły, jeżeli dla dowolnych x_1, $x_2 \in X$ i $\lambda \in [0,1]$ zachodzi

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \max[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]. \tag{49}$$

Dla wypukłych i wklęsłych można udowodnić następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1
Jeżeli A i B są zbiorami rozmytymi wypukłymi, to $A \cap B$ jest zbiorem rozmytym wypukłym.

Twierdzenie 2
Jeżeli A i B są zbiorami rozmytymi wklęsłymi, to $A \cup B$ jest zbiorem rozmytym wklęsłym.
Dowody tych twierdzeń można znaleźć w pracach [13; 14].

5. LICZBY ROZMYTE

5.1. Określenie liczby rozmytej

Definicja 28 [2]

Liczbą rozmytą L nazywamy wypukły i znormalizowany zbiór rozmyty z przestrzeni R taki, że

a) istnieje dokładnie jedno $x_0 \in R$, dla którego $\mu_L(x_0)=1$, x_0 jest nazywane średnią wartością L,

b) funkcja $\mu_L(x)$ jest ciągła.

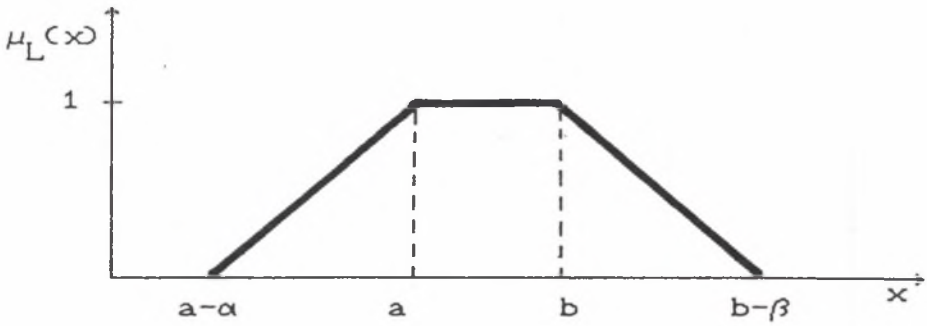
Przykładem liczby rozmytej jest

$$L = \text{około } 10 = \int_X \mu_L(x)/x, \qquad \text{gdzie } \mu_L(x) = \frac{1}{1+(10-x)^2}. \tag{50}$$

Ponieważ zdefiniowanie operatorów arytmetycznych i ich używanie w praktycznych zastosowaniach jest bardzo niewygodne dla tak zdefiniowanych liczb, zdecydowano się na wprowadzenie liczb rozmytych o z góry określonych funkcjach przynależności. Są nimi liczby L-R wprowadzone przez Dubois i Prade cytowane w pracy [30] lub liczby α -β omawiane w pracy [2]. My skoncentrujemy się na liczbach α-β, jako wygodnych w użyciu i często stosowanych. Liczba α-β jest reprezentowana przez czwórkę liczb rzeczywistych (a, b, α, β). Liczby a i b oznaczają przedział, w którym funkcja przynależności osiąga wartość 1. Liczby α i β określają lewą i prawą szerokość rozkładu. Funkcja przynależności $\mu_L(x)$ jest zdefiniowana następująco

$$\mu_L(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < a-\alpha \\ (1-\alpha)/(x-a+\alpha) & \text{dla} \quad x \in [a-\alpha, a), \\ 1 & \text{dla} \quad x \in (a,b], \\ (1/\beta)(b+\beta-x) & \text{dla } x \in (b, b+\beta] \\ 0 & \text{dla } x > b+\beta. \end{cases} \tag{51}$$

Przykładową funkcją przynależności $\mu_L(x)$ liczby rozmytej L przedstawiono na rysunku 29.



Rys.29. Wykres przykładowej funkcji przynależności liczby rozmytej α-β
Fig.29. Graph of example of membership function of fuzzy number α-β

5.2. Liczba rozmyta ze znakiem minus

Liczbę rozmytą ze znakiem minus określamy następująco

$$-L = (-b, -a, \beta, \alpha). \tag{52}$$

5.3. Odwrotność liczby rozmytej

Liczbę odwrotną określamy w następujący sposób

$$1/L = (1/b,\ 1/a,\ \beta/b\,(b+\beta),\ \alpha/a(a-\alpha)). \tag{53}$$

5.4. Suma liczb rozmytych

Niech $L_1 = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ i $L_2 = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$. Sumę liczb rozmytych określamy w następujący sposób

$$L_1 + L_2 = (a_1 + a_2\,,\ b_1 + b_2,\ \alpha_1 + \alpha_2,\ \beta_1 + \beta_2) \tag{54}$$

5.5. Różnica liczb rozmytych

Różnicę liczb rozmytych określamy w następujący sposób

$$L_1 - L_2 = (a_1 - b_2 , b_1 - a_2, \alpha_1 + \beta_2, \beta_1 + \alpha_2). \tag{55}$$

