ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Romuald SZOPA

# FUNKCJE MOMENTÓW ROZWIĄZAŃ STOCHASTYCZNYCH NIESTACJONARNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY

Streszczenie. W pracy rozważono zastosowanie stochastycznych równań całkowych VOLTERRY II rodzaju do badania stochastycznych układów dynamicznych o dwóch stopniach swobody i zmiennej inercji. Podano wzory na funkcję korelacji oraz funkcję korelacji wzajemnej rozwiązań. Na podstawie podanej metody przeprowadzono obliczenia numeryczne wariancji rozwiązań układu dynamicznego o zmiennej masie i dwóch stopniach swobody.

Liniowe niestacjonarne układy dynamiczne o dwóch stopniach swobody będące pod wpływem wymuszenia losowego można zapisać w postaci:

$$b_{m_1 11}(t)\, z_1^{(m_1)} + \ldots + b_{o11}(t) z_1 + b_{m_2 21}(t)\, z_2^{(m_2)} + \ldots + b_{o21}(t) z_2 = Q_1(t,\omega)$$

$$b_{m_1 12}(t)\, z_1^{(m_1)} + \ldots + b_{o12}(t) z_1 + b_{m_2 22}(t)\, z_2^{(m_2)} + \ldots + b_{o22}(t) z_2 = Q_2(t,\omega), \tag{1}$$

gdzie $b_{pqr}(t)$ są nielosowymi, rzeczywistymi funkcjami argumentu $t \in [0, T]$ i $T < \infty$, $p$ - oznacza rząd pochodnej, $q$ - numer zmiennej $z_q$, $r$ - numer równania ($q = 1,2$; $r = 1,2$). $Q_1(t,\omega)$, $Q_2(t,\omega)$, $z_q(t,\omega)$ to rzeczywiste, różniczkowe procesy stochastyczne II rzędu, $\omega \in \Omega$, $t \in [0, T]$, gdzie $< \Omega, \mathcal{B}, P >$ - przestrzeń probabilistyczna.

Dla układu (1) zakładamy znajomość warunków początkowych dla $t = 0$. Układy równań typu (1) opisują układy dynamiczne o zmiennych masach, momentach bezwładności, indukcyjnościach itp. Podobnie jak dla równań różniczkowych niezdeterminowanych można układ (1) przekształcić do układu równań postaci:

$$\left.\begin{array}{l} y_1^{(n)} + a_{n-1\,1}(t)\, y_1^{(n-1)} + \ldots + a_{o1}(t) y_1 = P_1(t,\omega) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(n)} + a_{n-1\,n}(t)\, y_n^{(n-1)} + \ldots + a_{on}(t) y_n = P_n(t,\omega) \end{array}\right\} \tag{2}$$

gdzie funkcje $a_{ij}(t)$ wyrażają się przez $b_{pqr}(t)$ i ich pochodne. Korzystając z własności przekształceń procesów stochastycznych [2 - 3] ze

znajomości charakterystyk probabilistycznych procesów $Q_j(t,\omega)$ wynika znajomość charakterystyk dla $P_i(t,\omega)$. Podobnie jest z warunkami początkowymi - znając je dla układu (1), można wyznaczyć ich wartości dla (2). Tak więc, gdy zostaną wyznaczone charakterystyki probabilistyczne rozwiązań $y_i$ dla (2), to znane będą charakterystyki rozwiązań $z_k$ dla (2), ponieważ $z_k$ jest równe odpowiedniej $y_j$. Charakterystyki probabilistyczne dla rozwiązań układu (2) można wyznaczyć na podstawie impulsowej funkcji przejścia (funkcji GREENA) [2 - 4], trudnej jednak do wyznaczenia dla tego typu układów. Dlatego też zostanie wykorzystana metoda równań całkowych [5]. Stochastycznymi równaniami całkowymi zajmowano się w [1, 6].

I-te równanie układu (2) można przez podstawienie

$$y_i^{(n)}(t,\omega) \overset{df}{=} x_i(t,\omega) \tag{3}$$

zamienić na równanie całkowe VOLTERRY II rodzaju postaci

$$x_i(t,\omega) = h_i(t,\omega) - \int_0^t K_i(t,u)\, x_i(u,\omega)du \tag{4}$$

dla $i = 1,2,\dots,n$, gdzie $x_i(t,\omega)$ oraz $h_i(t,\omega)$ są rzeczywistymi procesami stochastycznymi $\omega \in \Omega$, $t \in [0, T]$, $K_i(t,u)$ - jądra - rzeczywiste funkcje argumentów $t$ i $u$ oraz $0 \leqslant u \leqslant t \leqslant T < \infty$.

