ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 30 Nr kol. 560

Andrzej ŚWIERNIAK

Instytut Automatyki
Politechnika Śląska

UOGÓLNIENIE TWIERDZEŃ PEANO I OSGOODA NA RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE W PRZESTRZENI BANACHA

Streszczenie. Przedmiotem artykułu jest twierdzenie o istnieniu rozwiązania równania różniczkowego w przestrzeni Banacha, stanowiące uogólnienie twierdzenia Peano przy założeniu pełnociągłości prawej strony równania oraz twierdzenie o jednoznaczności, będące analogonem twierdzenia Osgooda.

1. WPROWADZENIE

Niech dany będzie podzbiór $U \subset R \times E$ (gdzie E - przestrzeń Banacha nad ciałem liczb rzeczywistych R) oraz funkcja ciągła $f: U \to E$. Równaniem różniczkowym pierwszego rzędu nazywamy równanie:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1.1}$$

Rozwiązaniem równania różniczkowego (1.1) nazywa się funkcję φ kl C^1 zmiennej rzeczywistej t($\varphi: I \to E$, $I \subset R$), która dla wszystkich $t \in I$ spełnia następujące warunki:

$$\text{(i)} \quad (t, \varphi(t)) \in U$$

$$\text{(ii)} \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

Równaniom tego typu poświęcono między innymi monografie [1], [2], [3]. Ograniczano się jednak zazwyczaj do twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności stanowiącego analogon twierdzenia Picarda-Lindelöfa znanego z teorii równań różniczkowych w przestrzeniach skończenie wymiarowych [4] względnie jego mutacji. Uogólnienia doczekało się również twierdzenie Rosenblatta-Perona [5].

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie prostych dowodów uogólnień twierdzeń Peano i Osgooda na przestrzenie Banacha. W twierdzeniu o istnieniu (uogólnienie twierdzenia Peano) zakłada się pełnociągłość prawej strony równania. Nie stanowi to jednak wzmocnienia założeń w stosunku do klasycznego twierdzenia Peano, ponieważ w przestrzeniach skończenie wymiarowych każda funkcja ciągła jest pełnociągła.

2. TWIERDZENIE O ISTNIENIU

W dowodzie twierdzenia o istnieniu wykorzystany zostanie następujący lemat:

Lemat 1

Z : funkcja $g : I \times U \to E$ ciągła na $I \times U$,
$I \subset R$ przedział zwarty

T : $g(t,u)$, (gdzie $t \in I$, $u \in U$) jest jednostajnie ze względu na $t \in I$ ciągła względem u.

Dowód

Niech $u_0 \in U$, $\varepsilon > 0$. Dla każdego $t \in I$ istnieje $\eta(t) > 0$ takie, że $|t' - t| < \eta(t)$ i $\|u - u_0\| \leqslant \eta(t)$ pociąga $\|g(t', u) - g(t, u_0)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, a w szczególności $\|g(t', u_0) - g(t, u_0)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, skąd wynika, że:

$$\|g(t', u) - g(t', u_0)\| \leqslant \varepsilon \tag{2.1}$$

Z każdym $t \in I$ jest zatem skojarzony zbiór otwarty utworzony przez t' takie, że $|t' - t| < \eta(t)$. Ponieważ I jest zwarty, więc I można pokryć skończoną ilością takich podzbiorów, czyli istnieją $t_1 \in I$ w skończonej ilości i $\eta > 0$ takie, że $\eta \leqslant \eta(t_1)$ dla wszystkich t, a (2.1) zachodzi dla $\|u-u_0\| \leqslant \eta$ przy dowolnym $t' \in I$.

C.n.w.

Twierdzenie 1

Z : f - pełnociągła w $U \subset R \times E$; $(t_0, x_0) \in U$

T : Równanie różniczkowe (1.1) posiada co najmniej jedno rozwiązanie przechodzące przez (t_0, x_0).

