

Julian MARSZAŁ

Hieronim LESZCZYŃSKI

Institut Matematyki - Politechnika Śląska

UKŁAD RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH O MACIERZY RZADKIEJ METODY
WARIACYJNO-RÓŻNICOWEJ ZAGADNIENIA TARCZOWEGO

Streszczenie: W pracy podano układ równań określający przybliżone rozwiązanie zadania brzegowego teorii sprężystości. Układ ten cechuje istotnie mniejsza liczba działań w nim występujących w porównaniu ze znanymi układami otrzymywanymi dla tego zagadnienia metodą różnicową.

Wstęp

Metoda elementu skończonego sprowadza różniczkowe zagadnienie brzegowe do zadania polegającego na rozwiązaniu układu liniowych równań algebraicznych, na ogół o dużej liczbie niewiadomych. Jedną z dobrych cech takiego układu (ze względu na jego rozwiązywanie) jest mała liczba działań występujących w układzie - macierz rzadka układu.

W pracy niniejszej porównano (ze względu na liczbę działań) dwa układy równań, określających przybliżone rozwiązanie zadania brzegowego, wynikające z przyjęcia dwóch różnych przestrzeni R^n (tj. przestrzeni o różnych bazach).

Wykazano, że proponowana metoda prowadzi do układu równań o istotnie mniejszej liczbie działań, a rząd zbieżności metody jest taki sam jak metody różnicowej.

1. Sformułowanie problemu

Niech dany będzie obszar $D = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$. Należy znaleźć taką funkcję wektorową $\bar{w} = (u, v)$, która spełnia następujące warunki:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = F_1, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F_2 \quad \text{dla } (x, y) \in D,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f_1, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} = f_2 \quad \text{dla } (x, y) \in \{(x, y) : x \in (0, a) \wedge (y = 0 \vee y = b)\},$$

$$(u, v) = 0 \quad \text{dla } (x, y) \in \{(x, y) : y \in (0, b) \wedge (x = 0 \vee x = a)\}. \quad (1.3)$$

Równania (1.1), (1.2), (1.3) określają pole przemieszczeń tarczy u-twierdzonej na brzegach, odpowiadających $x = 0$, $x = a$ i obciążonej na brzegach, odpowiadających $y=0$, $y=b$.

Wariacyjne sformułowanie zadania polega na minimalizacji funkcjonału, postaci:

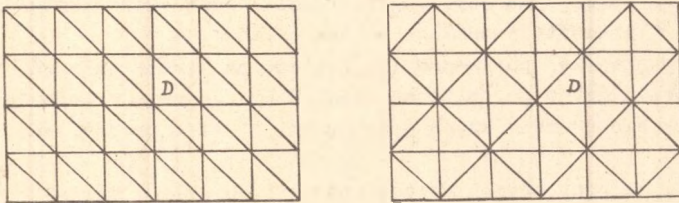
$$I(\bar{w}) = W(\bar{w}) - l(\bar{w}) \quad (1.4)$$

w zbiorze $W_2^{(1)}$

gdzie $W(\bar{w})$ jest danym funkcjonałem kwadratowym, $l(\bar{w})$ - funkcjonałem liniowym*).

Przybliżonego rozwiązania sformułowanego w (1.4) zadania poszukiwać będziemy w zbiorze funkcji liniowych w trójkątnych podobzarsach.

Rozważmy dwie różne konfiguracje trójkątnych podobzarsów obszaru D (rys. 1).



a/ Rys. 1

b/

Każdemu z podziałów a), b) obszaru D na trójkąty prostokątne odpowiada przestrzeń R^n funkcji liniowych w poszczególnych trójkątach. Przestrzenie R^n , odpowiadające podziałom a), b), mają tylko wspólne elementy liniowe w obszarze D . Są więc różnymi zbiorami funkcji liniowych w rozważanych podobzarsach.