5.6. Iloczyn liczb rozmytych

Iloczyn liczb rozmytych określamy w następujący sposób

$$L_1 \cdot L_2 = \begin{cases} (a_1a_2, b_1b_2, a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2, b_1\beta_2 + b_2\beta_1 + \beta_1\beta_2) & \text{dla } L_1 > 0,\ L_2 > 0, \\ (a_1b_2, b_1a_2, b_2\alpha_1 - a_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2, -b_1\alpha_2 + a_2\beta_1 + \beta_1\alpha_2) & \text{dla } L_1 < 0,\ L_2 > 0, \\ (b_1a_2, a_1b_2, b_1\alpha_2 - a_2\beta_1 + \beta_1\alpha_2, -b_2\alpha_1 + a_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2) & \text{dla } L_1 > 0,\ L_2 < 0, \\ b_1b_2, a_1a_2, -b_1\beta_2 - b_2\beta_1 - \beta_1\beta_1, -a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2) & \text{dla } L_1 < 0,\ L_2 < 0. \end{cases} \tag{56}$$

5.7. Iloraz liczb rozmytych

Iloraz liczb rozmytych określamy w następujący sposób

$$L_1 / L_2 = \begin{cases} (a_1 / b_1, b_1 / a_1, (a_1\beta_2 + b_2\alpha_1) / b_2(b_2 + \beta_2), (b_1\alpha_2 + a_2\beta_1) / a_2(a_2 - \alpha_2)) & \text{dla } L_1 > 0, L_2 > 0, \\ (a_1 / a_2, b_1 / b_2, (a_2\alpha_1 - a_1\alpha_2) / a_2(a_2 - \alpha_2), (b_2\beta_1 - b_1\beta_2) / b_2(b_2 - \beta_2)) & \text{dla } L_1 < 0, L_2 > 0, \\ (b_1 / b_2, a_1 / a_2, (b_1\beta_2 - b_2\beta_1) / b_2(b_2 + \beta_2), (a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1) / a_1(a_1 - \alpha_2)) & \text{dla } L_1 > 0, L_2 < 0, \\ (b_1 / a_2, a_1 / b_2, (-b_1, \alpha_2 - a_2\beta_1) / a_2(a_2 + \alpha_2), (-a_1\beta_2 - b_2\alpha_1) / b_2(b_2 - \beta_2)) & \text{dla } L_1 0, L_2 < 0. \end{cases} \tag{57}$$

5.8. Maksimum z liczb rozmytych

Liczbę większą z dwu liczb rozmytych określa się w następujący sposób

$$\max(L_1,L_2) = (\max(a_1,a_2), \max(b_1,b_2), \alpha\beta), \tag{58}$$

gdzie

$$\alpha = \begin{cases} a_2 + \alpha_1 - \min(a_1,a_1) & \text{dla} \quad a_1 - \alpha_1 > a_2 - \alpha_2 \\ a_1 + \alpha_2 - \min(a_1,a_2) & \text{dla} \quad a_1 - \alpha_1 < a_2 - \alpha_2 \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1 & \text{dla} \quad a_1 \geq a_2 \\ \alpha_2 & \text{dla} \quad a_1 < a_2 \end{cases} \quad \text{i} \quad a_1 - \alpha_1 = a_2 - \alpha_2,$$

$$\beta = \begin{cases} b_1 + \beta_1 - \max(b_1,b_2) & \text{dla}\, b_1 + \beta_1 > b_2 + \beta_2, \\ b_2 + \beta_2 - \max(b_1,b_2) & \text{dla}\, b_1 + \beta_1 < b_2 + \beta_2, \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \beta_1 & \text{dla}\, b_1 \geq b_2 \\ \beta_2 & \text{dla}\, b_1 < b_2 \end{cases} \text{i} \quad b_1 + \beta_1 = b_2 + \beta_2.$$

5.9. Minimum z liczb rozmytych

Liczbę mniejszą z dwu liczb rozmytych określa się w następujący sposób

$$\min(L_1,L_2) = (\min(a_1,a_2), \min(b_1,b_2), \alpha, \beta), \tag{59}$$

gdzie

$$\alpha = \begin{cases} a_1 + \alpha_2 - \max(a_1, a_2) & \text{dla } a_1 - \alpha_1 > a_2 - \alpha_2, \\ a_2 + \alpha_1 - \max(a_1, a_2) & \text{dla } a_1 - \alpha_1 < a_2 - \alpha_2, \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_2 & \text{dla } a_1 \geq a_2 \\ \alpha_1 & \text{dla } a_1 < a_2 \end{cases} \quad \text{i } a_1 - \alpha_2,$$

$$\beta = \begin{cases} b_2 + \beta_2 - \min(b_1, b_2) & \text{dla } b_1 + \beta_1 > b_2 + \beta_2, \\ b_1 + \beta_1 - \min(b_1, b_2) & \text{dla } b_1 + \beta_1 < b_2 + \beta_2, \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \beta_2 & \text{dla } b_1 \geq b_2, \\ \beta_1 & \text{dla } b_1 < b_2, \end{cases} \quad \text{i } b_1 + \beta_1 = b_2 + \beta_2.$$

6. RELACJE ROZMYTE (WIELOWARTOŚCIOWE)

6.1. Określenie relacji rozmytej

W teorii mnogości jednym z podstawowych pojęć jest pojęcie relacji między dwoma niepustymi zbiorami X i Y, definiowanej jako podzbiór iloczynu kartezjańskiego XxY. Podamy teraz definicję relacji wielowartościowej [2; 14; 20; 30].

