ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 14 Nr kol. 243

JÓZEF SZPILECKI
Katedra Fizyki B

TEORIA ROZCHODZENIA SIĘ FAL W PLAŹMIE CIAŁA STAŁEGO O WŁASNOŚCIACH FERROELEKTRYKA I FERROMAGNETYKA

Streszczenie. Autor opierając się na pracy [3, 4] uogólnił sformułowanie zagadnienia rozchodzenia się fal w nieorganicznym, opisanym przez współrzędne Kartezjusza (x,y,z) przewodzącym elektryczność ciele stałym o własnościach ferroelektrycznych i ferromagnetycznych, przy uwzględnieniu nieliniowości przenikalności elektrycznej ε i magnetycznej μ. Ponadto autor uwzględnił dyspersję przestrzenną, ograniczając rozważania do pierwszych i drugich pochodnych ze względu na zmienne przestrzenne. W przypadku ciał girotropowych można ograniczyć się do pierwszych pochodnych, w przypadku ośrodków o symetrii środkowej do drugich pochodnych. Ponadto obierając dowolny układ współrzędnych, niekoniecznie związany z osiami głównymi tensora przenikalności elektrycznej czy magnetycznej oraz nie precyzując położenia wektora falowego k, jak też składowych stałych wielkości występujących w równaniu, otrzymał bardzo ogólne sformułowanie zagadnienia, które przy przyjęciu zespolonego przedstawienia fal, może być opisane macierzowym równaniem różniczkowym (9), przy czym C oznacza wektor - kolumnę o elementach kolejno odpowiadających wszystkim występującym w równaniu niewiadomym: E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z, $V_{1,x}$, $V_{1,y}$, $V_{1,z}$, $V_{2,x}$, $V_{2,y}$, $V_{2,z}$, N_1, N_2. Każda z tych wielkości posiada składowe:

1. nie noszące charakteru falowego (stałe lub będące na ogół funkcjami współrzędnych przestrzennych i czasu) oraz
2. odnoszące się do poszczególnych częstości ω_i, i = = 1,2,....n. Ponieważ każdej częstości ω_i odpowiada 2 x 20 wielkości (mianowicie wielkości i ich wartości sprzężonych) rząd wektora-kolumny C jest 20 (1+2 n). Macierze, występujące w tym równaniu, (A),.... (V) są również tego samego rzędu.

1. Wstęp

W ostatnich latach uwagę uczonych zwracają problemy plazmy ciała stałego, które są badane przy różnych dodatkowych założeniach, w szczególności dotyczących własności rozpatrywanych ośrodków. Wiele prac poświęconych jest badaniu plazmy ciała stałego o własnościach ferromagnetycznych. Autor dla nadania równaniom problemu bardziej symetrycznej postaci sformułował zagadnienie dla ciała o własnościach ferromagnetycznych i ferroelektrycznych. Nie precyzowano również położenia osi głównych, występujących w równaniu tensorów w stosunku do przyjętego dowolnie prostokątnego układu współrzędnych.

Rozpatrzono rozchodzenie się fal w nieograniczonym ośrodku o wymienionych wyżej własnościach.

2. Matematyczne sformułowanie zagadnienia

Matematyczne sformułowanie zagadnienia obejmuje równania (1)-(7).

Obierając gaussowski układ jednostek otrzymujemy równania Maxwella w następującej postaci:

$$\text{rot } E = -(1/C)(\partial/\partial t)B$$

$$\text{rot } H = (1/c)(\partial/\partial t)D + (4\pi/c)\bar{j} \tag{1}$$

gdzie:

E, H - wektor natężenia pola elektrycznego i magnetycznego,

c - prędkość światła w próżni,

B, D - wektor indukcji magnetycznej lub elektrycznej,

$\bar{j}$ - gęstość prądu.

Równania materiałowe mają następującą postać [1, 2]

$$D = (\alpha_{i,k})(E+4\pi P)+ \sum_{l,m} (\gamma_{i,l,m})(\partial E_l/ \partial x_m) + (\Gamma_{1,i,k} \Delta E_i + $$
$$+ \Gamma_{2,i,k} (\partial/ \partial x_i)(\operatorname{div} E)) + \sum_{l,m} \varepsilon_{i,l,m} E_l E_m \tag{2}$$
$$B = (\beta_{i,k})(H+4\pi M)+ \sum_{l,m} (\delta_{i,l,m})(\partial H_l/ \partial x_m) + (\Delta_{1,i,k} \Delta H_i + $$
$$+ \Delta_{2,i,k} (\partial/ \partial x_i)(\operatorname{div} H)) + \sum_{l,m} \eta_{i,l,m} H_l H_m$$

gdzie

P, M - wektor polaryzacji elektrycznej lub magnetycznej.