*)

$$W(\bar{w}) = \frac{1}{2} \iint_D \left\{ 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy,$$

$$l(\bar{w}) = \iint_D \bar{F} \cdot \bar{w} dx dy + \int_{\partial D} \bar{f} \cdot \bar{w} dl, \quad \bar{F} = (F_1, F_2), \quad \bar{f} = (f_1, f_2).$$

Podział a) jest znanym klasycznym podziałem, stosowanym w metodzie elementu skończonego, a odpowiadający mu układ równań jest układem otrzymywanym metodą różnic skończonych.

W przypadku podziału b) otrzymany układ jest układem równań o macierzy istotnie rzadszej w stosunku do macierzy układu odpowiadającego podziałowi a).

2. Porównanie układów równań

Przez porównanie układów równań odpowiadających podziałom a, b) rozumiemy: porównanie rzędów zbieżności ciągów przybliżonych rozwiązań - określonych tymi układami oraz porównanie ilości działań występujących w poszczególnych układach.

Twierdzenie 1

Jeżeli rozwiązanie zadania (1.1), (1.2), (1.3) $\bar{w} \in W_2^{(2)}(\bar{D})$, to rzędy zbieżności ciągów przybliżonych rozwiązań odpowiadających podziałom a) i b) są równe.

Dowód wystarczy przeprowadzić dla $\bar{w} \in C^2(\bar{D})$.

Oznaczmy przez \bar{w}_n^* funkcję należącą do R^n i taką, że $\bar{w}_n^* = \bar{w}$ wierzchołkach trójkątnych podobszarów.

Wtedy

$$\left| \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{w}_n^*}{\partial x_i} \right| = O(h) \%, \quad \text{gdzie: } \begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = y \end{matrix} \quad i = 1, 2$$

w punktach dowolnego trójkąta obszaru \bar{D} ,

Stąd:

$$\| \bar{w} - \bar{w}_n^* \|_{W_2^1} = \| \Delta \bar{w} \| = O(h) \%, \quad (2.1)$$

przy czym $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, h_1, h_2 są długościami przyprostokątnych trójkątów.

Wariacja funkcjonału (1.4) jest równa:

$$\delta \bar{I}(w) = w(\bar{w}, \bar{\xi}) - 1(\bar{\xi}), \quad (2.2)$$

gdzie $W(\bar{w}, \bar{\xi})$ jest funkcjonałem dwuliniowym i $W(\bar{w}, \bar{w}) = 2W(\bar{w})$.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia minimum funkcjonału (1.4) jest równość:

$$W(\bar{w}, \bar{\xi}) - 1(\bar{\xi}) = 0. \quad (2.3)$$

W zbiorze R^n warunek (2.3) ma postać:

$$W(\bar{w}_n, \bar{\xi}_n) - 1(\bar{\xi}_n) = 0$$

Odejmując stronami (2.3), (2.4) otrzymujemy dla $\bar{\xi} = \bar{\xi}_n$ równość:

$$W(\bar{w} - \bar{w}_n, \bar{\xi}_n) = 0.$$

Podstawiając w (2.5) $\bar{\xi}_n = \bar{w}_n^* - \bar{w}_n$ otrzymamy:

$$W(\Delta\bar{w}, \bar{w}_n^* - \bar{w}_n) + 2W(\bar{w}_n^* - \bar{w}_n) = 0 \quad (2.6)$$

Ponieważ funkcjonał $W(\bar{w})$ jest dodatnio określony ([1]), zatem:

$$\|\bar{w}_n^* - \bar{w}_n\|^2 \leq M\left(\frac{1}{4\epsilon} \|\Delta\bar{w}_n\|^2 + \epsilon \|\bar{w}_n^* - \bar{w}_n\|^2\right), \quad (2.7)$$

gdzie $\epsilon > 0$,
skąd:

$$\|\bar{w}_n^* - \bar{w}_n\| \leq M_1 \|\Delta\bar{w}_n\|. \quad (2.8)$$

Z (2.1) i (2.8) otrzymujemy:

$$\|\bar{w}_n^* - \bar{w}_n\| = 0 \quad (|h|) \quad (2.9)$$

Z (2.9) i (2.1) dostajemy:

$$\|\bar{w} - \bar{w}_n\| = 0 \quad (|h|). \quad (2.10)$$

Wykazaliśmy zatem, że w przypadku a) i b) rzędy zbieżności ciągów przybliżonych rozwiązań są równe.