Z (3) wynika, że

$$\begin{aligned} y_i^{(n-k)}(t,\omega) &= y_i^{(n-k)}(0) + y_i^{(n-k+1)}(0)t + \dots + \\ &+ y_i^{(n-1)}(0)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \int_0^t \frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!}\, x_i(u,\omega)du \end{aligned} \tag{5}$$

dla $k = 1,2,\dots,n$ $y_i(0)$, $y_i'(0),\dots,y_i^{(n-1)}(0)$ - warunki początkowe dla (2). Podstawiając (3) i (5) do i-tego równania układu (2), otrzymuje się (4), gdzie

$$\begin{aligned} h_i(t,\omega) \overset{df}{=} P_i(t,\omega) - \Big\{ & a_{n-1\ i}(t)\, y_i^{(n-1)}(0) + \dots + a_{n-k\ i}(t) \cdot \\ & \cdot \Big[y_i^{(n-k)}(0) + y_i^{(n-k+1)}(0)t + \dots + y_i^{(n-1)}(0)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\Big] + \dots + \\ & + a_{0i}(t)\Big[y_i(0) + y_i^{(1)}(0)t + \dots + y_i^{(n-1)}(0)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\Big]\Big\} \end{aligned} \tag{6}$$

$$K_i(t,u) \stackrel{df}{=} a_{n-1\ i}(t) + \ldots + a_{n-k\ i}(t)\,\frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + a_{oi}\,\frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

W celu wyznaczenia funkcji korelacji oraz funkcji korelacji wzajemnej rozwiązań procesów $y_i(t,\omega)$ wykorzystane zostaną stochastyczne równania całkowe VOLTERRY II rodzaju w postaci, w której występuje rezolwenta. Dla (4) zajdzie:

$$x_i(t,\omega) = h_i(t,\omega) - \int_0^t R_i(t,u)\, h_i(u,\omega)du \tag{7}$$

gdzie rezolwenta

$$R_i(t,u) \stackrel{df}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_{n+1\ i}(t,u) \tag{8}$$

oraz

$$K_{1\ i}(t,u) \stackrel{df}{=} K_i(t,u)$$

$$K_{n+1\ i}(t,u) \stackrel{df}{=} \int_u^t K_{ni}(t,s)\, K_{1i}(s,u)ds. \tag{9}$$

Według (7) funkcja korelacji przyjmie postać

$$K_{x_i}(t_1,t_2) = K_{h_i}(t_1,t_2) - \int_0^{t_1} R_i(t_1,u_1)\, K_{h_i}(t_2,u_1)du_1 -$$

$$- \int_0^{t_2} R_i(t_2,u_2)\, K_{h_i}(t_1,u_2)du_2 + \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_i(t_1,u_1)\, R_i(t_2,u_2)\cdot \tag{10}$$

$$\cdot K_{h_i}(u_1,u_2)du_2du_1,$$

gdzie $K_{h_i}(u_1,u_2)$ - funkcja korelacji procesu $h_i(t,\omega)$. Jeśli warunki początkowe są zdeterminowane, to z (5) dla $k = n$ otrzyma się wzór na funkcję korelacji rozwiązania w postaci:

$$K_{y_i}(t_1,t_2) \stackrel{df}{=} E\Big\{\big[y_i(t_1,\omega) - E_{y_i}(t_1,\omega)\big]\big[y_i(t_2,\omega) -$$

$$- E_{y_i}(t_2,\omega)\big]\Big\} = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \frac{(t_1 - u_1)^{n-1}\,(t_2 - u_2)^{n-1}}{[(n-1)!]^2}\, K_{x_i}(u_1,u_2)du_2du_1. \tag{11}$$

W szczególności dla wariancji mamy wzór:

$$\sigma^2_{y_i}(t) = \int_0^t \int_0^t \frac{(t-u_1)^{n-1}\,(t-u_2)^{n-1}}{[(n-1)!]^2} K_{x_i}(u_1,u_2)du_2du_1. \tag{11'}$$

Natomiast funkcja korelacji wzajemnej rozwiązań $y_i(t,\omega)$ oraz $y_j(t,\omega)$ wyraża się wzorem:

$$K_{y_iy_j}(t_1,t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \frac{(t_1-u_1)^{n-1}\,(t_2-u_2)^{n-1}}{[(n-1)!]^2} K_{x_ix_j}(u_1,u_2)du_2du_1 \tag{12}$$

oraz

$$K_{x_ix_j}(t_1,t_2) = K_{h_ih_j}(t_1,t_2) - \int_0^{t_1} R_i(t_1,u_1)\,K_{h_ih_j}(u_1,t_2)du_1 -$$

$$- \int_0^{t_2} R_j(t_2,u_2)\,K_{h_ih_j}(t_1,u_2)du_2 + \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_i(t_1,u_1)R_j(t_2,u_2)K_{h_ih_j}(u_1,u_2)du_2du_1 \tag{13}$$

gdzie $K_{h_ih_j}(u_1,u_2)$ jest funkcją korelacji wzajemnej procesów $h_i(t,\omega)$ oraz $h_j(t,\omega)$. Założenie, że warunki początkowe są zdeterminowane powoduje, że wg (6)

$$K_{h_i}(t_1,t_2) = K_{P_i}(t_1,t_2) \quad \text{oraz} \quad K_{h_ih_j}(t_1,t_2) = K_{P_iP_j}(t_1,t_2).$$