Macierze kwadratowe $(\alpha_{i,k})$, $(\beta_{i,k})$ są trzeciego rzędu. Przez odpowiedni dobór osi współrzędnych mogą być one sprowadzone do postaci diagonalnej. Macierze $(\Delta_{1,i,k})$, $(\Delta_{2,i,k})$, $(\Gamma_{1,i,k})$, $(\Gamma_{2,i,k})$, $(\delta_{i,l,m})$, $(\gamma_{i,l,m})$ pochodzą od dyspersji przestrzennej. Macierze $(\varepsilon_{i,l,m})$, $(\eta_{i,l,m})$ przedstawiają nieliniowość przenikalności elektrycznej i magnetycznej.

Gęstość prądu przy przyjęciu dwu rodzajów nośników elektryczności można napisać następująco:

$$\bar{j} = N_1 e_1 V_1 - N_2 e_2 V_2 \tag{3}$$

N_1, N_2 - ilości nośników elektryczności w jednostce objętości,
e_1, e_2 - ładunki nośników elektryczności,
V_1, V_2 - prędkości nośników elektryczności.

Równania ciągłości posiadają następującą postać:

$$\partial N_s/ \partial t + \operatorname{div} (N_s V_s) = 0, \quad s = 1,2 \tag{4}$$

Równania ruchu nośników można napisać następująco:

$$\partial V_s / \partial t + (V_s \nabla) V_s + c_s^2 \ \nabla V_s / N_s - (e_s/m_s) \Big\{ E + $$
$$+ (1/c) \Big[V_s \times B \Big] \Big\} + V_s/\tau_s = 0 \qquad s = 1,2 \tag{5}$$

W równaniach (5) trzeci wyraz uwzględnia wpływ temperatury, bo oznaczając temperatury nośników przez T_s, mamy

$$c_s^2 = T_s/m_s, \qquad s = 1,2 \tag{6}$$

Ostatni wyraz przedstawia procesy relaksacji. τ_s oznaczają stałe relaksacji równe odwrotności częstości zderzeń.

Równania momentów posiadają następującą postać:

$$\dot{M} = - \bar{\varepsilon} \Big[M \ x((2 \ \bar{A}/M_o^2) \ \nabla^2 M + H) \Big] + \bar{\alpha} \Big[M \ x \ \dot{M} \Big] / M_o$$
$$\dot{P} = \quad \bar{\delta} \Big[P \ x((2 \ \bar{B}/P_o^2) \ \nabla^2 P + E) \Big] + \bar{\beta} \Big[P \ x \ \dot{P} \Big] / P_o \tag{7}$$

$\bar{A}$, $\bar{B}$ - stałe wymiennego działania,

$\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ - stałe charakterystyczne relaksacji prędkości zmiany polaryzacji elektrycznej i magnetycznej,

$\bar{\delta}$, $\bar{\varepsilon}$ - współczynniki.

3. Sprowadzenie układu równań (1)-(7) do postaci macierzowej

Przyjmując, że wszystkie wielkości niewiadome układu równań (1)-(7) dadzą przedstawić się następująco:

$$W(x,y,z,t) = W_o + W_o(x,y,z,t) + \sum_r W_{1,r}(x,y,z,t) \cdot$$
$$\cdot e^{j(\omega_r t-(k_{rx}x+k_{ry}+k_{rz}z))} + \sum_r W_{1,r}^{x}(x,y,z,t) \cdot$$
$$\cdot e^{-j(\omega_r t-(k_{rx}x+k_{ry}y+k_{rz}z))} \qquad (8)$$

co fizykalnie oznacza rozchodzenie się fal płaskich w nieograniczonym ośrodku, przy czym