Równania określające przybliżone rozwiązanie zadania brzegowego można otrzymać na drodze minimalizacji całkowitego funkcjonału (1.4) w zbiorze $R^n C W_2^1$ (por. [2]).

W zbiorze tym, po wykonaniu występujących w funkcjonale operacji, staje się on funkcją kwadratową wielu zmiennych. Minimalizacja funkcji kwadratowej generuje układ równań liniowych określających element należący do przestrzeni R^n i minimalizujący funkcjonał.

Należy zauważyć, że równania różniczkowe fizyki matematycznej wynikają z bilansu wielkości fizycznych (np. energii, sił) dla dowolnego podobszaru rozważanego obszaru. W związku z tym układ równań określający przybliżone rozwiązanie rozważanego przez nas zadania możemy otrzymać dla przestrzeni $R^n C W_2^1$ z równań równowagi dla dowolnego podobszaru złożonego z wszystkich trójkątów o wspólnym wierzchołku.

Weźmy zatem pod uwagę płaski stan naprężenia, określony przez naprężenia $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{12} = \tau_{21}$. Naprężenia te wyrażają się jak wiadomo poprzez przemieszczenia u, v odpowiednio w kierunku x, y w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{22} &= \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{12} &= \tau_{21} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

gdzie λ, μ są stałymi Lamégo.

Oznaczamy przez $\bar{t} = (t_1, t_2)$ naprężenie w przekroju przechodzącym przez punkt (x, y) z normalną \bar{n} .

Wówczas

$$\begin{aligned} t_1 &= \tau_{11}l + \tau_{21}m, \\ t_2 &= \tau_{12}l + \tau_{22}m, \end{aligned} \quad (2.12)$$

gdzie $l = \cos(\bar{n}, x), m = \cos(\bar{n}, y)$.

Weźmy w obszarze D dowolny podobszar postaci jak na rys. 2.

Równanie równowagi dla tego podobszaru ma postać:

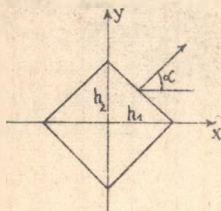
$$s \sum_{i=1}^4 t_i^l + 2h_1 h_2 \cdot \bar{F}^s = 0, \quad (2.13)$$

gdzie s oznacza długość boku podobszaru, \bar{F}^s - średnią wartość funkcji wektorowej \bar{F} w podobszarze, i - jest kolejnym wskaźnikiem boku podobszaru.

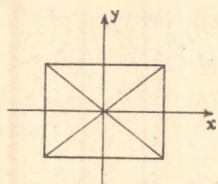
Podstawiając (2.11), (2.12) do (2.13) otrzymujemy równanie równowagi o postaci

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)(u_x - u_x) \cos \alpha + \mu(v_y - v_y) \sin \alpha &= -\frac{h_1 h_2}{s} F_1^s \\ (\lambda + 2\mu)(v_x - v_x) \sin \alpha + (v_x - v_x) \cos \alpha &= -\frac{h_1 h_2}{s} F_2^s, \end{aligned} \quad (2.14)$$

gdzie u_x, v_x, u_y, v_y są ilorazami różnicowymi lub uogólnionymi pochodnymi funkcji z R^3 .



