Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 33 Nr kol. 622

Józef SZPILECKI

UWAGI O IMPULSOWEJ METODZIE OPARTEJ NA JĄDROWEJ MAGNETYCZNEJ RELAKSACJI

Streszczenie. W pracy omówiono jeden z możliwych wariantów rozwiązania macierzowego równania Blocha Torrey'a o periodycznie zmiennych współczynnikach, polegający na przejściu do układu współrzędnych, w którym pole magnetyczne wiruje razem z wektorem namagnesowania. W przypadku rezonansu częstości Larmora z częstością pola magnetycznego jest to równanie o współczynnikach niezależnych od czasu, typu rozpatrywanego w jednej z poprzednich prac autora i może być rozwiązane jedną z podanych tam metod.

1. WSTĘP

W pracy [1] i następnych [2, 3] rozpatrywano między innymi układ impulsowy, opisany równaniem różniczkowym:

$$\partial M/\partial t - (A_1 + A_2)M - \nabla^2(D\,M) = (\chi_0\, H/T_1) - \nabla^2(D\chi_0 M), \tag{1}$$

gdzie:

M - makroskopowy wektor namagnesowania,

D - współczynnik dyfuzji,

χ_0 - podatność magnetyczna,

H - wektor - kolumna o elementach: 0, 0, H_0,

przy czym w odcinkach czasu załączenia zmiennego pola magnetycznego H_1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1/T_2 & \gamma H_0 & -\gamma H_1 \sin\omega_1 t \\ -\gamma H_0 & -1/T_1 & \gamma H_1 \cos\omega_1 t \\ \gamma H_1 \sin\omega_1 t, & -\gamma H_1 \cos\omega_1 t, & -1/T_1 \end{pmatrix} \cdot \left[K(t_0,t_1)+K(t_2,t_3)+\ldots\right],$$

(2)

$$A_2 = \begin{pmatrix} (\gamma^2 H_1^2/2)(1+\cos 2\omega_1 t), & (\gamma^2 H_1^2/2)\sin 2\omega_1 t, \\ +(\gamma^2 H_1^2/2)\sin 2\omega_1 t, & (\gamma^2 H_1^2/2)(1-\cos 2\omega_1 t), \\ \gamma^2 H_0 H_1 \cos\omega_1 t, & +\gamma^2 H_0 H_1 \sin\omega_1 t, \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma^2 H_o H_1 \cos\omega_1 t \\ + \gamma^2 H_o H_1 \sin\omega_1 t \\ \gamma^2 H_o^2 \end{pmatrix} \left[1/T\ \gamma^2 (H_o^2 + H_1^2)\right] \left[K(0,t_o) + K(t_2,t_3) + \ldots\right] \tag{3}$$

W odstępach czasu bez zmiennego pola magnetycznego, w miejsce $A_1 + A_2$ występuje macierz:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1/T_2, & \gamma H_o, & 0 \\ -\gamma H_o, & -1/T_2, & 0 \\ 0, & 0, & 1/T - 1/T_1 \end{pmatrix} \cdot \left[K(0,t_o) + K(t_1,t_2) + \ldots\right]. \tag{4}$$

Oznaczono:

$$1/T = 1/T_2 - 1/T_1.$$

T_i, $i = 1,2$ - czasy relaksacji, $K(t_i, t_{i+1}) = 1$ dla $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$, poza tym przedziałem $= 0$, H_o - czasowo stałe natężenie pola magnetycznego, H_1 - amplituda czasowo zmiennego natężenia pola magnetycznego, przy tym H_i, $i = 0,1$ powoli zmienne funkcje współrzędnych przestrzennych, więc zmiany $\Delta H_i \ll H_i$ w obrębie próbki oraz $H_o \gg H_1$.

2. WPROWADZENIE NOWYCH ZMIENNYCH

Według znanego twierdzenia równanie o periodycznie zmiennych współczynnikach [4] można za pomocą nieosobliwego rzeczywistego przekształcenia sprowadzić do równania o stałych współczynnikach. Znane jest także takie przekształcenie w przypadku równania Blocha, które fizykalnie oznacza przejście od układu laboratoryjnego do układu wirującego z pewną częstością kątową ω, która w szczególności może się pokrywać z częstością zmiennego pola magnetycznego. Jeżeli jeszcze tym dwu częstościom równa się częstość Larmora γH_o, wtedy występuje rezonans paramagnetyczny.

Powyższą transformację współrzędnych zastosowano również w przypadku równania (1):

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\omega t, & -\cos\omega t, & 0 \\ \mp\cos\omega t, & \mp\sin\omega t, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ M_z \end{pmatrix} \tag{5}$$

Wyznacznik transformacji jest równy 1.

Transformacja odwrotna:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\omega t, & \mp\cos\omega t, & 0 \\ -\cos\omega t, & \mp\sin\omega t, & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \tag{6}$$

Po przejściu do nowych zmiennych macierze przybierają następującą postać (ograniczono się dla uproszczenia do jednego przedziału czasowego):

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1/T_2, & \mp(\gamma H_o-\omega), & -\gamma H_1 \cos(\omega\mp\omega_1)t \\ \pm(\gamma H_o-\omega), & -1/T_2, & H_1 \sin(\omega\mp\omega_1)t \\ \gamma H_1 \cos(\omega\mp\omega_1)t, & -\gamma H_1 \sin(\omega_1\mp\omega)t, & -1/T_1+1/T \end{pmatrix} \tag{7}$$