W_o - wartość stała,

$W_o(x,y,z,t)$ - funkcja o charakterze niefalowym,

$W_{1,r}(x,y,z,t)$, $W_{1,r}{}^{x}(x,y,z,t)$ - amplitudy fal o częstości ω_r

x - oznacza wielkość zespoloną sprzężoną, można napisać układ równań (1)-(7) w postaci macierzowej

$$(A)\partial C/\partial t + (B)\partial C/\partial x + (D)\partial C/\partial y + (E)\partial C/\partial z + (F)C +$$
$$+ (G)\partial^2 C/\partial t\,\partial x + (I)\partial^2 C/\partial t\,\partial y + (J)\partial^2 C/\partial t\,\partial z +$$
$$+ (K)\partial^3 C/\partial t\,\partial x^2 + (L)\partial^3 C/\partial t\,\partial x\,\partial y + (M)\partial^3 C/\partial t\,\partial y^2 +$$
$$+ (N)\partial^3 C/\partial t\,\partial y\,\partial z + (O)\partial^3 C/\partial t\,\partial z^2 + (P)\partial^3 C/\partial t\,\partial x\,\partial z +$$
$$+ (Q)\partial^2 C/\partial x^2 + (R)\partial^2 C/\partial x\,\partial y + (S)\partial^2 C/\partial y^2 + (T)\partial^2 C/\partial y\partial z +$$
$$+ (U)\partial^2 C/\partial z^2 + (V)\partial^2 C/\partial x\,\partial z = \bar{N}_o + \bar{N}_1 \qquad (9)$$

C - wektor-kolumna o elementach: E_x, E_y, E_z, H_y, H_x, H_z, P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z, $V_{1,x}$, $V_{1,y}$, $V_{1,z}$, $V_{2,x}$, $V_{2,y}$, $V_{2,z}$, N_1, N_2. Ponieważ wartości stałe uwzględniono w macierzach lewej strony równania, każda z wymienionych wyżej wielkości posiada tu składowe oznaczone indeksem 0,1,2, zgodnie z podstawieniem (8), przy czym po składowych o indeksie r, należy napisać wielkości zespolone sprzężone. Jeżeli w szeregu (8) uwzględnimy n składowych, rząd wektora-kolumny będzie 20 $(1+2n)$.

Występujące po prawej stronie równania wyrazy nieliniowe drugiego stopnia podzielono na dwa rodzaje: przez $\overline{N}_0$ oznaczono wektor-kolumnę w której jeden lub oba czynniki posiadają charakter niefalowy, przez $\overline{N}_1$ wektor-kolumnę, w której oba czynniki posiadają charakter falowy. Wielkości oznaczone indeksem 0 występujące w $\overline{N}_0$ mogą również spowodować zmianę częstości, mianowicie jeżeli czasową zmienność tych wielkości przyjmie się w postaci:

$$C_0 = C_0' + \sum_k (C_k e^{j\Omega_k t} + C_k^x e^{-j\Omega_k t}) \qquad (10)$$

przy czym C_0', C_k, C_k^x - wektor-kolumny tego samego rzędu co C_0, o elementach, które zwyczajnie są przyjmowane stałe, ale w ogólności mogą być funkcjami współrzędnych przestrzennych, C_0 - wektor-kolumna złożona z elementów, których co najmniej jeden czynnik oznaczony jest indeksem zero.

4. Postać macierzy występujących w równaniu (9)

Ze względu na niezmiernie bogatą treść równania (9), musimy uporządkować ten materiał rozpatrując szereg przypadków szczególnych. Uwydatniono to w artykule rozpatrując macierze w tej kolejności, w jakiej będą rozpatrywane w dalszych artykułach.

Macierz (F) jest quasidiagonalna, zbudowana z macierzy $F(0)$, $F(r)$, $F^x(r)$, gdzie $r = 1,2,\ldots n$, krzyżykiem oznaczono macierz o elementach zespolonych sprzężonych. Macierz $F(r)$ jest zbudowana następująco:

$$(F(r)) = \begin{pmatrix} (F_1), & (F_2), & (0), & (F_3) & & & & \\ (F_4), & (F_1), & (F_5), & (0), & (F_6), & (F_7) & & \\ & & & & (F_8), & (0), & (F_9) & \\ & & & & & (F_{10}), & (0), & (F_{11}) \\ (F_{13}), & (F_{14}), & (0), & (F_{15}), & (F_{16}), & (0), & (F_{17}), & \\ (F_{20}), & (F_{21}), & (0), & (F_{22}), & (0), & (F_{18}), & (0), & (F_{19}) \\ (0), & (F_{23}), & (0), & (F_{24}) & & & & \\ (F_{25}), & (0), & (F_{26}) & & & & & \end{pmatrix} \tag{12}$$