Rys. 2



Rys. 3

Dla podobszarów postaci jak na rys. 3 w sposób analogiczny otrzymujemy równania postaci:

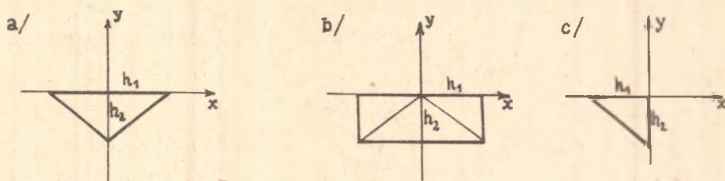
$$(\lambda+2\mu)(u_x - u_{\bar{x}})\cos\alpha + \mu(u_y - u_{\bar{y}})\sin\alpha + (\lambda+\mu)(\tilde{v}_x^{+1/2} - \tilde{v}_x^{-1/2})\sin\alpha = -\frac{2h_1h_2}{s}F_1^* \quad (2.15)$$

$$(\lambda+2\mu)(v_y - v_{\bar{y}})\sin\alpha + \mu(v_x - v_{\bar{x}})\cos\alpha + (\lambda+\mu)(\tilde{u}_y^{+1} - \tilde{u}_y^{-1})\cos\alpha = -\frac{2h_1h_2}{s}F_2^*$$

gdzie:

$$\tilde{v}_x = \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2h_1}, \quad \tilde{u}_y = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_2}$$

Podobszary mające część wspólną z brzegiem obszaru D mogą być postaci jak na rys. 4.



Rys. 4

Na rys. 4 uwzględniliśmy tylko podobszary mające wspólną część z brzegiem $y = b$. Na pozostałych brzegach występować mogą figury typu wymienionego wyżej.

Równanie równowagi dla podobszarów przedstawionych na rys. 4 są odpowiednio postaci:

$$(\lambda+2\mu)(u_x - u_{\bar{x}})\cos\alpha - \mu(2u_{\bar{y}} + v_x + v_{\bar{x}})\sin\alpha = -\frac{h_1h_2}{s}F_1^* - 2f_1^*\sin\alpha$$

$$\mu(v_x - v_{\bar{x}})\cos\alpha - [2(\lambda+2\mu)v_{\bar{y}} + \lambda(u_x + u_{\bar{x}})]\sin\alpha = -\frac{h_1h_2}{s}F_2^* - 2f_2^*\sin\alpha \quad (2.16)$$

$$(\lambda+2\mu)(u_x - u_{\bar{x}})\cos\alpha - \mu(2u_{\bar{y}} + v_x^{-1/2} + v_{\bar{x}}^{-1/2})\sin\alpha + \lambda(\tilde{v}_x - \tilde{v}_x^{-1/2})\sin\alpha =$$

$$= -2\frac{h_1h_2}{s}F_1^* - 2f_1^*\sin\alpha \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} & \mu(v_x - v_x) \cos \alpha - [2(\lambda + 2\mu)v_y + \lambda(u_x^{-1/2} + u_x^{-1/2})] \sin \alpha + \mu(u_y^{+1/1} - u_y^{-1/1}) \cos \alpha = \\ & = -2 \frac{h_1 h_2}{s} F_2^* - 2 f_2^* \sin \alpha \\ & - [(\lambda + 2\mu)u_x + \lambda v_y] \cos \alpha - \mu(u_y + v_x) \sin \alpha = -\frac{h_1 h_2}{2s} F_1^* - (\sin \alpha + \cos \alpha) f_1^* \quad (2.18) \\ & - \mu(u_y + v_x) \cos \alpha - [(\lambda + 2\mu)v_y + \lambda u_x] \sin \alpha = -\frac{h_1 h_2}{2s} F_2^* - (\sin \alpha + \cos \alpha) f_2^* \end{aligned}$$