Macierz A_2 można przedstawić w postaci sumy dwu macierzy, z których jedna diagonalna jest stała i nie ulega zmianie przy transformacji. Natomiast druga daje po przekształceniu:

$$\begin{pmatrix} -(\gamma^2H_1^2/2)\cos(2\omega\mp2\omega_1)t, & -(\gamma^2H_1^2/2)\sin(2\omega\mp2\omega_1)t, & \gamma^2H_oH_1\sin(\omega\mp\omega_1)t \\ -(\gamma^2H_1^2/2)\sin(2\omega\mp2\omega_1)t, & (\gamma^2H_1^2/2)\cos(2\omega\mp2\omega_1)t, & -\gamma^2H_oH_1\cos(\omega\mp\omega_1)t \\ \gamma^2H_oH_1\sin(\omega\mp\omega_1)t, & -\gamma^2H_oH_1\cos(\omega\mp\omega_1)t, & 0 \end{pmatrix} \quad (1/T\gamma^2H_o^2) \tag{8}$$

Jeżeli wprowadzimy warunek:

$$\omega_1 \pm \omega = 0, \tag{9}$$

otrzymujemy następującą postać równania różniczkowego w nowych zmiennych:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ M_z \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} -1/T_2, & \mp(\gamma H_0-\omega), & -\gamma H_1 \\ \pm(\gamma H_0-\omega), & -1/T_2, & 0 \\ \gamma H_1, & 0 & -1/T_1+1/T \end{pmatrix} - \nabla^2 D + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, \\ 0, & \gamma^2 H_1^2 & -\gamma^2 H_0 H_1 \\ 0, & -\gamma^2 H_0 H_1, & 0 \end{pmatrix} \left[1/T\ {}^2H_0^2 \right] \right\} \begin{pmatrix} u \\ v \\ M_z \end{pmatrix} = (\chi_0/T_1 - \nabla^2 \chi_0 D)H. \qquad (10)$$

W przypadku, gdy zachodzi ponadto rezonans częstości Larmora z ω, więc:

$$\gamma \bar{H}_0 = \omega, \qquad (11)$$

gdzie $\bar{H}_0$ - stała przestrzennie część wielkości H_0, znikają dodatkowo wyrażenia $(\gamma\bar{H}_0 - \omega)$ w macierzy A_1.

Równanie (10) jest tego samego typu, co równania rozpatrzone w pracy [5], może więc być rozwiązane jedną z podanych tam metod.

W przypadku niezgodności częstości (z warunkiem (11))

$$\omega_1 \pm \omega = \Delta\omega \ll \omega$$

otrzymujemy dodatkowe poprawkowe wyrażenie w równaniu, pod założeniem, że rozstrojenie układu jest nie duże:

$$\Delta A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mp(\Delta\omega) & 0 \\ \pm(\Delta\omega), & 0 & \gamma H_1 \Delta\omega t \\ 0 & -\gamma H_1 \Delta\omega t, & 0 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

$$\Delta A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mp\gamma^2 H_1^2 \Delta\omega t, & \pm\gamma^2 H_0 H_1 \Delta\omega t \\ \mp\gamma^2 H_1^2 \Delta\omega t, & 0 & 0 \\ \pm\gamma^2 H_0 H_1 \Delta\omega t, & 0 & 0 \end{pmatrix} (1/T\ \gamma^2 H_0^2) \qquad (13)$$

Jeżeli rozstrajanie odbywa się według dowolnej periodycznej funkcji f(t), w miejsce $\Delta \omega t$ wchodzi ta funkcja.

Powyższy typ równania przy uczynionych dodatkowych założeniach daje się zasadniczo rozwiązać również jedną z metod opisanych w [5].

LITERATURA

[1] Szpilecki J.: ZN Politechniki Śląskiej, seria Mat.-Fiz. z. 11. 1966, ss. 65-83.

[2] Szpilecki J.: ZN Politechniki Śląskiej, seria Mat.-Fiz. z. 12. 1967, ss. 43-57.

[3] Szpilecki J.: Materiały VIII Ogólnopolskiego seminarium na temat: Magnetyczny rezonans jądrowy i jego zastosowania. Kraków 1975, ss. 77-85.

[4] Lösche A.: Kerninduktion, VEB Deutscher Verlag d. Wissenschaften Berlin 1957, przekł. ros. Izd. Inostr. Lit. Moskwa 1963.

[5] Szpilecki J.: Materiały IX Ogólnopolskiego Seminarium na temat: Magnetyczny rezonans jądrowy i jego zastosowania. Kraków 1977, ss. 167-171.

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ИМПУЛЬСНОМ МЕТОДЕ, ОСНОВАННОМ НА ЯДЕРНОЙ МАГНИТНОЙ РЕЛЯКСАЦИИ

Р е з ю м е

В статье рассматривается одно из возможных видоизменений метода решения матричного уравнения Блоха Торрея, имеющего периодически с временем изменяющиеся коэффициенты, основанное на преобразовании к координатной системе, вращающейся с вектором намагниченности. Если имеет место резонанс Ларморовой частоты с частотой магнитного поля, коэффициенты преобразованного уравнения не зависят непосредственно от времени уравнение имеет форму подобную к рассмотриваемой в прежней работе автора и может быть решено одним из методов из прежней работы автора.

Если эти частоты не согласуются точно, коэффиценты уравнения зависят от времени, но могут быть тоже использованны методы решения из прежней работы автора.

REMARKS ON THE PULSE METHOD BASED ON NUCLEAR MAGNETIC RELAXATION

S u m m a r y

The paper presents one of the possible variants of the solution of the Bloch-Torrey matrix equation with periodically yarying coefficients. The method described consists in transformation to the coordinate system rotating together with the magnetization vector. In the case of the resonance between the Larmor frequency and magnetic field frequency the resulting equation has time-independent coefficients and belongs to the class of equations which were previously described by the author and may be therefore solved using one of previously described methods.