Występujące tu macierze mają następujące znaczenie

$$(F_1) = \begin{pmatrix} 0 & j\,k_{r,z}, & -j\,k_{r,y} \\ -j\,k_{r,z}, & 0, & j\,k_{r,x} \\ j\,k_{r,y}, & -j\,k_{r,x}, & 0 \end{pmatrix}$$

(0) - macierz kwadratowa zerowa trzeciego rzędu,

$$(F_2)=(j\omega_r/c)(\beta_{i,k})+(\omega_r/c)((\delta_{i,1,k}),(\delta_{i,2,k}),(\delta_{i,3,k}))\begin{pmatrix} k_{rx} \\ k_{ry} \\ k_{rz} \end{pmatrix}+$$

$$-(j\omega_r/c)k_r^2(\Delta_{1,i,k})-(j\omega_r/c)(\Delta_{2,i,k})(K)$$

$$(K) = \begin{pmatrix} k_{r,x}^2, & k_{r,x}k_{r,y}, & k_{r,x}k_{r,z} \\ k_{r,x}k_{r,y}, & k_{r,y}^2, & k_{r,y}k_{r,z} \\ k_{r,z}k_{r,x}, & k_{r,z}k_{r,y}, & k_{r,z}^2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$(F_3) = (4\pi j\ \omega_r/c)(\beta_{i,k})$$

$$(F_4) = -(j\omega_r/c)(\alpha_{i,k}) - (\omega_r/c)((\gamma_{j,1,k}),(\gamma_{i,2,k})(\gamma_{i,3,k}))\begin{pmatrix} k_{rx} \\ k_{ry} \\ k_{rz} \end{pmatrix} +$$

$$+(j\omega_r/c)k_r^2\ (\Gamma_{1,i,k}) + (j\omega_r/c)(\Gamma_{2,i,k})(K)$$

$$(F_5) = (4\pi j\ \omega_r/c)(\alpha_{i,k})$$

(F_6) – macierz diagonalna trzeciego rzędu o elementach $-\ 4\pi N_1 e_1/c$

(F_7) – macierz diagonalna trzeciego rzędu o elementach $4\pi N_2 e_2/c$

$$(F_8) = (-j\ N_{1,0}\ k_{r,x},\ -\ j\ N_{1,0}\ k_{r,y},\ -\ j\ N_{1,0}\ k_{r,z})$$

$$(F_9) = j\omega_r - j(V_{1,0,x}\ k_{r,x} + V_{1,0,y}\ k_{r,y} + V_{1,0,z}\ k_{r,z})$$

$$(F_{10}) = (-\ j\ N_{2,0}\ k_{r,x},\ -\ j\ N_{2,0}\ k_{r,y},\ -\ j\ N_{2,0}\ k_{r,z})$$

$$(F_{11}) = j\omega_r - j(V_{2,0,x}\ k_{r,x} + V_{2,0,y}\ k_{r,y} + V_{2,0,z}\ k_{r,z})$$

(F_{13}) = macierz diagonalna trzeciego rzędu o elementach $-\ e_1/m_1$

$$(F_{14}) = (F_{14}') + (F_{14}'')$$

$$(F_{14}') = -(e_1/m_1\ c)(\beta_{1,i,k})$$

$$(F_{14}'') = j(e_1/m_1\ c)((D_{i,1,k}),(D_{i,2,k}),(D_{i,3,k}))\begin{pmatrix} k_{rx} \\ k_{ry} \\ k_{rz} \end{pmatrix} +$$

$$+(e_1 k_r^2/m_1 c)(\Delta_{1,1,i,k})+(\Delta_{2,1,i,k})(e_1/m_1 c)(K)$$

gdzie

$$(\beta_{1,i,k}) =$$

$$= \begin{pmatrix} V_{1,0,y}\beta_{3,1}-V_{1,0,z}\beta_{2,1}, & V_{1,0,y}\beta_{3,2}-V_{1,0,z}\beta_{2,2}, & V_{1,0,y}\beta_{3,3}-V_{1,0,z}\beta_{23} \\ V_{1,0,z}\beta_{1,1}-V_{1,0,x}\beta_{3,1}, & V_{1,0,z}\beta_{1,2}-V_{1,0,x}\beta_{3,2}, & V_{1,0,z}\beta_{1,3}-V_{1,0,x}\beta_{3,3} \\ V_{1,0,x}\beta_{2,1}-V_{1,0,y}\beta_{1,1}, & V_{1,0,x}\beta_{2,2}-V_{1,0,y}\beta_{1,2}, & V_{1,0,x}\beta_{2,3}-V_{1,0,y}\beta_{1,3} \end{pmatrix}$$