Definicja 28

Relacją rozmytą między dwoma niepustymi zbiorami X i Y nazywamy podzbiór rozmyty R iloczynu kartezjańskiego XxY, co zapisujemy

$$R = \int_{XxY} \mu_R(x,y)/(x,y). \tag{60}$$

Funkcja przynależności $\mu_R(x,y)$ jest określona jako

$$\forall_{x \in X} \forall_{y \in Y} \quad \mu_R(x,y) \quad XxY \rightarrow [0,1]. \tag{61}$$

Relacja rozmyta R jako podzbiór iloczynu kartezjańskiego XxY zapisywana jest też w postaci

$$R \in F(XxY). \tag{62}$$

Wartości funkcji przynależności $\mu_R(x,y)$ interpretujemy jako stopień powiązania miedzy elementami $x \in X$ i $y \in Y$.

Jeżeli zbiory X i Y posiadają skończoną liczbę elementów, tj. $X=\{x_1,...,x_m\}$, $Y=\{y_1,...,y_n\}$, to funkcję przynależności $\mu_R(x,y)$ relacji R możemy zapisać w postaci macierzowej

$$\mu_R(x,y) = [\mu_R(x_i, y_j)] = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1,y_1),...,\mu_R(x_1,y_n) \\ \\ \mu_R(x_m,y_1),...,\mu_R(x_m,y_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11},...,r_{1n} \\ \\ r_{m1},...,r_{mn} \end{bmatrix}$$

gdzie $r_{ij} \in [0,1]$; $i = 1,...,m$; $j = 1,...,n$.

Przykład 3

Dane są zbiory cyfr $X=Y=\{0,1,2,3,4,5\}$. Określamy relację: X jest "dużo większy niż" Y. Relacje tą możemy zapisać za pomocą tabeli

X\Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0,1	0	0	0	0	0
3	0,5	0,1	0	0	0	0
4	0,8	0,5	0,1	0	0	0
5	1	0,8	0,5	0,1	0	0

6.2. Składowanie relacji rozmytych

Najważniejszym działaniem na relacjach rozmytych jest składanie. Ogólna definicja złożenia relacji rozmytych jest następująca [20]:

Definicja 29

Niech $R \in F(X,Y)$ i $S \in F(Y,Z)$ będą dwiema relacjami rozmytymi. Założeniem relacji R i S nazywamy relację $R \circ S \in F(X,Z)$ określoną wzorem

$$(R \circ S)(x,z) = \sup_{y \in Y} (R(x,y) * S(y,z)) \text{ dla } x \in X, \ y \in Y, \tag{64}$$

gdzie $*$ oznacza jedną z operacji min, max, $\cdot$, $\odot$, $\wedge$, $\dot{+}$, $\oplus$, $\vee$ Założenie określone wzorem (64) nazywamy sup-$*$ złożeniem. W przypadku przeliczalnego zbioru Y supremum (w obliczeniach) zastępowane jest przez maksimum. Podobnie określamy złożenie dualne relacji R i S.

Definicja 30

Niech $R \in F(X,Y)$ i $S \in F(Y,Z)$ będą dwiema relacjami rozmytymi. Złożeniem dualnym relacji R i S nazywamy relacją $R \circ' S \in F(X,Z)$ określoną wzorem

$$(R \circ' S)(x,z) = \inf_{y \in Y} (R(x,y) * S(y,z)) \text{ dla } x \in X, \ y \in Y. \tag{65}$$

Złożenie określone wzorem (65) nazywamy inf-$*$ złożeniem. W przypadku przeliczalnego zbioru Y infimum (w obliczeniach) zastępowane jest przez minimum.

Podstawowym i najważniejszym rodzajem składania relacji rozmytych jest złożenie typu maksyminowego [2; 14; 20; 30]. Funkcja przynależności takiego złożenia jest następująca:

$$\mu_{R \circ S}(x,z) = \sup_{y \in Y} [\min(\mu_R(x,y), \mu_S(y,z))] \text{ dla } x \in X, y \in Y. \tag{66}$$

Dualnym do tego złożenia jest złożenie typu minimaksowego określone równaniem

$$\mu_{R \circ' S}(x,z) = \inf_{y \in Y} [\max(\mu_R(x,y), \mu_S(y,z))] \text{ dla } x \in X, y \in Y. \tag{67}$$

Wyróżnia się jeszcze następujące typy złożeń [20]: sup-$\bullet$, sup-$\odot$, sup-$\dot{\wedge}$ oraz dualne do nich inf-$\dot{+}$, inf-$\oplus$, inf-$\dot{\vee}$.

W przypadku relacji zapisanych w postaci macierzy, składanie odpowiada iloczynowi macierzy, w którym sumowanie zastąpione jest przez sup (inf), a mnożenie przez działanie $*$.

