ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978
Seria: Matematyka-Fizyka z. 29 Nr kol. 559

Szczepan BORKOWSKI
Instytut Mechaniki Teoretycznej -
Politechniki Śląskiej

NIEKTÓRE PROBLEMY SKRĘCANIA PRĘTÓW DLA OŚRODKA FIZYKALNIE NIELINIOWEGO

(Komunikat)

Streszczenie. W pracy przytoczono algorytm przybliżonego rozwiązywania problemów brzegowych teorii skręcania prętów, o przekroju wielospójnym, dla ośrodka fizykalnie nieliniowego (model Kauderera): stosuje się zamianę nieliniowego problemu brzegowego na ciąg iteracyjnych, liniowych problemów brzegowych.

1. Wstęp

W pracy podano algorytm iteracyjnego rozwiązywania zagadnień brzegowych teorii skręcania prętów o przekroju wielospójnym, dla ośrodka fizykalnie nieliniowego, w ramach teorii liniowej geometrycznie; w szczególności podano układ równań, z których wyznacza się stałe skręcania występujące w linearyzowanych problemach brzegowych.

Uzasadnienie celowości badań w tej dziedzinie jest wyczerpująco omówione w pracy H. Kauderera [4]; przykłady liczbowe rozwiązań zadań brzegowych (obszar kołowy i eliptyczny - [4], prostokątny - [5]) wykazują, że uwzględnienie nieliniowości fizycznej (w zakresie dopuszczalnym przez liniowość geometryczną) zmniejsza, przykładowo, naprężenia styczne o 10-15%, natomiast względny kąt skręcenia wzrasta od 8% - por. [4] do 75% - por. [5].

Wspomniane powyżej prace odnosiły się do obszarów jednospójnych a liczbowe wyniki uzyskano metodą małego parametru, bądź metodą różnic skończonych; przedstawiona w niniejszej pracy problematyka odnosi się do skręcania prętów o obszarach wielospójnych.

2. Sformułowanie zadania

Jak można wykazać, por. [2, 4, 5], w rozpatrywanym tutaj problemie zadanie brzegowe ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\gamma(\bar{s}^2)\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\gamma(\bar{s}^2)\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right]=-2,\quad (x,y)\in\Gamma \qquad (2.1)$$

$$F(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial\Gamma_j}=\begin{cases}0 & \text{dla } j=0,\\ C_j & \text{dla } j=,1,2\ldots,n;\end{cases}$$

przy spełnieniu następujących warunków:

$$\oint_{\partial\Gamma_j}\gamma(\bar{s}^2)\frac{F(x,y)}{\partial\nu}\,d\hat{s}=2\omega_j \qquad (2.2)$$

$$2G\Theta\left(\iint_{\Gamma}F(x,y)dxdy+\sum_{j=1}^{n}C_j\omega_j\right)=K.$$

W (2.1), (2.2) wprowadzono:

$$\bar{s}^2=\frac{3}{4}\Theta^2\left[\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right)^2\right] \qquad (2.3)$$

$$\gamma(\bar{s}^2)=1+\gamma_2\bar{s}^2,\quad \bar{s}=\frac{1}{2G}s.$$

W równaniach (2.1) - (2.3) przyjęto następujące oznaczenia: $F(x,y)$ - funkcja naprężeń; Γ - obszar wielospójny (przekrój pręta); $\partial\Gamma_j$, $j=0, 1,2,\ldots,n$ - brzegi $n+1$ - spójnego obszaru; ω_j - pole obszaru ograniczonego krzywą $\partial\Gamma_j$; s - intensywność naprężeń; γ_2 - współczynnik wyznaczany doświadczalnie; Θ - względny kąt skręcenia; K - moment skręcający; ν - normalna zewnętrzna do brzegu obszaru.

Zadanie sprowadza się więc do scałkowania nieliniowego równania (2.1) przy uwzględnieniu warunków $(2.1)_2$, (2.2).

3. Rozwiązanie zadania

Problem brzegowy (2.1) z warunkami (2.2) linearyzujemy wprowadzając k-te iteraty problemów brzegowych, liniowych, a także - warunków jednoznaczności i równania równowagi, (k=0,1,2,...).

$$L^{(k)}\left[F^{(k+1)}(x,y)\right]=-2,\quad (x,y)\in\Gamma;$$

$$F^{(k+1)}(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial\Gamma_j} = \begin{cases} C_o^{(k+1)} = 0 & \text{dla } j=0, \\ C_j^{(k+1)} & \text{dla } j=1,2,..,n; \end{cases}$$

$$\oint_{\partial\Gamma_j} f^{(k)}(x,y)\frac{\partial F^{(k+1)}(x,y)}{\partial\nu}\, ds = 2\omega_j, \quad j=1,2,...,n, \tag{3.1}$$

$$K = 2G\theta^{(k)}\left(\iint_{\Gamma} F^{(k)}(x,y)dxdy + \sum_{j=1}^{n} C_j^{(k)}\ \omega_j\right),$$

gdzie:

$$L^{(k)}(\ ) = \frac{\partial}{\partial x}\left[f^{(k)}\frac{\partial}{\partial x}(\ )\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f^{(k)}\frac{\partial}{\partial y}(\ )\right],$$

