ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 25 Nr kol. 498

JULIAN MARSZAŁ

NUMERYCZNE ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ BRZEGOWYCH TEORII NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH PŁYT IZOTROPOWYCH (Komunikat)

Streszczenie. W niniejszej pracy podano numeryczną metodę wyznaczania funkcji (obszarami liniowej) minimalizującej funkcjonał odpowiadający zadaniu brzegowemu teorii płyt sprężystych oraz oszacowanie a priori normy różnicy między funkcjami (klasy C^4, N_2^1) minimalizującymi dany funkcjonał.

1. Wstęp

W niniejszej pracy sformułowano za pomocą pojęcia minimum funkcjonału całkowego zadanie brzegowe teorii płyt cienkich, sprężystych, poddanych działaniu pola sił i temperatur. Minimum tego funkcjonału poszukuje się w klasie funkcji obszarami liniowych, co prowadzi do minimalizacji funkcji kwadratowej wielu zmiennych, a więc do rozwiązywania układów równań liniowych.

W pracy podano również oszacowanie normy różnicy między rozwiązaniem zadania brzegowego należącym do klasy $c^4(D)$, a rozwiązaniem należącym do klasy funkcji ciągłych i obszarami liniowych.

2. Sformułowanie zadania

Należy znaleźć taką funkcję $w_o(x,y)$; $(x,y) \in D$, dla której wartość funkcjonału

$$J(w) = \iint_D \left\{(\Delta w)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right] - 2f(x,y)w\right\}dxdy - \\ + 2\int_L \left(p(x,y)w + m(x,y)\frac{\partial w}{\partial n}\right)dL \qquad (2.1)$$

przy danych $p(x,y)$, $m(x,y)$, $f(x,y)$ jest najmniejsza.

3. Metoda rozwiązywania zadania 2

Metoda wyznaczenia argumentu $w_o(x,y)$ minimalizującego funkcjonał, którą zastosowano w pracy, polega na przyjęciu za dziedzinę funkcjonału takiego zbioru funkcji, w którym funkcjonał staje się funkcją wielu zmiennych.

Takie ograniczenie dziedziny funkcjonału prowadzi do minimalizacji funkcji wielu zmiennych, a to zaś - do rozwiązywania układów równań algebraicznych.

Zgodnie z określeniem metody za dziedzinę funkcjonału przyjęto następujące zbiory funkcji:

$$N_2^{(1)}(D) = \left\{ f(x,y):\ f \in C^o,\quad f \text{ - liniowa w trójkątnych obszarach} \right\}$$
$$N_2^{(o)}(D) = \left\{ f(x,y):\ f \text{ - stała w trójkątnych obszarach} \right\}. \tag{3.1}$$

4. Wariacyjne sformułowanie zadania dla układu

$$(u_o,\ \vartheta_o) = \left(\frac{\partial w_o}{\partial x},\ \frac{\partial w_o}{\partial y}\right).$$

Zbiory (3.1) nie należą do dziedziny funkcjonału (2.1) dlatego za niewiadome zadania przyjęto $(u_o,\ \vartheta_o) = \left(\frac{\partial w_o}{\partial x},\ \frac{\partial w_o}{\partial y}\right)$. Sformułowane zadania za pomocą funkcjonału (2.1) jest równoważne zadaniu polegającemu na minimalizacji funkcjonału

$$J(u,\vartheta,\lambda) = W(u,\vartheta) + 2V(u,\vartheta,\lambda) - 2l(u\ ,\vartheta), \tag{4.1}$$

gdzie

$$W(u,\vartheta) = \iint\limits_D \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)^2\right]\right\} dxdy \tag{4.2}$$

$$W(u,\vartheta,\lambda) = \iint_D \lambda(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)dxdy \tag{4.3}$$

$$l(u,\vartheta) = \iint_D \Psi(x,y)u\ dxdy + \int_L \left[\varphi(x,y)\vec{s} + m(x,y)\vec{n}\right](u,\vartheta)dL \tag{4.4}$$

$\vec{s}$, $\vec{n}$ - wektory (styczny i normalny do brzegu L), $\Psi(x,y)$, $\varphi(x,y)$ - funkcje dane.

