ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996
Seria: GÓRNICTWO z. 232 Nr kol. 1354

Kazimierz WANAT

LOKALIZACJA WSTRZĄSÓW W ANIZOTROPOWYM JEDNORODNYM OŚRODKU

Streszczenie. Podajemy opis metody lokalizacji wstrząsów górniczych w przypadku jednorodnego, anizotropowego ośrodka. Prezentowana metoda, równocześnie z lokalizacją wstrząsu, umożliwia wyznaczenie wybranych składowych tensora spowolnienia fal sejsmicznych. Proponowana miara nieadekwatności modelu pozwala się zorientować w przydatności uzyskanych rezultatów.

LOCATION OF SEISMIC EVENTS IN ANISOTROPIC AND HOMOGENEOUS MEDIUM

Summary. The paper presents the location procedure of seismic events in mines. Seismic source location can be improved by a method that simultaneously determines hypocenters and velocity model in the case of inhomogeneous medium. The measure of the distance between the physical theory and reality is proposed.

1. Podstawowe zależności

Przyjmujemy model ośrodka skalnego, w którym prędkość rozchodzenia się fal sejsmicznych zależy od kierunku ich propagacji, lecz nie jest uzależniona od miejsca powstania wstrząsu. Jeśli punkt $\vec{r}_o^{\,T} = (x_o, y_o, z_o)$ jest źródłem fal sejsmicznych, wówczas, równocześnie, jest on środkiem elipsoidalnego frontu falowego. Prędkość fal sejsmicznych, przemieszczających się w kierunku dowolnego wektora, otrzymamy dzieląc długość odcinka poprowadzonego z punktu $\vec{r}_o$, zgodnie ze wskazywanym kierunkiem, do miejsca przecięcia z powierzchnią frontu falowego przez czas liczony od momentu powstania wstrząsu t_o.

Momenty $t_i\ (i=1,2,\cdots,N)$ dotarcia fali do kolejnych N stanowisk sejsmometrycznych możemy zapisać wzorem

$$t_i = t_o + \sqrt{\vec{r}_i^{\mathrm{T}} C \vec{r}_i}\ (i=1,2,\cdots N) \tag{1.1}$$

gdzie:

$$\vec{r}^{\mathrm{T}} = (x_i - x_o, y_i - y_o, z_{i-} z_o) \tag{1.2}$$

jest wektorem poprowadzonym z hipocentrum $\vec{r}_o$ do i-tej stacji sejsmometrycznej, natomiast

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_5 & c_6 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

oznacza symetryczny, dodatnio określony tensor spowolnienia fal sejsmicznych.

W szczególnym przypadku $c_1 = c_4 = c_6 = c$ i $c_2 = c_3 = c_5 = 0$, ośrodek staje się izotropowy i wszystkie obliczenia znacznie się upraszczają. Sytuacja ta była przedmiotem oddzielnej analizy.

Dla uproszczenia dalszych obliczeń warto wprowadzić oznaczenia:

$$\vec{c}^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered} \vec{w}_i^{\mathrm{T}} = (x^2, 2xy, 2xz, y^2, 2yz, z^2), \\ x = x_i - x_o,\ y = y_i - y_o,\ z = z_i - z_o. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Wzór (1.1) przyjmuje teraz formę

$$t_i = t_o + \sqrt{\vec{c}^{\mathrm{T}} \vec{w}_i},\ (i=1,2,\cdots N). \tag{1.6}$$

Zadanie lokalizacji wstrząsów polegać będzie na znalezieniu współrzędnych hipocentrum wstrząsu $\vec{r}_o$ oraz wybranych $K \leq 6$ składowych wektora $\vec{c}$ w oparciu o zmierzone czasy t_i pierwszych wejść fal sejsmicznych na kolejne stanowiska sejsmometryczne. Indeksy obliczanych składowych tensora spowolnienia zapisujemy do zbioru Ω.

2. Lokalizacja wstrząsów

Różnicę między zmierzonym t_i oraz obliczonym ze wzoru (1.6) czasem wejścia fali sejsmicznej na i-te stanowisko sejsmometru oznaczymy symbolem ε_i

$$\varepsilon_i = t_i - t_o - \sqrt{\vec{c}^{\mathrm{T}} \vec{w}_i} \; (i = 1,2,\cdots,N) \tag{2.1}$$

Z powodu błędów pomiarowych, niezgodności przyjętego modelu propagacji fal sejsmicznych z rzeczywistością, niedokładnych współrzędnych ogniska wstrząsu i znanych tylko w przybliżeniu składowych tensora spowolnienia odchyłki ε_i będą na ogół różne od zera. Zadaniem lokalizacji jest dobranie takich $\vec{r}_o$ oraz $\vec{c}_\Omega$ (współrzędnych tensora spowolnienia o indeksach zawartych w zbiorze Ω), by suma kwadratów odchyłek ε_i była minimalna [1]

$$J(x_o, y_o, z_o, \vec{c}_\Omega, t_o) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2 = \min. \tag{2.2}$$