Dla podziału a) obszaru D, przedstawionego na rys. 1, odpowiednie równania mają postać:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu)(u_x - u_x) \cos \alpha + \mu(u_y - u_y) \sin \alpha + \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(v_x - v_x^{-1/2} + v_x^{+1/2} - v_x) \sin \alpha = \\ & = -\frac{3h_1 h_2}{2s} F_1^* \quad (2.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu(v_x - v_x) \cos \alpha + (\lambda + 2\mu)(v_y - v_y) \sin \alpha + \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(u_y - u_y^{-1/1} + u_y^{+1/1} - u_y) \cos \alpha = \\ & = -\frac{3}{2} \frac{h_1 h_2}{s} F_2^* \end{aligned}$$

Nie podajemy tutaj równań odpowiadających podobszarom mającym część wspólną z brzegiem, jako że istotne różnice występują między równaniami odpowiadającymi podobszarom wewnętrznym obszaru D.

Porównując układy równań (2.19) z układem równań (2.14) i (2.15) stwierdzamy, że liczba działań występujących w układzie (2.19) jest istotnie większa; por. p. 3. Oznacza to, że macierz układu (2.14) i (2.15) jest istotnie rzadsza.

3. Porównanie układów równań

Rozważać będziemy rozwiązanie zadania (1.1), (1.2), (1.3) w przypadku, gdy $\lambda = \mu$, $h_1 = h_2$, $\bar{F} = 0$, $f_1 = f_2 = 0$ dla $y = 0$ i $f_1 = 0$, $f_2 = \frac{8(\lambda + \mu)}{a}$ dla $y = b$.

Przyjęta wartość funkcji f_2 i warunki $\lambda = \mu$, $h_1 = h_2$ oraz $\frac{a}{b} = 2$ powodują, że układy równań określające przybliżone rozwiązanie zadania nie zależą od parametrów a , b , h_1 , h_2 , λ i μ . Współczynniki występujące w układzie (1.1), (1.2) wyrażają się poprzez λ i μ następująco:

$$\alpha = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \beta = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Z przyjętych warunków brzegowych wynika, że funkcja u jest parzysta względem prostej $x = \frac{a}{2}$.

Przy powyższych warunkach układom równań określającym przybliżone rozwiązania odpowiadające podziałom a) i b) możemy nadać następującą postać:

$$\begin{aligned} M_{ij}(u) - A_{ij}(v) &= 0, \\ N_{ij}(v) - B_{ij}(u) &= f_{ij}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} M_{ij}(u) &= u_{ij}^{-0,375} (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - 0,125 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \\ A_{ij}(v) &= 0,125 (v_{i+1,j} + v_{i,j-1} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} - 2v_{ij} - v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j+1}), \\ N_{ij}(v) &= v_{ij}^{-0,375} (v_{i+1,j} + v_{i-1,j}) - 0,125 (v_{i,j+1} + v_{i,j-1}), \\ B_{ij}(u) &= 0,125 (u_{i+1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} - u_{ij} - 2u_{ij} - u_{i-1,j+1} - \\ &\quad - u_{i+1,j-1}), \end{aligned}$$

$$i = 2(1)N_2 - 1, \quad j = 2(1)N_1 - 1;$$

$$\begin{aligned} M_{ij}(u) &= u_{ij}^{-0,375} (u_{i,j+1} + u_{i,j-1})^{-0,25} \cdot u_{i-1,j}, \\ A_{ij}(v) &= 0,125 [v_{i,j+1} + v_{i,j-1} + 2(v_{i-1,j} - v_{ij} - v_{i-1,j+1})], \\ N_{ij}(v) &= v_{ij} - 0,75 v_{i-1,j} - 0,125 (v_{i,j+1} + v_{i,j-1}), \\ B_{ij}(u) &= 0,125 [u_{i,j-1} + 2(u_{i-1,j} - u_{ij} - u_{i-1,j+1}) + u_{i,j+1}] \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$i = N_2, \quad j = 2(1)N_1 - 1;$$