$$f^{(k)}(x,y) = 1 + \frac{9}{4}(\theta^{(k)})^2\left[\left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial y}\right)^2\right], \tag{3.2}$$

$$(k=0,1,2,...,)$$

Z iteracyjnymi, liniowymi problemami brzegowymi (3.1) rozpatrywać będziemy równocześnie następujące stowarzyszone problemy brzegowe:

$$L^{(k)}\left[F_o^{(k+1)}(x,y)\right] = -2, \quad (x,y)\in\Gamma,$$

$$F_o^{(k+1)}(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial\Gamma_j} = 0 \quad \text{dla} \quad j=0,1,2,...n; \tag{3.3}$$

$$L^{(k)}\left[F_l^{(k)}(x,y)\right] = 0 \qquad (x,y)\in\Gamma$$

$$F_l^{(k+1)}(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial\Gamma_j} = \begin{cases} 0 \text{ dla } l=0,1,..., i-1,i+1,...,n, \\ 1 \text{ dla } l=i. \end{cases}$$

Rozwiązanie problemu (3.1), podobnie jak w [6], poszukujemy w postaci:

$$F^{(k+1)}(x,y) = F_o^{(k+1)}(x,y) + \sum_{l=1}^{n} C_l^{(k+1)}\ F_l^{(k+1)}(x,y). \tag{3.4}$$

w której $F_o, F_l, (l=1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots n)$ będą rozwiązaniami zadań stowarzyszonych (3.3), a stałe $C_l^{(k+1)}$ - po podstawieniu (3.4) do (3.1), wyznaczymy z równań algebraicznych

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k+1)} C_j^{(k+1)} = b_i^{(k+1)} \quad i=1,2,\ldots n, \quad k=0,1,2,\ldots \tag{3.5}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= \oint_{\partial\Gamma_j} f^{(k)} \frac{\partial}{\partial\nu} \left[F_i^{(k+1)}(x,y)\right] ds, \\ b_i^{(k+1)} &= 2\omega_i - \oint_{\partial\Gamma_j} f^{(k)} \frac{\partial}{\partial\nu} \left[F_o^{(k+1)}(x,y)\right] ds. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Iterację otwieramy przyjmując k=0 oraz $f^{(o)} = 1$; w tym przypadku mamy do czynienia z klasycznym problemem skręcania prętów (zadanie de Saint Venanta). Jeżeli k-ta, k=0,1,2,..., iterata funkcji $F(x,y)$ jest znana, to wówczas przechodzimy do wyznaczenia k+1 iteracji (rozwiązania k+1-go iterowanego problemu brzegowego); w tym celu rozwiązujemy problemy stowarzyszone (3.3), dalej wyznaczamy stałe C_j z równań (3.5) a z (3.4) uzyskujemy k+1 iteratę, tj. funkcję $F^{(k+1)}$.

4. Wnioski końcowe

W pracy niniejszej przedstawiono problem bardzo ogólnie, nie wdając się w metody rozwiązywania iterowanych problemów brzegowych; są to zadania natury czysto matematycznej i stanowić będą przedmiot dalszych badań.

LITERATURA

[1] Borkowski Sz.: Niektóre problemy wariacyjnego formułowania zadań brzegowych ośrodków fizycznie nieliniowych. Zesz.Nauk.Pol.Śl. Mat.-Fiz., z. 25, 1974, s. 181-188.

[2] Borkowski Sz.: Skręcanie prętów o przekroju wielospójnym przy uwzględnieniu nieliniowości fizycznej ośrodka, III Ogólnopolska Konf. Zast. Mat.,Kom.Nauk Mat. PAN, Rzeszów-Polańczyk 1974, materiały 31-33.

[3] Borkowski Sz.; Wariacyjno-różnicowa metoda rozwiązywania zadań brzegowych ośrodków fizykalnie nieliniowych, Zesz.Nauk.Politechniki Śląskiej s. Mat.-Fiz., (w druku).

[4] Kaučerer H.: Nichtlineare Mechanik, Springer-Verlag 1958.

[5] Larg J.A., Miszew W.I.: Kruczenije prizmaticzeskich stierżniej iz nieliniejnogo uprugogo materiała, Izw.Wuzow.Str. i Arch., 9, 1972,42-46.

[6] Łurie A.I.: Tieorija uprugosti, Nauka 1970.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ КРУЧЕНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ
СТЕРЖНЕЙ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ

Р е з ю м е

В работе приводится алгоритм приближенного решения краевой задачи теории кручения стержней многосвязного профиля для физически нелинейной среды (модель Каудерера); применяется обмен нелинейной краевой задачи на последовательность итерационных, линейных краевых задач.

SOME PROBLEMS OF TORSION OF PRISMATIC ROADS
FOR PHYSICAL NONLINEAR MEDIUM

S u m m a r y

In this paper there was the algorithm of approximated boundary value problems solution of theory of prismatic roads torsion with multiconnected cross section for physicaly nonlinear medium. It is used to change the nonlinear value problem into sequence of iteration linear value problems.