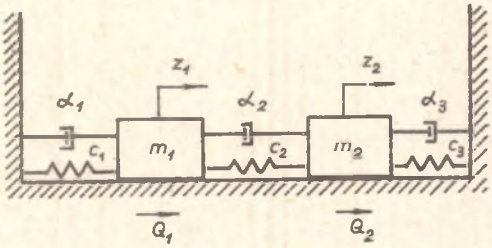
Wykorzystując wzory (10) i (11) obliczono wariancję rozwiązań dla układu o wzajemnej masie i dwóch stopniach swobody, którego ruch jest opisany układem równań (rys. 1):

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{z}_1 + (\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2)\dot{z}_1 - \mathcal{L}_2\dot{z}_2 + (c_1+c_2)z_1 - c_2z_2 &= Q_1(t,\omega) \\ m_2\ddot{z}_2 + (\mathcal{L}_2+\mathcal{L}_3)\dot{z}_2 - \mathcal{L}_2\dot{z}_1 + (c_2+c_3)z_2 - c_2z_1 &= Q_2(t,\omega) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Do dalszych rozważań założono, że

$$m_i = m(t) \overset{df}{=} \begin{cases} 1 - at & t \leqslant 1 \\ 1 - a & t > 1 \end{cases}$$

oraz $a$ - stała i $a \in (0, 1)$; $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_3 = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ - stała; $\mathcal{L}_2 = 0$; $c_1 = c_2 = c_3$ $c$ i $c$ stała; $Q_2 = \alpha m_1$ [kg] - masy, $\mathcal{L}_i$ [kg/s] - współczynniki tłumienia, $c_i$ [kg/s$^2$] - stałe sprężyste, $Q_i(t, \omega)$ [N] - siły, $t$ [s] - czas, $z_i$ [m] - przemieszczenie, a stąd $\sigma^2_{z_i}$ [m$^2$].




Rys. 1

Obliczenie numeryczne przeprowadzono dla funkcji korelacji o postaci:

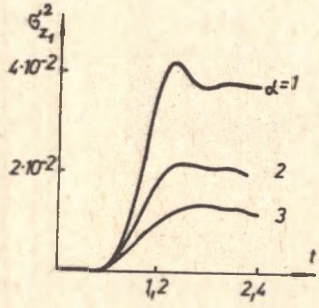
$$K_{Q_1}(t_1, t_2) = C\, e^{-\beta |t_1 - t_2|} \cos\gamma(t_1 - t_2). \tag{15}$$

Założono $C = 1$, ze względu na możliwość wyłączenia $C$ przed całki we wzorach (10) i (11) oraz skorzystano z algorytmów podanych w [7]. Układ równań (14) można przekształcić do postaci:

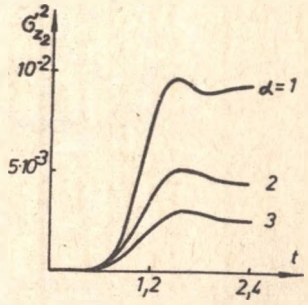
$$\begin{gathered}
\dddot{z}_1 + \frac{1}{m}\left[2\dot{m} + \mathcal{L}(1 + m)\right]\dddot{z}_1 + \frac{1}{m}\left[2c(1 + m) + \mathcal{L}(\dot{m} + \mathcal{L})\right] \\
\ddot{z}_1 + \frac{4\mathcal{L}c}{m}\dot{z}_1 + \frac{3c^2}{m} z_1 = \frac{1}{m}\left[\ddot{Q}_1 + \mathcal{L}\dot{Q}_1 + 2cQ_1\right] \\
\dddot{z}_2 \frac{\mathcal{L}}{m}(m + 1)\dddot{z}_2 + \frac{1}{m}\left[2c(m + 1) + \mathcal{L}^2\right]\ddot{z}_2 + \frac{4\mathcal{L}c}{m}\dot{z}_2 + \frac{3c^2}{m} z_2 = \frac{c}{m} Q_1.
\end{gathered} \tag{16}$$

Oznaczając prawe strony równań układu (16) odpowiednio przez $P_1(t, \omega)$ i $P_2(t, \omega)$ oraz stosując metody analizy korelacyjnej [2 - 3] otrzymano dla procesów $P_1$ i $P_2$ następujące postaci funkcji korelacji:

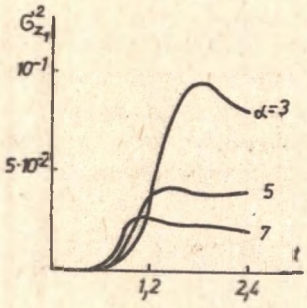
$$\begin{gathered}
K_{P_1}(t_1, t_2) = \frac{1}{m(t_1)\, m(t_2)} e^{-\beta |t_1 - t_2|} \cdot \\
\cdot\Big\{\left[\beta^4 - 6\beta^2\gamma^2 + \gamma^4 + (4c - \mathcal{L}^2)(\beta^2 - \gamma^2) + 4c^2\right]\cos\gamma(t_1 - t_2) + \\
+ 2\beta\gamma\left[2(\beta^2 - \gamma^2) + 4c - \mathcal{L}^2\right]\sin\gamma|t_1 - t_2|\Big\}
\end{gathered} \tag{17}$$



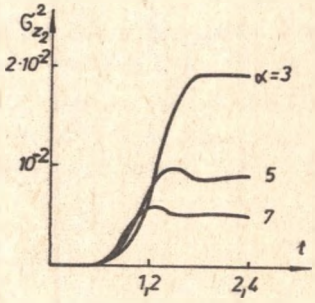

Rys. 2




Rys. 3




Rys. 4




Rys. 5

oraz

$$K_{P_2}(t_1,t_2) = \frac{c^2}{m(t_1)\,m(t_2)}\, e^{-\beta|t_1-t_2|} \cos\gamma(t_1 - t_2) \tag{18}$$

Na rysunkach 2-5 przedstawiono wykresy wariancji rozwiązań dla układu (14), gdy wymuszeniem jest proces stochastyczny o funkcji korelacji postaci (15). Rysunki 2 i 3 przedstawiają wariancje $\sigma^2_{z_1}$ i $\sigma^2_{z_2}$ przy różnych wartościach współczynnika tłumienia. Przyjęto $\alpha = 1,2,3$ oraz $c = 5$, $a = 0,5$, $\beta = \gamma = 1$. Zaobserwowano, że większym współczynnikom tłumienia odpowiadają mniejsze wartości wariancji. Rysunki 4 i 5 przedstawiają zmiany wartości wariancji dla różnych wartości współczynnika sprężystości c. Przyjęto to oraz $\alpha = 1$, $a = 0,5$, $\beta = \gamma = 1$, $c = 3,4,7$.

Dla większych wartości c otrzymano mniejsze wartości wariancji. Przebadano także wpływ pozostałych współczynników na wartości wariancji. Otrzymano zależności podobne jak w powyższych przypadkach. Wariancje rozwiązań mają tendencje do ustalenia się na pewnym poziomie po upływie pewnego czasu.

## LITERATURA


[1] Bharucha-Reid A.T.: Random Integral Equations. Acad. Press, N.Y. and London 1972.

[2] Skalmierski B., Tylikowski A.: Procesy stochastyczne w dynamice. PWN Warszawa 1972.

[3] Sobczyk K.: Metody dynamiki statystycznej. PWN, Warszawa 1973.

[4] Solodov A.V., Petrov F.S.: Linjejnyje avtomaticjeskije sistjemy c pjerjemjennymi paramjetrami. Izd. Nauka, Moskva 1971.

[5] Szopa J.: Application of VOLTERRA Stochastic Integral Equations of the II-nd Kind to the Analysis of Dynamic Systems of Variable Inertia, Journal of Technical Physics, 17, 4, 1976.

[6] Tsokos Ch.P., Padgett W.J.: Random Integral Equations with Applications to Stochastic Systems. Springer-Verlag, Berlin 1971.

[7] Wojtylak M.: Numeryczne problemy obliczania wariancji dla układów opisanych stochastycznym równaniem całkowym VOLTERRY II rodzaju. Zesz. Nauk. Polit. Śl., seria Matematyka-Fizyka z. 28, 1976.


## МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ МОМЕНТОВ "ВЫХОДА" СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ


Р е з ю м е

В статье предложен метод определения пробабилистических характеристик динамических систем с переменными коэффициентами и со случайным возмущением. Метод основан на использовании стохастического интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода. Проведены вычисления вариации решения системы с двумя степенями свободы с переменной массой.

RESPONSE OF A TWO-DEGREE-OF-FREEDOM SYSTEM
TO NONSTATIONARY RANDOM EXCITATION

S u m m a r y

The paper presents a method of determining probabilistic charakteristics concerning the response of a two-degree-of-freedom system of variable coefficients to random excitation. This method is based on the application of the stochastic Volterra integral equation of the second kind. On the basis of the suggested method there have been carried out numerical calculations concerning the variance of the response of the two-degree-of-freedom system with variable mass.