Przykład 4

Dane są dwie relacje rozmyte R i S zapisane w postaci macierzowej.

$$R = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,5 & 1 & 0,4 \\ 0,7 & 1 & 0,6 \\ 0,4 & 1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,9 & 0,7 & 0,1 \\ 0,8 & 1 & 1 & 0,3 \\ 0,6 & 1 & 0,9 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Podamy teraz, jaką postać będą miały różnego rodzaju złożenia tych relacji

a) złożenie typu max-min oraz dualne typu min-max

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,3 \\ 0,8 & 1 & 1 & 0,3 \\ 0,8 & 1 & 1 & 0,3 \\ 0,8 & 1 & 1 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix} \qquad R \circ' S = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,9 & 0,7 & 0,2 \\ 0,5 & 0,9 & 0,7 & 0,4 \\ 0,6 & 0,9 & 0,7 & 0,6 \\ 0,5 & 0,9 & 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,9 & 0,7 & 0,1 \end{bmatrix}$$

b) złożenie typu max-$\bullet$ oraz dualne typu min-$\dot{+}$

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,5 & 0,15 \\ 0,8 & 1 & 1 & 0,3 \\ 0,8 & 1 & 1 & 0,3 \\ 0,8 & 1 & 1 & 0,3 \\ 0,32 & 0,4 & 0,4 & 0,12 \end{bmatrix} \quad R \circ' S = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,92 & 0,76 & 0,28 \\ 0,75 & 0,95 & 0,85 & 0,52 \\ 0,84 & 0,97 & 0,91 & 0,68 \\ 0,7 & 0,94 & 0,82 & 0,44 \\ 0,55 & 0,91 & 0,73 & 0,19 \end{bmatrix}$$

c) złożenie typu max-$\odot$ oraz dualne typu min-$\oplus$

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,8 & 1 & 1 & 0,3 \\ 0,8 & 1 & 1 & 0,3 \\ 0,8 & 1 & 1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 \end{bmatrix} \qquad R \circ' S = \begin{bmatrix} 0,7 & 1 & 0,9 & 0,3 \\ 1 & 1 & 1 & 0,6 \\ 1 & 1 & 1 & 0,8 \\ 0,9 & 1 & 1 & 0,5 \\ 0,6 & 1 & 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}$$

d) złożenie typu max-$\wedge$ oraz dualne typu min-$\vee$

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,8 & 1 & 1 & 0,3 \\ 0,8 & 1 & 1 & 0,3 \\ 0,8 & 1 & 1 & 0,3 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0 \end{bmatrix} \qquad R \circ' S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,9 & 0,2 \end{bmatrix}$$

7. PODEJMOWANIE DECYZJI W OTOCZENIU ROZMYTYM

7.1. Określenie otoczenia rozmytego

Podstawowym pojęciem takiego podejścia do podejmowania decyzji, zaproponowanego przez Bellmana i Zadeha [1], jest pojęcie otoczenia rozmytego.

Definicja 31 [30]
Otoczeniem rozmytym problemu podejmowania decyzji nazywamy następującą czwórkę uporządkowaną

$$(X, G, C, D) \tag{68}$$

gdzie X={x} jest zbiorem możliwych decyzji, G - celem rozmytym, C - ograniczeniem rozmytym, D - decyzją rozmytą.

Elementy zbioru X mogą być dowolne, np. rodzaj materiału, wielkość inwestycji, rodzaj zakupu, strategie rozwoju ekonomicznego itp. - wszystko co podlega wyborowi.

Mamy tu do czynienia z sytuacją, gdzie na możliwe decyzje są nałożone pewne ograniczenia. A więc nie wszystkie decyzje są dopuszczalne. Szukać będziemy najlepszej decyzji spośród dopuszczalnych.

Podamy teraz definicje celu rozmytego i ograniczenia rozmytego. Następnie określimy decyzję rozmytą.

Definicja 32

Cel rozmyty określa się jako zbiór rozmyty $G \subset X$ o funkcji przynależności $\mu_G(x)$.

Przykładowo, niech X=R będzie zbiorem liczb rzeczywistych. Celem rozmytym może być osiągnięcie liczby dużo większej od 100. Zbiór G można określić za pomocą funkcji przynależności $\mu_G(x)$, np.

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 100 \\ 1 & \text{dla } x > 100 \end{cases} \tag{69}$$

$$\frac{1}{1+100(x-100)-1}$$

Definicja 33

Ograniczenie rozmyte definiuje się jako zbiór rozmyty $C \subset X$ o funkcji przynależności $\mu_C(x)$.

I tak na przykład, gdy X=R jest zbiorem liczb rzeczywistych, to ograniczeniem może być warunek, że liczba powinna być około 200. Funkcja przynależności zbioru C może być przedstawiona wzorem

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 150 \text{ lub } x > 250, \\ 0{,}2x - 3 & \text{dla} \quad 150 \leq x \leq 200, \\ 0{,}02x + 5 & \text{dla} \quad 200 \leq x \leq 250. \end{cases} \tag{70}$$

Jak widać, definicje celu rozmytego i ograniczenia rozmytego są właściwie identyczne. Występuje tu ścisła analogia między tymi pojęciami. W teorii zbiorów rozmytych traktuje się je jednakowo.