Macierze $(\Delta_{1,1,i,k})$, $(\Delta_{2,1,i,k})$ powstają z $(\beta_{1,i,k})$ przez zastąpienie $\beta_{i,k}$ przez $\Delta_{1,i,k}$ lub $\Delta_{2,i,k}$, zaś $(D_{i,s,k})$, $s = 1,2,3$ przez zastąpienie w $(\beta_{1,i,k})$ wyrażeń $\beta_{i,k}$ przez $\delta_{i,s,k}$.

$$(F_{15}) = 4\pi(F_{14}')$$

$$(F_{16}) = (F_{16}')+(F_{16}'')$$

(F_{16}') - macierz diagonalna trzeciego rzędu o elementach

$$1/\tau_1 + j\omega_r$$

$$(F_{16}'') = (-e_1/m_1c) \begin{pmatrix} 0 & , B_{o,z} & , -B_{o,y} \\ -B_{o,z} & , 0 & , B_{o,x} \\ B_{o,y} & , -B_{o,x} & , 0 \end{pmatrix}$$

$$(F_{17}) = -(jc_1^2/N_{1,0}) \begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix}$$

$$(F_{18}) = (F_{18}')+(F_{18}'')$$

(F_{18}') – macierz diagonalna trzeciego rzędu o elementach $1/\tau_2 + j\,\omega_r$

(F_{18}'') różni się od (F_{16}'') tym, że w miejsce e_1, m_1 wchodzi e_2, m_2

(F_{19}) – różni się od (F_{17}) tym, że w miejsce c_1, $N_{1,0}$ wchodzi c_2, $N_{2,0}$

(F_{20}) – macierz diagonalna trzeciego rzędu o elementach $-e_2/m_2$

$$(F_{21}) = (F_{21}')+(F_{21}'')$$

Macierze (F_{21}'), (F_{21}'') są analogicznie zbudowane do (F_{14}') i (F_{14}''), jedynie w miejsce wielkości oznaczonych indeksem 1 wchodzą wielkości oznaczone indeksem 2

$$(e_2,\ m_2,\ V_{2,0,x},\ V_{2,0,y},\ V_{2,0,z})$$

$$(F_{22}) = 4\pi(F_{21}')$$

$$(F_{23}) = \begin{pmatrix} 0 & , & -M_{o,z} & , & M_{o,y} \\ M_{o,z} & , & 0 & , & -M_{o,x} \\ -M_{o,y} & , & M_{o,x} & , & 0 \end{pmatrix} \bar{\varepsilon}$$

$$(F_{24}) = (F_{24}') + (F_{24}'') + (F_{24}''')$$

$(F_{24}') = (F_{26}')$ - macierz diagonalna trzeciego rzędu o elementach $j\,\omega_r$

$$(F_{24}'') = \begin{pmatrix} 0 & , & H_{o,z} & , & -H_{o,y} \\ -H_{o,z} & , & 0 & , & H_{o,x} \\ H_{o,y} & , & -H_{o,x} & , & 0 \end{pmatrix} \bar{\varepsilon}$$

$$(F_{24}''') = (1/\bar{\varepsilon})(F_{23})(-\bar{\varepsilon}(2\,\bar{A}/M_o^2)k_r^2 - (\bar{\alpha}/M_o)j\,\omega_r)$$

$$(F_{25}) = -\begin{pmatrix} 0 & , & -P_{o,z} & , & P_{o,y} \\ P_{o,z} & , & 0 & , & -P_{o,x} \\ -P_{o,y} & , & P_{o,x} & , & 0 \end{pmatrix} \bar{\delta}$$

$$(F_{26}) = (F_{26}') + (F_{26}'') + (F_{26}''')$$

$$(F_{26}'') = -\begin{pmatrix} 0 & , & E_{o,z} & , & -E_{o,y} \\ -E_{o,z} & , & 0 & , & E_{o,x} \\ E_{o,y} & , & -E_{o,x} & , & 0 \end{pmatrix} \bar{\delta}$$

$$(F_{26}''') = (1/\bar{\delta})(F_{25})(-\,\bar{\delta}(2\,\bar{B}/P_o^2)k_r^2 - (\bar{\beta}/P_o)j\,\omega_r)$$

