ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: Matematyka-Fizyka z. 29 Nr kol. 559

JĘDRZEJCZYK Jadwiga
Instytut Mechaniki Teoretycznej -
Politechnika Śląska

RÓWNOWAŻNOŚĆ WARIACYJNEGO I OPERATOROWEGO UJĘCIA PŁYT FIZYKALNIE NIELINIOWYCH

Streszczenie: W pracy rozważa się niektóre własności operatora równania ugięcia płyt cienkich, geometrycznie liniowych i fizycznie nieliniowych (ośrodek Kauderera). W oparciu o te własności, w ramach hipotezy elementu normalnego, modyfikuje się ten operator i formułuje problem wariacyjnie.

Wstęp

Problematyka nieliniowych płyt cienkich występuje nader często w zastosowaniach inżynierskich, szczególnie w zagadnieniach dużych ugięć (nieliniowość geometryczna) a także przy analizie materiałów o wybitnie nieliniowych związkach fizycznych. Zagadnienia te są aktualnie w centrum zainteresowania zarówno inżynierów jak i matematyków - z uwagi na nowe problemy dotyczące zadań brzegowych dla nieliniowych równań różniczkowych.

Prezentowana praca dotyczy właśnie takiej problematyki. Celem jej jest takie zbudowanie operatora nieliniowego, opisującego ugięcie płyt cienkich, aby zachodziła równoważność problemu brzegowego i zadania wariacyjnego.

1. Równanie teorii płyt

Przedmiotem rozważań będzie teoria płyt cienkich o stałej grubości h, małej w porównaniu do pozostałych wymiarów płyty, geometrycznie liniowa i nieliniowa fizycznie (ośrodek H. Kauderera [1]).

Analizę ugięcia płyt cienkich przeprowadzimy, przyjmując wszystkie założenia w stronie statycznej i geometrycznej, które są uwzględniane w przybliżonej teorii zginania płyt Kirchhoffa [4].

Jako układ odniesienia przyjmiemy prostokątny układ współrzędnych (x, y, z), z płaszczyzną z = 0, pokrywającą się z nieodkształcalną powierzchnią środkową płyty.

Na podstawie powyższych założeń składowe odkształcenia ε_x, ε_y, $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ wyrażają się przez funkcję ugięcia $w = w(x,y)$ płyty równaniami:

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\, y}. \tag{1.1}$$

Przyjmujemy dalej, że modelem fizycznym płyty będzie ośrodek fizykalnie nieliniowy Kauderera.

Zgodnie z tym założeniem związki konstytutywne dla płyty, (por. [1]) będą miały postać:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 3K\psi(\bar{\varepsilon}^2)\varepsilon + 2G\chi(\bar{e}^2)(\varepsilon_x - \bar{\varepsilon}), \\ \sigma_y &= 3K\psi(\bar{\varepsilon}^2)\varepsilon + 2G\chi(\bar{e}^2)(\varepsilon_y - \bar{\varepsilon}), \\ \tau_{xy} &= G\chi(\bar{e}^2)\gamma_{xy} \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{3}\,\frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta}(\varepsilon_x + \varepsilon_y), \\ \bar{\varepsilon}^2 &= \frac{4}{9}\Big[\varepsilon_x^2\Big(2 + \frac{2\vartheta}{(1-\vartheta)^2}\Big) + \varepsilon_y^2\Big(2 + \frac{2\vartheta}{(1-\vartheta)^2}\Big) - \\ &\quad - \varepsilon_x\varepsilon_y\Big(2 - \frac{4\vartheta}{(1-\vartheta)^2}\Big) + \frac{3}{2}\gamma_{xy}^2\Big] \end{aligned} \tag{1.3}$$

W (1.2) i (1.3) $\psi(\bar{\varepsilon}^2)$ jest funkcją wydłużenia względnego, $\chi(\bar{e}^2)$ - funkcją odkształcenia postaciowego, ε_x, ε_y, $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ są współrzędnymi tensora odkształceń, $\bar{\varepsilon}$ jest średnim wydłużeniem względnym, $\bar{e}$ - intensywnością tensora odkształcenia, K, G, ϑ - stałymi materiałowymi.