Dowód

Niech $\tau > 0$, $r > 0$ takie, że

$$[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times B(x_0, r) \subset U$$

Niech $M = \sup(\|f(t,x)\|;\ (t - t_0) < \tau,\ \|x - x_0\| \leqslant r)$
(Liczba taka istnieje, bo zbiór wartości $f(t,x)$ jest względnie zwarty).
Niech α, α_1 spełniają warunki: $0 \leqslant \alpha \leqslant \tau$, $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant r$, $M\alpha \leqslant \alpha_1$ i niech H będzie zbiorem funkcji φ ciągłych na $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ o wartościach w E takich, że $\varphi(t_0) = x_0$, $\|\varphi(t) - x_0\| \leqslant \alpha_1$ dla wszystkich $t \in I$. Zbiór H jest wypukły, domknięty i ograniczony.
Dla dowolnego $\varphi \in H$ definiuje się odwzorowanie $T\varphi$ przez:

$$T\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \quad \text{dla } t \in I \tag{2.2}$$

Jeśli $\varphi \in H$ to $T\varphi(t_0) = x_0$. Ponadto, dla $t \in I$ zachodzi:

$$\left\| T\varphi(t) - x_0 \right\| < \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f(s,\varphi(s)) \right\| ds \right| < M(t-t_0) < M\alpha \leqslant \alpha_1 \tag{2.3}$$

czyli $T: H \to H$. Zachodzi także:

$$\left\| T\varphi(t) - T\varphi(t_1) \right\| \leqslant \left| \int_{t_1}^{t} \left\| f/s,\varphi(s) \right\| ds \right| \leqslant M(t - t_1) \tag{2.4}$$

dla dowolnych $t, t_1 \in I$.
(2.4) świadczy o równociągłości rodziny $T(H)$.
Niech $C_\varphi : I \to E$ jest funkcją taką, że dla $\varphi \in H$, $t \in I$ $C_\varphi(t) = f(t,\varphi(t))$. Niech V oznacza zbiór wszystkich C_φ takich, że $\varphi \in H$. Ponieważ f jest pełnociągła, więc zbiór $V(t) = \{C_\varphi(t): C_\varphi \in V\}$ jest względnie zwarty dla każdego t. Z ciągłości funkcji $f(t,\varphi(t))$ na $I \times B(x_0, r)$ oraz ciągłości $\varphi(t)$ na I wynika, że V jest równociągła, bo dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego $t_0 \in I$ istnieje $\delta > 0$, takie, że dla każdego $\varphi \in H$ z nierówności $(t - t_0) < \delta$ wynika, że $\left\| C_\varphi(t) - C_\varphi(t_0) \right\| = \left\| f(t, \varphi(t)) - f(t_0, \varphi(t_0)) \right\| < \varepsilon$. Zatem stosując twierdzenie Ascoli [6] do zbioru V dowodzi się jego względnej zwartości.

Na podstawie twierdzenia Hausforffa [7] istnieje dla niego skończona $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ sieć $C\varphi_1, C\varphi_2 \dots C\varphi_n$, takich funkcji, że $C\varphi_k(t) = f(t,\varphi_k(t))$ dla wszystkich $t \in I$.
Niech

$$T\varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_k(s))ds \tag{2.5}$$

Dla każdego $t \in I$ zachodzi:

$$\left\| T\varphi(t) - T\varphi_k(t) \right\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f(s,\varphi(s)) - f(s,\varphi_k(s)) \right\| ds \right| < \frac{\varepsilon}{\alpha}\alpha = \varepsilon \tag{2.6}$$

Czyli $T\varphi_k(t), \dots T\varphi_n(t)$ jest ε siecią zbioru wszystkich $T\varphi(t)$ takich, że $T\varphi \in T(H)$. Zatem dla każdego $t \in I$ zbiór wszystkich $T\varphi(t)$ takich, że $T\varphi \in T(H)$ jest względnie zwarty na podstawie twierdzenia Hansdorffa. Ten fakt w połączeniu z (2.4) pozwala zastosować twierdzenie Ascoli, zgodnie z którym zbiór $T(H)$ jest względnie zwarty.