Funkcjonał J zależy również od nieznanego czasu powstania wstrząsu t_o, jednak ten parametr może być łatwo wyeliminowany. Korzystając z warunku narzucanego na minimum J ze względu na t_o

$$\frac{\partial J}{\partial t_o} = 0, \tag{2.3}$$

dostajemy

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i = 0. \tag{2.4}$$

Równanie to może być rozwiązane analitycznie

$$t_o = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \sqrt{\vec{c}^{\mathrm{T}} \vec{w}_i}\,. \tag{2.5}$$

Eliminacja t_o z dalszych obliczeń jest możliwa dzięki liniowości wzoru (1.6) ze względu na moment powstania wstrząsu. Jest to bezpośredni efekt prostych relacji fizycznych między czasem rejestracji momentów pierwszych wejść fal sejsmicznych na kolejne stanowiska sejsmometrów a odległościami tych stanowisk od ogniska wstrząsu. Pozostałe relacje są już znacznie bardziej skomplikowane.

Minimum J ze względu na poszukiwane składowe $c_k, (k = 1,2,\cdots,K), k \in \Omega$ tensora spowolnienia zostanie osiągnięte, jeśli

$$\frac{\partial J}{\partial c_k} = 0, k \in \Omega. \tag{2.6}$$

Warunki te określają układ K nieliniowych równań algebraicznych

$$\vec{a}(\vec{c}, \vec{r}_o) - t_o \vec{b}(\vec{c}, \vec{r}_o) = \vec{g}(\vec{r}_o). \tag{2.7}$$

Składowe K wymiarowych wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{g}$ wynoszą

$$\{\vec{a}\}_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{t_i w_i^{(k)}}{\sqrt{\vec{c}^{\mathrm{T}} \vec{w}_i}} \tag{2.8}$$

$$\{\vec{b}\}_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{w_i^{(k)}}{\sqrt{\vec{c}^{\mathrm{T}} \vec{w}_i}} \tag{2.9}$$

$$\{\vec{g}\}_k = \sum_{i=1}^{N} w_i^{(k)} . \tag{2.10}$$

Symbol $w_i^{(k)}$ oznacza zaś k-tą składową wektora $\vec{w}_i$.

Pozostałe trzy warunki konieczne wystąpienia minimum J

$$\frac{\partial J}{\partial x_o} = \frac{\partial J}{\partial y_o} = \frac{\partial J}{\partial z_o} = 0 \tag{2.11}$$

dostarczają dalszych trzech nieliniowych równań algebraicznych. Mogą one być zapisane w notacji wektorowej jako

$$\vec{r}_o = \frac{1}{N}\left(\vec{g}_1(\vec{r}_o) - \vec{a}_1(\vec{r}_o, \vec{c}) + t_o \vec{b}_1(\vec{r}_o, \vec{c})\right). \tag{2.12}$$

Czas powstania wstrząsu jest określony wzorem (2.5), natomiast

$$\vec{a}_1 = C^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N} t_i \alpha_{1i}, \sum_{i=1}^{N} t_i \alpha_{2i}, \sum_{i=1}^{N} t_i \alpha_{3i}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{2.13}$$

$$\vec{b}_1 = C^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_{1i}, \sum_{i=1}^{N} \alpha_{2i}, \sum_{i=1}^{N} \alpha_{3i}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{2.14}$$

$$\vec{g}_1 = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i, \sum_{i=1}^{N} y_i, \sum_{i=1}^{N} z_i\right)^{\mathrm{T}}. \tag{2.15}$$

gdzie:

$$\alpha_{ki} = \frac{\vec{c}^{\mathrm{T}} \vec{h}_i^{(k)}}{\sqrt{\vec{c}^{\mathrm{T}} \vec{w}_i}}, \quad i = 1,2,\cdots N, \quad k = 1,2,3. \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} \vec{h}_i^{(1)} &= (x, y, z, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \\ \vec{h}_i^{(2)} &= (0, x, 0, y, z, 0)^{\mathrm{T}}, \\ \vec{h}_i^{(3)} &= (0, 0, x, 0, y, z)^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$x = x_i - x_o, \; y = y_i - y_o, \; z = z_i - z_o$$

Wzory (2.12), (2.7) uzupełnione relacją (2.5) stanowią pełny układ K+3 nieliniowych równań algebraicznych na tyle samo niewiadomych. Układ ten może być rozwiązany, jeśli ilość N zmierzonych czasów pierwszych wejść fal sejsmicznych nie jest mniejsza od K+3+1. Rozwiązanie uzyskanego układu równań lokalizacyjnych można przeprowadzić wieloma sposobami. Niektóre z nich są opisane w pracy [2]. Opracowany przez nas algorytm sprowadza się do zastosowania metody Newtona, opisanej w cytowanej już pracy [2], dla aktualizacji składowych tensora spowolnienia fal sejsmicznych i przedstawionej przy okazji rozpatrywania ośrodka izotropowego, metody iteracyjnej, dla odnajdywania współrzędnych ogniska wstrząsu.