Przyjmując w równaniach (1.2): $\psi(\bar{\varepsilon}^2) = 1$, $\chi(\bar{e}^2) = 1$ oraz uwzględniając w nich (1.3), otrzymamy równania stosowane w teorii liniowej.

Wypisując warunki równowagi dla elementu płyty przy obciążeniu poprzecznym $p = p(x,y)$ i uwzględniając w nich zależności (1.2) otrzymamy równanie, które wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi określa ugięcie płyty. Równanie to ma postać:

$$\begin{aligned} P_w &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[D_1\varphi(\varepsilon^2)\frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta}\Delta w + \frac{1}{3}D_2 f(\bar{e}^2)\Big(3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta}\Delta w\Big)\Big] + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big[D_1\varphi(\varepsilon^2)\frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta}\Delta w + \frac{1}{3}D_2 f(\bar{e}^2)\Big(3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta}\Delta w\Big] + \\ &+ 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Big[D_2 f(\bar{e}^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big] = p(x,y). \end{aligned} \tag{1.4}$$

W (1.4) przyjęto następujące oznaczenia:

$$\varepsilon = -\frac{1}{3}\frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta}\Delta w$$

$$\tilde{e}^2 = \frac{8}{9}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\left[1+\frac{\vartheta}{(1-\vartheta)^2}\right]+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\left[1+\frac{\vartheta}{(1-\vartheta)^2}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left[1-\frac{2\vartheta}{(1-\vartheta)^2}\right]+3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\} \tag{1.5}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Kz^2\,\varphi(z^2\varepsilon^2)dz = D_1\varphi(\varepsilon^2),\qquad D_1 = \frac{h^3K}{12}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 2Gz^2\chi(z^2\tilde{e}^2)dz = D_2 f(\tilde{e}^2),\qquad D_2 = \frac{h^3}{6}G.$$

W przypadku zadania liniowego ($f(\tilde{e}) = 1$, $\varphi(\varepsilon^2) = 1$) operator P przyjmuje postać operatora biharmonicznego ($P \to \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\Delta\Delta w$).

Funkcje $\varphi(\varepsilon^2)$, $f(\tilde{e}^2)$, określające nieliniowość fizyczną ośrodka, występują w zależności między średnim naprężeniem σ i wydłużeniem względnym ε

$$\frac{\sigma}{3K} = \varphi(\varepsilon^2)\varepsilon \tag{1.6}$$

oraz między intensywnością naprężenia τ i odkształcenia e

$$\frac{\tau}{G} = f(e^2)e. \tag{1.7}$$

Rozpatrywać będziemy tylko takie ośrodki, w których funkcje $\varphi(\varepsilon^2)$, $f(\tilde{e}^2)$, uzyskane na podstawie badań doświadczalnych, spełniają następujące warunki:

1. $f(\tilde{e}^2)$, $\varphi(\varepsilon^2) \in C^2$

2. $$\frac{d}{d\varepsilon}\left[\varphi(\varepsilon^2)\varepsilon\right] = \varphi(\varepsilon^2) + 2\varphi'(\varepsilon^2)\varepsilon^2 \geq \varkappa_1 > 0,$$

$$\frac{d}{d\tilde{e}}\left[f(\tilde{e}^2)\tilde{e}\right] = f(\tilde{e}^2) + 2f'(\tilde{e}^2)\tilde{e}^2 \geq \varkappa_2 > 0 \tag{1.8}$$

3. $f(0) = \varphi(0) = 1$

4. Krzywe $\varphi(\varepsilon^2)\varepsilon$ oraz $f(\tilde{e}^2)\tilde{e}$ są wklęsłe.

Z warunków (1-4) wynikają następujące ograniczenia na same funkcje φ i f:

$$\begin{aligned} &\varphi(0) \geq \varphi(\varepsilon^2) \geq \varkappa_1 \quad \varphi'(\varepsilon^2) \leq 0 \\ &f(0) \geq f(\bar{e}^2) \geq \varkappa_2 \quad f'(\bar{e}^2) \leq 0 \end{aligned} \qquad (1.9)'$$

gdyż, dla przykładu:

$$\varphi(\varepsilon^2) = \frac{1}{\varepsilon}[\varphi(\varepsilon^2)\varepsilon] = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \frac{d[\varphi(\varepsilon^2)\varepsilon]}{d\varepsilon}\, d\varepsilon \geq \varkappa_1,$$

$$\varphi'(\varepsilon^2) = \frac{1}{2\varepsilon^2}\left[\frac{d[\varphi(\varepsilon^2)\varepsilon]}{d\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon^2)\varepsilon}{\varepsilon}\right] \leq 0.$$

Analogicznie wykazuje się ograniczenia funkcji $f(\bar{e}^2)$.