W końcu z ciągłości $f(t,x)$ na $I \times B(x_0, r)$ i lematu 1 wynika jednostajna ze względu na t ciągłość $f(t,x)$ względem x. A zatem dla dowolnych φ, $\varphi_0 \in H$ oraz dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że:

$$\left\| T\varphi(t) - T\varphi_0(t)\right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f(s,\varphi(s)) - f(s, \varphi_0(s))\right\| ds \right| \leq \varepsilon\alpha \qquad (2.7)$$

dla wszystkich $t \in I$, skoro tylko $\|\varphi(s) - \varphi_0(s)\| \leq \delta$ dla każdego $s \in I$.

Czyli T jest odwzorowaniem ciągłym. Spełnione są zatem założenia twierdzenia Schaudera [7]. Twierdzenie to zapewnia istnienie w H punktu stałego dla T, czyli rozwiązania równania różniczkowego (1.1).

C.n.w.

3. TWIERDZENIE O JEDNOZNACZNOŚCI

Twierdzenie 2

Z: $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ -rozwiązania równania różniczkowego (1.1) takie, że $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = x_0$ oraz zawarte w kuli $B(x_0, r)$,

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(\|y-x\|) \cdot k(t) \qquad (3.1)$$

dla dowolnych $x,y \in B(x_0, r)$, przy czym $L: R \to R$ jest funkcją ciągłą i dodatnią dla $u > 0$, $L(0) = 0$, spełniającą warunek:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{u_0} \frac{du}{L(u)} = \infty, \qquad (3.2)$$

gdzie $u_0 > 0$ dowolne, a $k(t)$ dodatnia, całkowalna na każdym skończonym przedziale R, o wartościach w R. T: φ_1 pokrywa się z φ_2.

Dowód

Niech

$$y(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \qquad (3.3)$$

Dla $t = t_0$ zachodzi

$$\|y(t_0)\| = 0 \qquad (3.4)$$

Niech dla pewnego $\alpha > 0$, $\varphi_1(t_0 + \alpha) \neq \varphi_2(t_0 + \alpha)$, wówczas zachodzi:

$$0 < \|y(t_0 + \alpha)\| \leq 2r \qquad (3.5)$$

$$\|y'(t)\| \leq L(\|y\|)k(t) \qquad (3.6)$$

Niech u(t) oznacza funkcję ciągłą, będącą rozwiązaniem równania:

$$u' = 2L(u)\,k(t). \tag{3.7}$$

Rozwiązanie tego równania przechodzące przez punkt

$$u(t_0 + \alpha) = \|y(t_0 + \alpha)\| \tag{3.8}$$

jest jedyne [8] i zbliża się asymptotycznie do osi $u = 0$, nigdzie jej nie przecinając.
Dla $t = t_0 + \alpha$ z (3.6), (3.7) i (3.8) wynika, że:

$$\|y'(t_0 + \alpha)\| < u'(t_0 + \alpha) \tag{3.9}$$

Ponadto, dla $t_1 \neq t$, otrzymuje się:

$$\frac{\|y(t_1)\| - \|y(t)\|}{|t_1 - t|} \leqslant \frac{\|y(t_1) - y(t)\|}{|t_1 - t|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|y(t_1) - y(t) - y'(t)(t_1 - t)\| + \|y'(t)\|(t_1 - t)}{|t_1 - t|}$$