3. Miara nieadekwatności modelu

Wzór (1.6) pozwala na niezależne od samego procesu lokalizacji obliczenie wszystkich składowych tensora spowolnienia. Dla wyróżnienia tak obliczanych składowych oznaczmy je symbolem $\vec{c}'$. Związek (1.6) można przepisać jako

$$(t_i - t_o)^2 = \vec{c}'^{\mathrm{T}} \vec{w}_i, i = 1,2,\cdots,N. \tag{3.1}$$

Zdefiniujemy teraz N - wymiarowy wektor $\vec{t}$

$$\vec{t}^{\mathrm{T}} = \left((t_1 - t_o)^2, (t_2 - t_o)^2, \cdots, (t_N - t_o)^2\right), \tag{3.2}$$

oraz $N \times 6$ - wymiarową macierz W

$$W = \begin{pmatrix} \vec{w}_1^{\mathrm{T}} \\ \vec{w}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \vec{w}_N^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Jej wierszami są składowe wektorów $\vec{w}_i$ zdefiniowanych wzorem (1.5).

W notacji wektorowej zespół wyrażeń (3.1) przyjmuje formę

$$\vec{t} = W\vec{c}'. \tag{3.4}$$

Mnożąc to wyrażenie lewostronnie przez macierz W^{T} dostajemy układ 6 liniowych równań algebraicznych na poszukiwane składowe tensora spowolnienia fal sejsmicznych

$$W^{\mathrm{T}}\vec{t} = W^{\mathrm{T}}W\vec{t} \tag{3.5}$$

Jego formalne rozwiązanie ma postać

$$\vec{c}' = \left(W^{T} W\right)^{-1} W^{T} \vec{t} \; . \tag{3.6}$$

Składowe $\vec{c}$ uzyskane w procesie minimalizacji funkcjonału J (2.2) będą na ogół różne od $\vec{c}'$, chociaż, dla obliczenia tych ostatnich, skorzystamy z innych parametrów (t_o, x_o, y_o, z_o) uzyskanych w procesie lokalizacji wstrząsu. Jest to spowodowane błędami odczytu czasów t_i pierwszych wejść fal sejsmicznych oraz nieadekwatnością przyjętego modelu rozprzestrzeniania się zaburzeń.

Dla oceny stopnia nieadekwatności przyjętego modelu proponujemy przyjąć wyrażenie

$$\vec{u} = W^{T} W(\vec{c} - \vec{c}') . \tag{3.7}$$

Po skorzystaniu ze wzoru (3.6) łatwo uzyskamy

$$\vec{u} = W^{T}\left(W\vec{c} - \vec{t}\right) \tag{3.8}$$

Składowe 6 - wymiarowego wektora $\vec{u}$, podobnie jak składowe $\vec{c}$ (1.4), definiują pewien tensor U o postaci

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_4 & u_5 \\ u_3 & u_5 & u_6 \end{pmatrix} . \tag{3.9}$$

Odzwierciedla on rozbieżności obliczonych obydwu sposobami spowolnień fal sejsmicznych na dowolnie wybranym kierunku propagacji fal. Największa różnica wystąpi na kierunku odpowiadającym wektorowi własnemu U o maksymalnej wartości własnej $\lambda_{\max}$. Jest to liczba charakteryzująca globalną niezgodność założonego modelu propagacji fal sejsmicznych z rzeczywistością.

Z czysto formalnych względów zgodności wymiarów miar nieadekwatności uzyskanych przy analizie ośrodka izotropowego i anizotropowego, za miarę nieadekwatności modelu anizotropowego proponujemy przyjąć

$$u = \sqrt{\lambda_{\max}} \; . \tag{3.10}$$

Wymiarem tak uzyskanej liczby jest [ms], co zgadza się z wymiarem nieadekwatności otrzymanej dla modelu ośrodka izotropowego.

Obliczenia wykonane dla kilkuset wstrząsów z kopalni Rudna pokazują, że miara nieadekwatności spowodowana jedynie błędem odczytu czasów pierwszych wejść fal sejsmicznych jest mniejsza od 100[ms]. Nieadekwatności obliczone dla poszczególnych wstrząsów niewiele przekraczają tę wartość. W efekcie można uznać, że model jednorodnego, anizotropowego ośrodka całkiem nieźle opisuje własności górotworu w rejonie kopalni Rudna.

LITERATURA

1. Tarantola A.: Inverse problem theory. Elsevier 1987.
2. Wanat K.: Algorytmy numeryczne. DIR, Gliwice 1993.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Józef Dubiński

Wpłynęło do Redakcji 14.10.1996 r.

Abstract

A new method for mining tremors location and velocity model determination is formulated based on the model of inhomogeneous medium. The method presented here is based on an assumed velocity model of an ellipsoidal inhomogeneouty. Mining tremors location can be improved by a method that simultaneously determines hypocenters and some of the parameters of seismic waves velocity. The origin times can be excluded with that accounting by the special numerical method has been proposed. Because the real rocks environment is more complicated then this simple model, its use introduces unavoidable errors in the process of tremors location and velocity determination. Finally, the measure of the distance between the reality and the physical model is proposed.