Macierz $(F(r))^{x}$ otrzymujemy przez przejście w macierzy $(F(r))$ do wartości zaspolonych sprzężonych.

Macierz $F(0)$ można otrzymać z macierzy $F(r)$ przez założenie, że zerują się wyrażenia, w których występuje jako czynnik $-j\,\omega_r$ oraz $-j\,k_{r,x}$, $-j\,k_{r,y}$, $-j\,k_{r,z}$. Macierz (A) jest quasidiagonalna, zbudowana z macierzy kwadratowych: $(A(0))$, $(A(r))$, $(A(r))^{x}$, $r = 1,2,\ldots$
Macierz $(A(r))$ posiada następującą postać:

$$(A(r)) = \begin{pmatrix} (0) & (A_1), & (0), & (A_2), & (0), & (0), & & \\ (A_3), & (0), & (A_4), & & & & & \\ & & & & & & (A_5), & \\ & & & & & & & (A_6) \\ & & & & (A_7), & & & \\ & & & & & (A_8) & & \\ & & & (A_9) & & & & \\ & & (A_{10}) & & & & & \end{pmatrix} \tag{14}$$

przy czym

$(A_7) = (A_8) = (A_9') = (A_{10}')$ macierz jednostkowa trzeciego rzędu,

$(A_5) = (A_6)$ posiada jedyny element równy 1,

$(A_1) = (A_1') + (A_1'') + (A_1''')$

$$(A_1') = (1/c)(\beta_{i,k})$$

$$(A_1'') = -(j/c)\left[(\delta_{i,1,k}),(\delta_{i,2,k}),(\delta_{i,3,k})\right]\begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix} -$$

$$-(1/c)(\Delta_{1,i,k})k_r^2 + (1/c)(\Delta_{2,i,k})(K)$$

$$(A_1''') = (2/c)\left[(\eta_{i,k,1}),(\eta_{i,k,2}),(\eta_{i,k,3})\right]\begin{pmatrix} H_{x,o} \\ H_{y,o} \\ H_{z,o} \end{pmatrix}$$

$$(A_2) = (4\pi/c)(\beta_{i,k})$$

$$(A_3) = (A_3')+(A_3'')+(A_3''')$$

$$(A_3') = -(1/c)(\alpha_{i,k})$$

Macierze (A_3'') i (A_3''') są analogiczne zbudowane jak (A_1'') i (A_1'''), jedynie należy zmienić znak na przeciwny i w miejsce $\delta_{i,s,k}$, $\Delta_{s,i,k}$, $\eta_{i,k,s}$ oraz składowych H należy wstawić odpowiednio $\gamma_{i,s,k}$, $\Delta_{s,i,k}$, $\varepsilon_{i,s,k}$ oraz składowe E

$$(A_4) = -(4\pi/c)(\alpha_{i,k})$$

$$(A_9) = (A_9') + (A_9'')$$

$$(A_9'') = (-\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}M_o)(F_{23})$$

$$(A_{10}) = (A_{10}') + (A_{10}'')$$

Macierz (A_{10}'') jest analogicznie zbudowana jak (A_9''), tylko w miejsce $\bar{\alpha}$, $\bar{\varepsilon}$, M_o, wchodzą odpowiednio $\bar{\beta}$, $\bar{\delta}$, P_o oraz należy zmienić znak przeciwny.

Macierz $(A(r))^x$ powstaje z $(A(r))$ przez zastąpienie elementów przez ich wartości zespolone sprzężone.