7.2. Decyzja rozmyta

Decyzja ma być taka, aby osiągnąć pożądany cel oraz spełnić ograniczenia. Decyzja rozmyta D jest więc pewną agregacją zbiorów rozmytych G i C. Ta agregacja zbiorów G i C może być dokonana na różne sposoby. Podstawowa i powszechnie stosowaną decyzją rozmytą jest decyzja rozmyta minimum [29]. Opiera się ona na zasadzie, aby osiągnąć cel G i jednocześnie spełnić ograniczenie C. Odpowiada to agregacji zbiorów G i C w sensie iloczynu (przecięcia) zbiorów rozmytych.

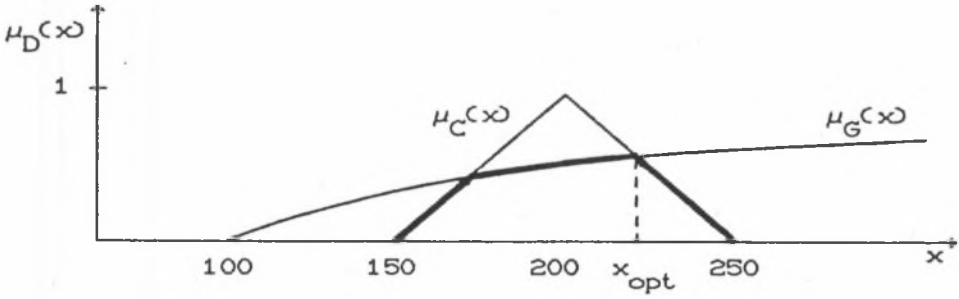
Definicja 34 [30]
Decyzję rozmytą typu minimum określa się jako

$$D = G \cap C. \tag{71}$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej D jest następująca

$$\mu_D(x) = \min_x(\mu_G(x), \mu_C(x)). \tag{72}$$

W literaturze tę definicję nazywa się "pesymistyczną", jako że bazuje na mniejszych wartościach funkcji $\mu_G(x)$ i $\mu_C(x)$ [13; 14; 30]. Dla celu G i ograniczenia C przedstawionych wzorami (69) i (70) decyzja D będzie jak na rysunku 30. Możliwe dopuszczalne decyzje są z przedziału (150, 250).



Rys.30. Wyznaczanie decyzji rozmytej i optymalnej
Fig.30. Calculating of fuzzy decision and optimal decision

Można też tworzyć decyzje rozmyte wykonując inne działania na zbiorach G i C, np.:
a) decyzja rozmyta typu iloczyn algebraiczny

$$D = G \cdot C, \tag{73}$$

b) decyzja rozmyta typu kombinacja wypukła o funkcji przynależności

$$\mu_D(x) = r \cdot \mu_G(x) + (1 - r) \cdot \mu_C(x)), \qquad r \in [0,1], \tag{74}$$

c) decyzja rozmyta typu maksimum

$$D = G \cup C. \tag{75}$$

Ostatnia wymieniona decyzja nazywana jest "optymistyczną" [13], [14], [30].

7.3. Decyzja optymalna

Otrzymana decyzja rozmyta jako iloczyn celu i ograniczenia daje pewną wskazówkę, jaka decyzja nierozmyta jest najlepsza. Będziemy wybierać taką decyzje nierozmytą, której stopień przynależności w decyzji rozmytej jest największy.

Definicja 35
Decyzją optymalną nazywamy takie x_{opt}, że

$$\mu_D(x_{opt}) = \sup_{x \in X} \mu_D(x). \tag{76}$$

Należy zwrócić uwagę, że decyzja x_{opt} nie zawsze musi być jednoznaczna, a nawet może nie istnieć w przypadku, gdy zbiory G i C są rozłączne.

Na rysunku 30 decyzją optymalną jest $x_{opt} \simeq 222{,}47$.
Podamy teraz przykład związany z pracą i bezpieczeństwem górników.

Przykład 5
W kopalni należy wywiercić otwór w górotworze w odległości około 500 metrów od wyznaczonego punktu. Ponieważ własności górotworu w tym rejonie nie są całkowicie znane, należy wziąć pod uwagę to, aby bezpieczeństwo górników było możliwie duże. Cel G "około 500 metrów" scharakteryzowano funkcję przynależności

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0{,}02x - 8 & \text{dla} \quad 400 < x < 450, \\ 1 & \text{dla} \quad 450 \le x \le 550, \\ -0{,}02x + 12 & \text{dla} \quad 550 < x < 600, \\ 0 & \text{dla} \quad x \le 400 \ \text{lub} \ x \ge 600. \end{cases} \tag{77}$$

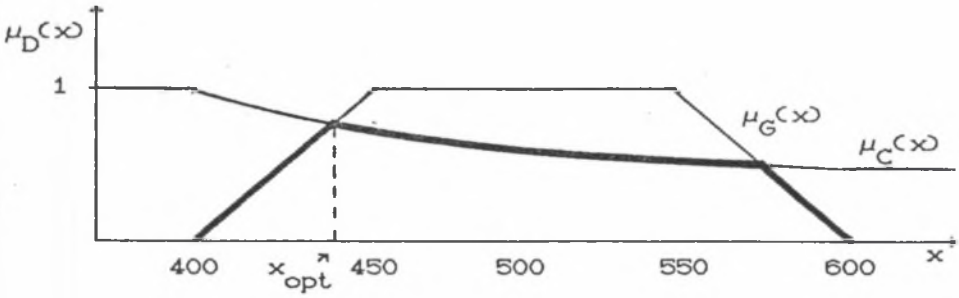
Bezpieczeństwo pracy górników na interesującym nas kierunku od wyznaczonego punktu określono w sposób przybliżony za pomocą funkcji