2. Własności operatora ugięcia płyty

Omówimy te własności nieliniowego operatora ugięcia płyty, które wykorzystamy do modyfikowania teorii płyt nieliniowych i do konstrukcji zadania wariacyjnego.

Oznaczmy przez $L_2(\Omega)$ przestrzeń funkcji sumowalnych z kwadratem w obszarze Ω, będącym zarazem obszarem powierzchni środkowej płyty, z normą:

$$\|f\|^2 = \int_{\Omega} f^2(x,y)\,d\Omega. \qquad (2.1)$$

Za obszar określoności D(P) operatora P przyjmijmy zbiór funkcji cztery razy ciągle różniczkowalnych w $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ i spełniających na brzegu Γ obszaru Ω warunki:

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (x,y) \in \Gamma \qquad (2.2)$$

Obliczmy pochodną Gateaux operatora P, (rów.(1.4)) zdefiniowaną następująco (por. [2]):

$$P'_w h = \frac{d}{dt}[P(w+th)]\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{P(w+th) - Pw}{t}, \quad w, h \in D(P). \qquad (2.3)$$

Pochodna ta wynosi:

$$P'_w h = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big\{D_1 \frac{1-2\nu}{1-\nu}\varphi(\varepsilon^2)\Delta h + 2D_1 \frac{1-2\nu}{1-\nu}\varphi'(\varepsilon^2)F(w,h)\Delta w +$$
$$+ \frac{1}{3} D_2\, f(\tilde{e}^2)\Big(3\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta h\Big) + \frac{2}{3} D_2\, f'(\tilde{e}^2)H_1(w,h)\Big(3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta w\Big)\Big\} +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big\{D_1 \frac{1-2\nu}{1-\nu}\varphi(\varepsilon^2)\Delta h + 2D_1 \frac{1-2\nu}{1-\nu}\varphi'(\varepsilon^2)F(w,h)\Delta w +$$
$$+ \frac{1}{3} D_2\, f(\tilde{e}^2)\Big(3\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta h\Big) + \frac{2}{3} D_2\, f'(\tilde{e}^2)H_1(w,h)\Big(3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta w\Big)\Big\} +$$
$$+ 2D_2 \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Big\{f(\tilde{e}^2)\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} + 2f'(\tilde{e}^2)H_1(w,h)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big\}. \tag{2.4}$$

gdzie $F(w,h)$, $H_1(w,h)$ są formami biliniowymi, zdefiniowanymi następująco:

$$F(w,h) = \frac{1}{9}\Big(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\Big)^2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\Big), \tag{2.5}$$
$$H_1(w,h) = \frac{4}{9}\Big[2 + \frac{2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\Big] + \Big[2 + \frac{2\nu}{(1-\nu)^2}\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} +$$
$$+ 6\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} - \Big[1 - \frac{2\nu}{(1-\nu)^2}\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \Big[1 - \frac{2\nu}{(1-\nu)^2}\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad 0<\nu<\frac{1}{2},$$

Jak widać, operator $P(h)$ jest liniowy ze względu na h.

Obliczmy wielkość $(P'_w h_1, h_2)$ dla $h_1, h_2, w \in D(P)$. Korzystając z definicji iloczynu skalarnego w $L_2(\Omega)$ oraz z (2.4) otrzymamy:

$$(P'_w h_1, h_2) = \int_\Omega h_2\Big\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[D_1\frac{1-2\nu}{1-\nu}\varphi(\varepsilon^2)\Delta h_1 + 2D_1\frac{1-2\nu}{1-\nu}\varphi'(\varepsilon^2)F(w,h_1)\Delta w +$$
$$+ \frac{1}{3}D_2\, f(\tilde{e}^2)\Big(3\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta h_1\Big) + \frac{2}{3}D_2\, f'(\tilde{e}^2)H_1(w,h_1)\Big(3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta w\Big)\Big] +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big[D_1\frac{1-2\nu}{1-\nu}\varphi(\varepsilon^2)\Delta h_1 + 2D_1\frac{1-2\nu}{1-\nu}\varphi'(\varepsilon^2)F(w,h_1)\Delta w +$$
$$+ \frac{1}{3}D_2\, f(\tilde{e}^2)\Big(3\frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta h_1\Big) + \frac{2}{3}D_2\, f'(\tilde{e}^2)H_1(w,h_1)\Big(3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta w\Big)\Big] +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Big[f(\tilde{e}^2)\frac{\partial^2 h_1}{\partial x\partial y} + 2f'(e^2)H_1(w,h_1)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big]\Big\}\, d\Omega.$$

Całkując dwukrotnie przez części wyrażenie (2.6) i uwzględniając (2.2) otrzymamy:

$$(P'_w h_1,h_2) = \int_\Omega \Big\{ 9 D_1 \frac{1-\vartheta}{1-2\vartheta}\left[\varphi(\varepsilon^2)F(h_1,h_2) + 2\varphi'(\varepsilon^2)F(w,h_2)F(w, h_1)\right] +$$

$$+ \frac{1}{3} D_2\left[f(\tilde{e}^2)H_2(h_1,h_2) + 2 f'(\tilde{e}^2)H_1(w,h_1)H_2(w,h_2)\right]\Big\} d\Omega \qquad (2.7)$$

gdzie $H_2(w,h)$ jest formą biliniową, określoną następująco:

$$H_2(w,h) = \frac{2-\vartheta}{1-\vartheta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{2-\vartheta}{1-\vartheta}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} +$$

$$+ 6\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}. \qquad (2.8)$$

Łatwo zauważyć, biorąc pod uwagę (2.5), (2.7) i (2.8) że:

$$(P'_w h_1, h_2) \neq (P'_w h_2, h_1). \qquad (2.9)$$

Ponieważ, $(P'_w h_1, h_2)$ nie jest symetryczne, więc zgodnie z twierdzeniem z [5] operator Pw nie jest operatorem potencjalnym, czyli nie istnieje funkcjonał, którego gradientem byłby operator P.

Z drugiej strony wiadomo, że istnieje funkcjonał energii całkowitej, przyjmujący w stanie równowagi wartość najmniejszą.

Rozwiązanie równania operatorowego i minimum funkcjonału muszą być ze sobą równoważne. Aby zachować tę odpowiedniość proponujemy, w ramach stosowania hipotezy elementu normalnego, przyjąć przybliżoną wartość $H_1(w,w)$ w postaci:

$$\tilde{H}_1(w,w) = e^2 = \frac{4}{9}\Big\{\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)^2 + \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)^2 +$$

$$+ 6\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big)^2 = \frac{4}{9} H_2(w, h). \qquad (2.10)$$

Przy zmianie tej, funkcja $f(e^2)$ zachowuje własności (1.8) i w równaniu (1.4) funkcję $f(\tilde{e}^2)$ należy zastąpić przez $f(e^2)$.

Obliczając ponownie wyrażenie $(P'_w h_1, h_2)$ otrzymamy:

$$(P'_w h_1, h_2) = \int_\Omega \Big\{ 9 D_1 \frac{1-\vartheta}{1-2\vartheta}\left[\varphi(\varepsilon^2)F(h_1,h_2) + 2\varphi'(\varepsilon^2)F(w,h_1)F(w,h_2)\right] +$$

$$+ \frac{1}{3} D_2\left[f(e^2)H_2(h_1,h_2) + 2\,\frac{4}{9}\, f'(e^2)H_2(w_1,h_1)H_2(w,h_2)\right]\Big\} d\Omega. \qquad (2.11)$$

Jak łatwo zauważyć:

$$(P'_w h_1, h_2) = (P'_w h_2, h_1) \tag{2.12}$$

i zgodnie z twierdzeniem z [5] operator P jest operatorem potencjalnym.