$$\begin{aligned} M_{ij}(u) &= u_{ij}^{-0,375} (u_{ij+1} + u_{ij-1}) - 0,25 u_{i+1,j}, \\ A_{ij}(v) &= 0,125 v_{ij+1} + v_{i,j-1} + 2(v_{i+1,j} - v_{ij} - v_{i+1,j-1}), \\ N_{ij}(v) &= v_{ij} - 0,75 v_{i+1,j} - 0,125 (v_{i,j+1} + v_{i,j-1}), \\ B_{ij}(u) &= 0,125 [u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + 2(u_{i+1,j} - u_{i,j} - u_{i+1,j-1})], \\ i &= 1, \quad j = 2(1)N_1 - 1; \end{aligned}$$

$$u_{ij} = 0,$$

$$N_{ij}(v) = 0,375 (v_{i+1,j} + v_{i-1,j}) + 0,25 v_{i,j-1},$$

$$B_{ij}(u) = 0,25 (u_{i,j-1} - u_{i+1,j-1}),$$

$$j = N_1, \quad i = 2(1)N_2 - 1;$$

$$N_{ij}(v) = v_{ij} - 0,75 v_{i-1,j} - 0,25 v_{i,j-1},$$

$$B_{ij}(u) = 0,25 u_{i,j-1},$$

$$i = N_2, \quad j = N_1;$$

$$N_{ij}(v) = v_{ij} - 0,75 v_{i+1,j} - 0,25 v_{i,j-1},$$

$$B_{ij}(u) = 0,25 u_{i,j-1},$$

$$i = 1, \quad j = N_1,$$

$$u_{ij} = v_{ij} = 0, \quad i = 1(1)N_2, \quad j = 1,$$

$$f_{ij} = 0, \quad i = 1(1)N_2 - 1, \quad j = 2(1)N_1;$$

$$f_{ij} = \frac{4}{N_1 - 1}, \quad i = N_2, \quad j = 2(1)N_1,$$

przy czym równania te dotyczą podziału jak na rys. 1a).

W przypadku podziału b) $M_{ij}(u)$, $N_{ij}(v)$ są identyczne jak w przypadku a), natomiast $A_{ij}(v)$ i $B_{ij}(u)$ mają postać:

$$A_{ij}(v) = 0,125 (v_{i+1,j+1} + v_{i-1,j-1} - v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j+1}),$$