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad 0 \le x \le 400, \\ 1{,}25 \cdot 10^{-5}(x-600)^2 + 0{,}5 & \text{dla} \quad 400 < x < 600, \\ 0{,}5 & \text{dla} \quad x \ge 600. \end{cases} \tag{78}$$

Liczba 1 oznacza tu bezpieczeństwo równe 100%. Funkcje $\mu_G(x)$ i $\mu_C(x)$ pokazane są na rysunku 31. Możliwymi decyzjami do podjęcia są $x \in [400, 600]$. Decyzja optymalna x_{opt} maksymalizuje funkcję przynależności $\mu_D(x)$

$$\mu_D(x_{opt}) = \sup_{x \in [400,600]} \mu_D(x) = \sup_{x \in [400,600]} \min[\mu_G(x), \mu_C(x)]. \quad (80)$$

Maksimum dla funkcji $\mu_D(x)$ jest osiągnięte dla $x_{opt} \simeq 440.83$. Należy więc wywiercić otwór w odległości 440.83 metrów od wyznaczonego punktu.



Rys.31. Decyzja rozmyta i optymalna dla wiercenia otworu w górotworze (przykład 5)
Fig.31. Fuzzy decusion and optimal decision for perforation in rock mass (example 5)

7.4. Podejmowanie decyzji przy wielu celach i wielu ograniczeniach

Na zakończenie rozszerzymy nasze rozważania na bardziej ogólny przypadek z wieloma celami rozmytymi i wieloma ograniczeniami rozmytymi. Przyjmujemy, że mamy k celów rozmytych $G_1,...,G_k$ i l ograniczeń rozmytych $C_1,..,C_l$. Decyzję rozmytą będziemy określać jako iloczyn

$$D = G_1 \cap ... \cap G_k \cap C_1 \cap ... \cap C_l. \quad (81)$$

Funkcja przynależności $\mu_D(x)$ jest określona wzorem

$$\mu_D(x) = \min[\mu_{G_1}(x),...,\mu_{G_k}(x), \mu_{C_1}(x),...,\mu_{C_l}(x)]. \quad (82)$$

Jako decyzję optymalną x_{opt} będziemy przyjmowali takie x, dla którego funkcja $\mu_D(x)$ przyjmuje największą wartość. Decyzja optymalna jest określona wzorem (76) tym samym, co w przypadku jednego celu i jednego ograniczenia.

8. UWAGI KOŃCOWE

Teoria zbiorów rozmytych zyskuje sobie obecnie coraz większe uznanie. Znajduje zastosowanie w różnych dziedzinach, o których była mowa w rozdziale 1. Ponieważ w górnictwie wiele wielkości czy cech górotworu nie jest dokładnie znanych lub wiele związków nie da się dokładnie opisać, wydaje się, że teoria zbiorów rozmytych mogłaby też być tu zastosowana. Podamy teraz dziedziny, w których to teoria mogłaby usprawnić proces podejmowania decyzji w górnictwie:

a) przy ustalaniu rejonów szczególnie niebezpiecznych w kopalni, gdy znajomość górotworu jest tylko przybliżona,

b) przy prognozowaniu wstrząsów i tąpań, gdy opis zjawiska powstawania wstrząsów jest niedokładny,

c) przy organizacji pracy z uwzględnieniem możliwie dużego bezpieczeństwa pracy,

d) przy wyborze miejsca wiercenia otworów badawczych pod szyb, w przypadku niedokładnego oszacowania warunków naturalnych złoża,

e) przy wyborze sposobu organizacji głębienia szybu ze względu na rozmyty opis warunków hydrogeologicznych,

f) przy planowaniu drążenia wyrobisk korytarzowych w przypadku, gdy opis górotworu ma charakter rozmyty,

g) przy wyborze miejsca otworów strzałowych, w przypadku przybliżonej tylko znajomości górotworu,

h) przy organizacji robót w wyrobiskach ścianowych, gdy parametry ścian nie są dokładnie znane,

i) przy inwestycjach, gdy przewidywane efekty można tylko w przybliżeniu ocenić,

j) przy projektowaniu kopalń, gdy wskaźnik oceny ekonomicznej efektywności inwestycji trudno jest ocenić. Trudno przewidzieć, ile będzie on wynosił po zrealizowaniu inwestycji.

Przytoczyliśmy tutaj, niektóre tylko zagadnienia z zakresu górnictwa, w których można by wykorzystać teorię zbiorów rozmytych w celu polepszenia procesu podejmowania decyzji. Tych obszarów zastosowań może być więcej, ponieważ sytuacji niejasnych i nieprecyzyjnie opisanych może być dużo.