Dziedzina funkcjonału (4.2) zawiera zbiór $N_2^{(1)}(D)$, tzn. że jest realne poszukiwanie w $N_2^{(1)}$ elementów $(\bar{u}_o, \vartheta_o)$ i $\bar{\lambda}_o \in N_2^{(o)}$ minimalizujących funkcjonał (4.1).

Funkcjonał $J(u,\vartheta,\lambda)\Big|_{\substack{u,\vartheta\in N_2^{(1)} \\ \lambda\in N_2^{(o)}}}$ jest równocześnie funkcją kwadratową wielu zmiennych.

Jeżeli oznaczymy

$$J(u,\vartheta,\lambda)\Big|_{\substack{u,\vartheta\in N_2^{(1)} \\ \lambda\in N_2^{(o)}}} = F(u_{ij}, \vartheta_{ij}, \lambda_{ij}), \tag{4.5}$$

to równanie

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ F = 0 \tag{4.6}$$

jest warunkiem koniecznym i dostatecznym minimum F. Równanie (4.6) jest również liniowym układem równań, określającym element $(\bar{u}_o, \vartheta_o)$ należący do $N_2^{(1)}$.
Układ (4.6) na mocy dodatniej określoności funkcjonału (4.2) jest układem oznaczonym.

Rozwiązując (4.6) otrzymamy

$$(\bar{u}_o, \vartheta_o) \in N_2^{(1)}.$$

Jeżeli zbiór

$$H \cap N_2^{(1)} = \Theta, \quad (u_0, \vartheta_0) \in H \text{ i } (\bar{u}_0, \vartheta_0) \in N_2^{(1)},$$

to

$$(\bar{u}_0 - u_0, \quad \bar{\vartheta}_0 - \vartheta_0) \neq (0,0).$$

W związku z tym prawdziwe jest następujące:

Twierdzenie 1

$$(H = C^4(\bar{D})) \Longrightarrow (\|\bar{u}_0 - u_0, \quad \bar{\vartheta}_0 - \vartheta_0\|_0 = O(h_1^2 + h_2^2)),$$

gdzie $(h_1, h_2) = (\frac{a}{N_1}, \frac{b}{N_2})$ są wymiarami trójkątnych podobszarów prostokątnego obszaru D.

Twierdzenie 1 podaje rząd zbieżności rozwiązania $(\bar{u}_0, \bar{\vartheta}_0)$ do rozwiązania (u_0, ϑ_0), gdy $(N_1, N_2) \to (\infty, \infty)$ i rozwiązanie (u_0, ϑ_0) należące do $C^4(\bar{D})$ istnieje.

LITERATURA

1. Borkowski S.: Przegląd prac dotyczących naprężeń termicznych w ciałach stałych (lata 1965-1967), Mech. Teor. Stos., 2, 7 (1969), 107-153.
2. Borkowski S., Marszał J.: Numeryczne rozwiązanie problemu brzegowego teorii naprężeń cieplnych, probl. węzłowy 06.1.1, temat 04.1.09, maszynopis, Gliwice 1971.
3. Borkowski S., Marszał J.: Numeryczne rozwiązanie płaskich problemów brzegowych teorii naprężeń cieplnych, problem węzłowy 06.1.1, temat 04.1.09, maszynopis, Gliwice 1972.
4. Marszał J.: Metody numeryczne rozwiązywania zadań brzegowych termosprężystości, Met. Numer..., Konf., Rzeszów 1972, 29-34.

5. Nowacki W.: Zagadnienia termosprężystości, Warszawa 1960.
6. Samarski A.A.: Wwiedienije w teoriju roznostnych schem, Moskwa 1971.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Р е з ю м е

В статье показан численный метод определения функции (частично линейной), которая минимизируем функционал, соответствующий краевой проблеме теории упругих пластин, а также дает априорную оценку нормы разности между функциями (класса C^4 и $N_2^{(1)}$, минимизирующими данный функционал.

THE NUMERICAL METHOD OF SOLUTION OF THE PROBLEMS OF TERMICAL TENSIONS THEORY IN ELASTIC PLATES

S u m m a r y

In this article have been given the numerical methods of determination function (integral lineal), which makes the functional minimal, suitable for the limit problem of the theory of elastic plates,as wellas a determination of norms difference between functions (the C^4 class and N_2^1) which makes the functional minimal.