Twierdzenie 1

Wyrażenie $(P'_w h, h)$ dla $w, h \in D(P)$ spełnia nierówność:

$$(P'_w h, h) \geq \gamma^2 \|h\|^2, \quad \gamma = \text{cosnt} \tag{2.13}$$

Dowód

Biorąc pod uwagę (2.11) otrzymamy:

$$(P'_w h,h) = \int_\Omega \Big\{ 9D_1 \frac{1-\vartheta}{1-2\vartheta}\left[\varphi(\varepsilon^2)F(h,h) + 2\varphi'(\varepsilon^2)F(w,h)F(w,h)\right] +$$

$$+ \frac{1}{3} D_2 \left[f(e^2)H_2(h,h) + 2f'(e^2) \frac{4}{9} H_2(w,h)H_2(w,h)\right]\Big\} d\Omega. \tag{2.14}$$

Z nierówności Schwarza dla form $F(w,h)$ oraz $H_2(w,h)$

$$H_2^2(w,h) \leq H_2(w,w)H_2(h,h) \tag{2.15}$$

oraz z warunków (1.8) otrzymamy:

$$(P'_w h,h) \geq \int_\Omega \Big\{9D_1 \frac{1-\vartheta}{1-2\vartheta}\left[\varphi(\varepsilon^2) + 2\varphi'(\varepsilon^2)F(w,w)\right] F(h,h) +$$

$$+ \frac{1}{3} D_2\left[f(e^2) + 2f'(e^2) \frac{4}{9} H_2(w,w)\right] H_2(h,h)\Big\} d\Omega. \tag{2.16}$$

Uwzględniając w powyższej nierówności ograniczenia $(1.8)_2$ oraz definicje (2.5) i (2.8) otrzymamy:

$$(P'_w h,h) \geq \int_\Omega \left[9D_1 \frac{1-\vartheta}{1-2\vartheta} \varkappa_1 F(h,h) + \frac{1}{3} D_2 \varkappa_2 H_2(h,h)\right] d\Omega \geq$$

$$\int_\Omega 2\mu\left[\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + 2\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right)^2\right] d\Omega, \tag{2.17}$$

gdzie: $\mu = \min\left(D_1 \varkappa_1 \frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta}, D_2 \varkappa_2 \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\right) > 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{1}{2}$.

Pamiętając, że $h \in D(P)$ i stosując w (2.17) dwukrotnie nierówność Friedrichsa [6]

$$\int_\Omega h^2 \, d\Omega \leq c\int_\Omega (\text{grad } h)^2 \, d\Omega \tag{2.18}$$

otrzymamy:

$$(P'_w h,h) > \frac{2\mu}{c}\int_{\Omega} h^2\, d\Omega. \tag{2.19}$$

Z nierówności (2.19) wynika, że pochodna Gateaux operatora P jest dodatnio określona, czyli że spełniona jest nierówność (2.13) - ze stałą $\gamma^2 = \frac{2\mu}{c^2}$ cbdo.

3. Funkcjonał zadania

Z własności operatora P i twierdzeń podanych w pracy [3] wynika, że dla równania $P_w = p(1.4)$ rozwiązanie:

(i) - istnieje, w obszarze D(P);

(ii) - jest jedyne;

(iii) - minimalizuje ono funkcjonał.

$$\phi(w) = \int_0^1 (Ptw,w)dt - (p,w) \quad w \quad D(P) \tag{3.1}$$

oraz (iv) element $w_o \in D(P)$ minimalizujący funkcjonał (3.1) spełnia równanie $Pw = p$.

Korzystając z definicji operatora P, wyrażenie (3.1) zapiszemy w postaci:

$$\int_0^1 (Ptw,\ w)dt = \int_0^1 df \int_{\Omega} w\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D_1\varphi(t^2\varepsilon^2)\frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta}\Delta wt + \frac{D_2}{3} f(t^2e^2)(3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} -\right.\right.$$

$$\left. - \frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta}\Delta w)t\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D_1 \frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta}\varphi(t^2\varepsilon^2)t\Delta w + \frac{D_2}{3} f(t^2e^2)(3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} -\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta}\Delta w)t\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[D_2 f(t^2\varepsilon^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} t\right]\right\} d\Omega. \tag{3.2}$$