$$B_{ij}(u) = 0,125 (u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}),$$

$$\text{dla } i = 2(2)N_2 - 1, \quad j = 3(2)N_1 - 2,$$

$$\text{lub } i = 3(2)N_2 - 1, \quad j = 2(2)N_1 - 1,$$

$$A_{ij}(v) = 0,$$

$$B_{ij}(u) = 0,$$

$$\text{dla } i = 2(2)N_2 - 1, \quad j = 2(2)N_1 - 1,$$

$$\text{lub } i = 3(2)N_2 - 2, \quad j = 3(2)N_1 - 2;$$

$$A_{ij}(v) = 0,125(v_{i,j-1} - v_{i,j+1}), \quad (3.3)$$

$$B_{ij}(u) = 0,125(u_{i,j-1} - u_{i,j+1}),$$

$$\text{dla } i = N_2, \quad j = 3(2)N_1 - 2,$$

$$A_{ij}(v) = 0,125[v_{i,j+1} - v_{i,j-1} + 2(v_{i-1,j-1} - v_{i-1,j+1})],$$

$$B_{ij}(u) = 0,125[u_{ij+1} - u_{i,j-1} + 2(u_{i-1,j-1} - v_{i-1,j+1})],$$

$$\text{dla } i = N_2, \quad j = 2(2)N_1 - 1;$$

$$A_{ij}(v) = 0,125(v_{i-j+1} - v_{i,j-1}),$$

$$B_{ij}(u) = 0,125(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}),$$

$$\text{dla } i = 1, \quad j = 3(2)N_1 - 2;$$

$$B_{ij}(u) = 0$$

$$\text{dla } i = 3(2)N_2 - 2, \quad j = N_1,$$

$$B_{ij}(u) = 0,25(u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1}),$$

$$\text{dla } i = 2(2)N_2 - 1, \quad j = N_1;$$

$$B(u) = 0,25 \cdot u_{i,j-1},$$

$$N_2, N_1$$

$$B(u) = 0,25 u_{i,j-1};$$

$$1, N_1$$

$$A_{ij}(v) = 0,125[v_{i,j-1} - v_{i,j+1} + 2(v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j-1})],$$

$$B_{ij}(u) = 0,125[u_{i,j-1} - u_{i,j+1} + 2(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1})],$$

$$\text{dla } i=1, \quad j=2(2)N_1 - 1.$$

Porównując układ równań (3.1) o współczynnikach (3.2) z układem (3.1) o współczynnikach (3.3) stwierdzamy, że liczba działań w jednym z równań układu odpowiadającego podziałowi b) jest mniejsza niż w odpowiednim równaniu układu odpowiadającego podziałowi a).

Biorąc pod uwagę równania odpowiadające punktom wewnętrznym obszaru D zauważamy, że liczba działań występujących w tych równaniach wynosi $28(2n-1)^2$ dla podziału a) oraz $14(2n-1)^2$ dla podziału b), czyli około 2 razy więcej w przypadku podziału a) (bez uwzględnienia punktów brzegowych);

jest to istotne przy rozwiązywaniu układów równań metodami stosowanymi do rozwiązywania układów o macierzach rzadkich.

Przykładowo rozwiązano układy równań odpowiadające podziałom a) i b), przyjmując $N_1 = N_2 = 5;9$. Obliczenia wykonano na maszynie cyfrowej "WANG".

Stosowano przy tym metodę iteracyjną, w której ciąg kolejnych przybliżeń określa wzór:

$$X_{i+1} = X_i + \sum_{k=1}^p t_i^k r_i^k, \quad (3.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} R_i &= AX_i - f, \\ \sum_{k=1}^p r_i^k &= R_i, \end{aligned} \quad (3.5)$$

przy czym $t_i^k (i=1,2,\dots,p)$ określają równanie:

$$(R_i, r_i^j) + \sum_{k=1}^p t_i^k (Ar_i^k, r_i^j) = 0. \quad (3.6)$$

Stwierdzono przy tym, że czas potrzebny na wyznaczenie kolejnej iteracji w przypadku układu odpowiadającego podziałowi b) jest istotnie krótszy niż w przypadku podziału a).

Dla wyznaczenia 20 iteracji w przypadku układu odpowiadającego podziałowi a) czas obliczeń wynosił 17 min., a w przypadku drugim - 13 minut.

LITERATURA

- [1] Michlin S.G.: Problema minimuma kwadraticznego funkcyjonała, Moskwa, 1952.
- [2] Borkowski S., Marszał J.: Numeryczne rozwiązywanie problemu brzegowego teorii naprężeń cieplnych. Probl. 06.1.1, temat 04.1.09, maszynopis, Gliwice, 1971.

СИСТЕМА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РЕДКОЙ МАТРИЦЕЙ ВАРИАЦИОННО
РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Резюме

В работе построена система уравнений, которая определяет приближённое решение краевой задачи плоской теории упругости. Доказано, что число действий в этой системе существенно меньше, чем в соответствующих известных системах разностного метода.

THE ALGEBRAIC SYSTEM WITH RARE MATRIX OF THE VARIATIONAL
DIFFERENCES METHOD OF SHEET OF TWO DIMENSIONAL STRESS

S u m m a r y

In this paper there has been given the construction of linear system which determines the approximate solution for the boundary problem of elasticity theory. This system characterises indeed the smaller number of operations in comparison with the known systems used for this problem which are received by a difference method.