Granica tego wyrażenia, gdy $t_1 \to t$ istnieje wszędzie z wyjątkiem co najwyżej przeliczalnej ilości punktów (gdyż $\|y(t)\|$ jest funkcją ciągłą). Zatem

$$\|y(t)\|' = \lim_{t_1 \to t} \frac{\|y(t_1)\| - \|y(t)\|}{t_1 - t} \leqslant \left(\frac{o(|t_1 - t|)}{|t_1 - t|} + \|y'(t)\|\right)$$

czyli

$$\|y(t)\|' \leqslant \|y'(t)\| \tag{3.10}$$

W punktach nieciągłości $\|y(t)\|'$ nierówność (3.10) zachodzi dla pochodnych jednostronnych. A więc

$$\|y(t_0 + \alpha)\|' < u'(t_0 + \alpha) \tag{3.11}$$

Z ciągłości u(t) i y(t) oraz związków (3.8) i (3.11) wynika, że dla $t < t_0 + \alpha$ bliskich $t_0 + \alpha$

$$u(t) \leqslant \|y(t)\| \tag{3.12}$$

Gdyby nierówność (3.1) nie była słuszna dla wszystkich $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$, to istniałoby takie maksymalne $t = t_2 \in [t_0, t_0 + \alpha]$, że

$$u(t) > \|y(t)\| \quad \text{dla } t < t_2$$

oraz $u(t_2) = \|y(t_2)\|$, ale rozumując podobnie jak dla $t_0 + \alpha$ mamy $\|y'(t_2)\| < u'(t_2)$, czyli dla $t < t_2$ bliskich t_2 $u(t) \leqslant \|y(t)\|$, a zatem (3.12) zachodzi dla wszystkich $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$.
Z kolei $u(t_0) > 0$, a zatem również $\|y(t_0)\| > 0$, co jest sprzeczne z (3.4). Założenie $\|y(t_0 + \alpha)\| > 0$ jest zatem niesłuszne, czyli $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ w całym przedziale ich istnienia.

C.n.w.

4. UWAGI KOŃCOWE

Przytoczone w artykule twierdzenia stanowią intuicyjnie oczywiste uogólnienie znanych twierdzeń z teorii równań różniczkowych w przestrzeniach skończenie wymiarowych. Dowody tu przedstawione można skrócić, stosując bardziej zaawansowany aparat matematyczny (np.: tw. Mazura w dowodzie tw. 1) i osłabić wymagania odnośnie funkcji f. Autorowi zależało jednak na prostocie i elementarności przedstawionych dowodów i wskazaniu pełnej analogii z twierdzeniami klasycznymi.

LITERATURA

[1] Dalieckij Ju.Ł., Kriejn M.G.: Ustojcziwost rieszenij diffieriencjalnych urawnienij w Banachowom prostranstwie, "Nauka", Moskwa 1970.

[2] Hale J.: Functional Differential Equations, New York, Springer 1971.

[3] Ladas G.E., Lakshmikantham V.: Differential Equations in Abstract Spaces, Academic Press, New York 1972.

[4] Hartman F.: Obyknowiennyje diffieriencjalnyje urawnienia. Mir, Moskwa 1970.

[5] Krasnosielskij M.A., Kriejn S.G.: Ob odnom kłassie tieoriemy jedinstwiennosti dla urawnienia $y' = f(x,y)$. UMN, 11, 1956.

[6] Dieudonné J.: Elements d'analyse, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[7] Lusternik L.A., Sobolew W.I.: Elementy analizy funkcjonalnej. PWN, Warszawa 1959.

[8] Pietrowski I.G.: Równania różniczkowe zwyczajne. PWN, Warszawa 1967.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПЕАНО И ОСГУДА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

Р е з ю м е

В статье рассматривается теорему существования для обыкновенных дифференциальных уравнений в Банаховом пространстве, которая является обобщением теоремы Пеано, исходя из того что правая часть уравнения вполне непрерывная, а также что выведенная теорема единственности аналогическая к теореме Осгуда.

GENERALIZATION OF PEANO'S AND OSGOOD'S THEOREMS ON DIFFERENTIAL EQUATIONS IN BANACH SPACES

S u m m a r y

In the paper the existence theorem for solving the differential equations in Banach spaces being a generalization of Peano's theorem, has been presented. In that theorem we have assumed that the right side of the equation is fully continous. An uniqueness theorem analogic to Osgood's criterion has also been derived.