Całkując dwukrotnie przez części wyrażenie (3.2), uwzględniając dalej (2.5) i (2.10) otrzymamy:

$$\int_0^1 (Ptw,\ w)\ dt = \int_0^1 t\ dt\int_{\Omega}\left[9\ D_1\frac{1-\vartheta}{1-2\vartheta}\varphi(t^2\varepsilon^2)F(w,w) +\right.$$

$$\left. + \frac{3}{4}D_2 f(t^2e^2)\frac{4}{9}H_2(w,w)\right]dt. \tag{3.3}$$

Zamiana zmiennych

$$\eta_1 = t^2\varepsilon^2, \quad \eta_2 = t^2e^2$$

doprowadzi całkę (3.4) do postaci:

$$\int_0^1 (Ptw,w)dt = \int_\Omega d\Omega \left\{ \int_0^{F(w,w)} \frac{9}{2} D_1 \frac{1-\vartheta}{1-2\vartheta} \varphi(\eta_1)d\eta_1 + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{4}{9}H_2(w,w)} \frac{3}{8} D_2 f(\eta_2)d\eta_2 \right\} d\Omega. \tag{3.4}$$

Przyjmując oznaczenia:

$$\begin{aligned} \tau_1(w,w) &= F(w,w) \\ \tau_2(w,w) &= \frac{4}{9} H_2(w,w) \\ g_1(\eta_1) &= \varphi(\eta_1) \frac{9}{2} D_1 \frac{1-\vartheta}{1-2\vartheta} \\ g_2(\eta_2) &= f(\eta_2) \frac{3}{8} D_2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

można funkcjonał (3.1) zapisać ostatecznie następująco:

$$\Phi(w) = \int_\Omega d\Omega \left[\sum_{i=1}^{2} \int_0^{\tau_i(w,w)} g_i(\eta)d\eta \right] d\Omega - \int_\Omega pw\, d\Omega. \tag{3.6}$$

Funkcjonał (3.6) na podstawie (1.8) może być rozpatrywany w przestrzeni Sobolewa W^2 (Ω). Minimum tego funkcjonału w tej przestrzeni istnieje [6] i jest ono rozwiązaniem uogólnionym problemu brzegowego (1.4), (2.2) z modyfikacją (2.10).

LITERATURA

[1] Kauderer H.: Nichtlineare Mechanik, Springer Verlag, 1968.

[2] Lusternik L.A., Sobolew W.I.: Elementy analizy funkcjonalnej, Warszawa 1959.

[3] Langenbach A.: Variationsmethoden in der nichtlinearen Elastizitäts und Plastizitätstheorie, Wiss.Z.Humboldt Univ. Berlin.Math.-Nat.R.-IX 1959/1960.

[4] Timoszenko S.: Teoria płyt i powłok, Arkady, Warszawa 1959.

[5] Вайнберг М.М.: Вариационные методы исследования нелинейных операторов, Гостехиздат, Москва 1956.

[6] Михлин С.Г.: Численная реализация вариационных методов, Наука, Москва 1966.

[7] Jędrzejczyk J.: Metoda sprężystych rozwiązań dla płyt nieliniowych fizycznie, Zesz.Nauk.Pol.Śl., Mat.-Fiz., w druku.

[8] Jędrzejczyk J.: Metoda elementów skończonych w płytach nieliniowych fizycznie, Zesz.Nauk.Pol.Śl., Mat.-Fiz., w druku.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ВАРИАНТНОЙ И ОПЕРАТИВНОЙ ТРАКТОВКИ ПЛАСТИН ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ

Р е з ю м е

В работе обсуждаются некоторые свойства оператора уравнения прогиба тонких пластин, геометрически линейных и физически нелинейных (центр Каудерера). Опираясь на этих свойствах, в пределах гипотезы нормального элемента, проводится модификация этого оператора и формируется проблема вариантно.

EQUIVALENCE OF VARIATIONAL AND OPERATIONAL CONCEPTION OF PHYSICALLY NONLINEAR PLATES

S u m m a r y

In the paper some properties of the thin plates deflection equation operator have been discussed. The plates are geometrically linear and physically nonlinear (Kauderer's medium).

Basing on these properties, within the hypothesis frame of a normal element, this operator has been formulated in a variational way.