LITERATURA

[1] Bellman R.E., Zadeh L.A.: Decision - making in fuzzy enviroment. Management Science 17, 1970, nr 4.
[2] Bolc L., Borodziewicz W., Wójcik M.: Podstawy przetwarzania informacji niepewnej i niepełnej. PWN, Warszawa 1991.
[3] Chanas S.: Model sieciowy z nieostro określonymi czasami trwania czynności. Instytut Organizacji i Zarządzania Pol. Wrocławskiej. Komunikat 203, Wrocław 1976.
[4] Chanas S.: Metody budowy i analizy modelu sieciowego przedsięwzięcia z nieostro określonymi czasami trwania czynności. Insytut Organizacji i Zarządzania Pol. Wrocławskiej. Komunikat 220, Wrocław 1977.
[5] Cholewa W.: Zastosowanie zbiorów rozmytych w projektowaniu układów diagnozujących stan maszyn. Zesz. Nauk. Pol. Śl., ser. Mechanika, z. 79, Gliwice 1983.
[6] Czaja-Pośpiech D., Czogała E., Pedrycz W.: Sterowanie rozmyte jako matematyczna formalizacja heurystycznego sposobu sterowania złożonymi procesami. Podstawy sterowania, 1978, nr 8.
[7] Czaja-Pośpiech D., Czogała E., Pedrycz W.: Metoda sterowania oparta na regułach logiki rozmytej. Zesz. Nauk. Pol. Śl.., ser. Automatyka z. 42, Gliwice 1978.
[8] Czaja-Pospiech D., Czogała E., Pedrycz W.: Regulatory DDC a regulatory rozmyte w sterowaniu procesami przemysłowymi Zesz. Nauk. Pol. Śl., ser. Automatyka z. 47, Gliwice 1979.
[9] Czaja-Pośpiech D., Czogała E., Pedrycz W.: Wielokrotne implikacje i złożeniowe reguły wnioskowania w logice wielowartościowej (rozmytej). Zesz. Nauk. Pol. Śl., ser. Mat.-Fiz. z. 31, Gliwice 1980.
[10] Czogała E.: Probabilistic sets in decision making and control. Verlag TÜV Rheinland. Köln 1984.
[11] Czogała E., Pedrycz W.: Koncepcja sterowania rozmytego oparta o stany charakterystyczne. Zesz. Nauk. Pol. Śl., ser. Automatyka z. 47, Gliwice 1979.
[12] Czogała E., Pedrycz W.: Problemy sterowania w systemach opisanych równaniami relacyjnymi. Prace VIII Krajowej Konferencji Automatyki, Szczecin 1980.
[13] Czogała E., Pedrycz W.: Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych. Skrypt Pol. Śl. nr 989, ser. Automatyka, Gliwice 1980.
[14] Czogała E., Pedrycz W.: Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych. PWN, Warszawa 1985.
[15] De Luca A., Termini S.: Entropy of L-fuzzy sets Jnform. Control, 1974, nr 24.

[16] De Luca A., Termini S.: On the corvergence of entropy measures of a fuzzy set. Kybernetes, 1977, nr 6.
[17] De Luca A., Termini S.: Entropy and energy measures of a fuzzy set. In: Gupta, Ragade, Yager [ ]. North-Holland Amsterdam 1979.
[18] Deng Z.: Fuzzy pseudo-metric spaces. JMAA 6, 1982, nr 80, U.Śl.
[19] Drewniak J.: Fuzzy relation calculus. Prace Naukowe U. Śl. nr 1063, Katowice 1989.
[20] Drewniak J.: Podstawy teorii zbiorów rozmytych. Skrypt U. Śl. nr 347, Katowice 1987.
[21] Erceg M.A.: Metric spaces in fuzzy set theory. JMAA 1979, nr 69.
[22] Giles R.: Łukasiewicz logic and fuzzy set theory. IJMMS, 1976, nr 8.
[23] Gorzałczany M.B., Stachowicz M.S.: O pewnych koncepcjach budowy regulatorów rozmytych. Zesz. Nauk. AGH, ser, Elektryfikacja i Mechanizacja z. 131, Kraków 1981.
[24] Gupta M.M., Ragade R.K., Yager R.R.: Advances in fuzzy set theory and applications. North-Holland. Amsterdam 1979.
[25] Hutton B.: Products of fuzzy topological spaces. Gen. Topology Appl. 1980, nr 11.
[26] Hutton B., Reilly L.: Separation axioms in fuzzy topological spaces. FSS 1980, nr 3.
[27] Kacprzyk J.: Próba zastosowania zmiennych lingwistycznych do opisu i optymalizacji struktur organizacyjnych. Prace VI Krajowej Konf. Autom., Poznań 1974.
[28] Kacprzyk J.: Zastosowanie zbiorów rozmytych do optymalnego przydziału stanowisk pracy. Archiwum Autom. Telemech., 1975, nr 20.
[29] Kacprzyk J.: Wieloetapowe podejmowanie decyzji w warunkach rozmytości. PWN, Warszawa 1983.
[30] Kacprzyk J.: Zbiory rozmyte w analizie systemowej. PWN, Warszawa 1983.
[31] Koczy L.T., Hajnal M.: A new attempt to axiomatize fuzzy algebra with an application example. Problems of Control and Information Theory, 1977, vol. 6.
[32] Knopfmacher J.: On measures of fuzziness. J. of Math. Anal. and Appl 1975, nr 49.
[33] Lee R.C.T., Chang C.L.: Some properties of fuzzy logic. Inform. Control 1971, nr 19.
[34] Łukasiewicz J.: Interpretacja liczbowa teorii zadań. Ruch filozoficzny 7, Warszawa 1922.
[35] Łukasiewicz J.: Selected works, PWN, Warszawa 1970.
[36] Pedrycz W.: On the use of fuzzy Łukasiewicz logic for fuzzy control. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, 1980, nr 3.
[37] Pedrycz W.: O metodzie predykcji opartej na logice wielowartościowej. Zesz. Nauk. Pol. Śl., ser. Automatyka z. 47, Gliwice 1979.
[38] Pedrycz W.: Stabilność w systemach opisanych relacjami rozmytymi. Zesz. Nauk. Pol. Śl., ser. Automatyka z. 47, Gliwice 1979.

[39] Pedrycz W.: O wyznaczaniu sterowania w dialogowych systemach sterowania opisanych równaniami relacyjnymi. Zesz. Nauk. Pol. Śl., ser. Automatyka z. 50, Gliwice 1980.
[40] Pedrycz W.: Sterowanie i systemy rozmyte. Zesz. Nauk. Pol. Śl., ser. Automatyka z. 70, Gliwice 1983.
[41] Sanchez E.: Inverses of fuzzy relations. Application to possibility distributions and medical diagnosis. Proc. IEEE Conf. Decision and Control. New Orleans 1977.
[42] Sanchez E.: Medical diagnosis and composite fuzzy relations. Advances in fuzzy sets theory and applications. North-Holland Amsterdam 1979.
[43] Sarna M.: Adekwatność modelowania matematycznego technicznych systemów mechanicznych w języku teorii i zbiorów rozmytych. Zesz. Nauk. Pol. Łódź., Rozprawy Naukowe 48, Łódź 1983.
[44] Skala H.J.: On many-valued logics, fuzzy sets, fuzzy logics and their applications. FSS 1978, nr 1.
[45] Wiess M.D.: Fiseedpoints separation and induced topologies for fuzzy sets. J. of Math. Anal. and Appl. 1975, nr 1.
[46] Wilk T.: Algorytmy podejmowania decyzji z zastosowaniem zbiorów rozmytych. Prace VII Krajowej Konf. Automatyki., Rzeszów 1977.
[47] Wygralak M.: A few words on the importance of Jan Łukasiewicz works for fuzzy subsets theory. Zeszyty Nauk. Akad. Ekonom., Poznań (w druku).
[48] Zadeh L.A.: Fuzzy sets. Information and Control, vol. 8, 1965.
[49] Zadeh L.A.: Biological application of the theory of fuzzy sets and systems. Biocybernetics of the central ner vous system. Boston, Little 1969.
[50] Zadeh L.A.: Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans. Systems Man and Cybernetics SMC, 3 January 1973.

Recenzent: Prof. dr. hab. Jadwiga **ORYLSKA**

Wpłynęło do Redakcji w sierpniu 1993 r.

Abstract

A fuzzy set theory is a new one of a still growing popularity [2], [4], [20], [30]. First paper (works) on this theory were published by Zadeh [48] in 1965. Actually, the fuzzy set theory is being applied in many spheres i.e.
- topology [25], [26], [45];
- theory of measurement and algebraic structures [21], [31], [32];

- steering [6], [7], [8], [10], [11], [12], [23], [39], [40];
- mechanics [5], [43];
- network models designing [3], [4];
- stability [38];
- organization [27], [28];
- deduction [9], [13], [37];
- decision making process [10], [13], 14], [29], [46];
- medical diagnostics [41], [42], [49].

In this paper - a theory of fuzzy sets was used in decision making process. This problem was considered in papers [10], [13], [14], [29], [46].

First chapters include basis elements of fuzzy sets theory. A fuzzy set A was defined by a membership function $\mu_A(x)$. Values of this function are numbers of partition [0,1]. Different rules on fuzzy sets were defined in next chapters. Examples of these rules for countably infinite and uncontable fuzzy sets are also included.

In chapter 5 a notion on fuzzy number was described. This number was marked in the same way as it was presented in work [2]. This mark is of a $[a,b,\alpha,\beta]$ kind. Rules of addition, substraction, multiplication and division were defined for fuzzy numbers. A converse number was also defined.

A basic idea of fuzzy sets theory is the relation between fuzzy sets, and a basic rule of this relation is its folding. An idea of fuzzy its sets folding is presented in chapter 6. A maximized rule of relation folding and other types of folding were also presented in chapter 6.

A decision making process based on the theory of fuzzy sets was described in chapter 7 where the notion of fuzzy environment suggested by Bellman and Zadeh is used. An X set of possible decisions, a G fuzzy set as a target, and a C fuzzy set as a fuzzy limit for a decision are given. Using G and C sets-it is posible to define a fuzzy decision D [13], [29], [30]. Owing to a fuzzy decision D it is possible to determine an aptimal unfuzzy decision x_{opt}. This decision is maximizing the membership function $\mu_D(x)$.