Macierz $(A(0))$ powstaje z $(A(r))$ przez zerowanie wyrażeń, w których występują $j\,\omega_r$, $-j\,k_{r,x}$, $-j\,k_{r,y}$, $-j\,k_{r,z}$. Macierz (B) jest również quasidiagonalna, zbudowana z macierzy $(B(0))$, $(B(r))$, $(B(r))^x$, $r = 1,2,\ldots$. Macierz $(B(r))$ jest zbudowana następująco:

$$\begin{pmatrix}
(B_1), & (B_2), & (0), & (0), & & & & \\
(B_3), & (B_1), & (0), & (0). & & & & \\
 & & & & (B_8), & (0) & , (B_{12}), & \\
 & & & & & (B_9), & (0) & , (B_{13}) \\
 & & & & (B_4), & & (B_{10}) & \\
 & & & & & (B_5), & & (B_{11}) \\
 & & & (B_6) & & & & \\
 & & (B_7) & & & & &
\end{pmatrix} \quad (16)$$

Macierz trzeciego rzędu (B_1) posiada jedynie różne od zera elementy $b_{3,2} = -\,b_{2,3} = 1$,

$$(B_2) = (j\omega_r/c)(\delta_{i,k,1}) + (\omega_r/c)\,(\Delta_{1,i,k})k_{r,x} +$$

$$+ (\omega_r/c)(\mathrm{diag}(\Delta_{2,1,1}\,k_{r,x}, \Delta_{2,2,1}\,k_{r,y}, \Delta_{2,3,1}\,k_{r,z}) +$$

$$+ (\omega_r/c)(\mathrm{diag}(\Delta_{2,1,1}\,k_{r,x} + \Delta_{2,1,2}\,k_{r,y} + \Delta_{2,1,3}\,k_{r,z}, \Delta_{2,2,1}k_{r,x} +$$

$$+ \Delta_{2,2,2}\,k_{r,y} + \Delta_{2,2,3}\,k_{r,z}, \Delta_{2,3,1}\,k_{r,x} + \Delta_{2,3,2}\,k_{r,y} +$$

$$+ \Delta_{2,3,3}\,k_{r,z})$$

Macierz (B_3) jest analogicznie zbudowana jak (B_2), tylko w miejsce $\delta_{i,k,1}$, $\Delta_{s,i,k}$ należy wstawić $\gamma_{i,k,1}$, $\Gamma_{s,i,k}$ i zmienić znak na przeciwny.

Macierz $(B(r))^x$ powstaje z $(B(r))$ przez przejście do wartości zespolonych sprzężonych.

(B_4) macierz diagonalna trzeciego rzędu o elementach $V_{1,0,x}$

(B_5) macierz diagonalna trzeciego rzędu o elementach $V_{2,0,x}$

$(B_6) = -j(2\bar{A}/M_o^2)k_{r,x}\,(F_{23})$

$(B_7) = j(2\,\bar{B}/P_o^2)k_{r,x}\,(F_{25})$

(B_8) macierz wiersz $(N_{1,0},\ 0,\ 0)$

(B_9) macierz wiersz $(N_{2,0},\ 0,\ 0)$

(B_{10}) wektor-kolumna o różnym od zera pierwszym elemencie $c_1^2/N_{1,0}$

(B_{11}) wektor-kolumna o różnym od zera pierwszym elemencie $c_2^2/N_{2,0}$

$(B_{12}) = (V_{1,0,x})$

$(B_{13}) = (V_{2,0,x})$

Macierz $(B(r))^x$ otrzymuje się przez przejście do wartości zespolonych sprzężonych.
Macierz $(B(0))$ powstaje z $(B(r))$ przez zerowanie wyrazów z ω_r, $k_{r,x}$, $k_{r,y}$, $k_{r,z}$.
Macierz (D) jest analogicznie zbudowana jak macierz (B)

Macierz (D_1) posiada różne od zera elementy $d_{1,3} = -d_{3,1} = 1$

$$(D_2)=(j\omega_r/c)(\delta_{i,k,2})+(\omega_r/c)(\Delta_{1,i,k})k_{r,y} + (\omega_r/c)\,\cdot$$

$$\cdot\ \mathrm{diag}(\Delta_{2,1,2}k_{r,x},\ \Delta_{2,2,2}\,k_{r,y},\ \Delta_{2,3,2}\,k_{r,z})+(\omega_r/c)\,\cdot$$

$$\cdot\ \mathrm{diag}(\Delta_{2,1,1}k_{r,x} +\Delta_{2,1,2}\,k_{r,y} + \Delta_{2,1,3}\,k_{r,z},\ \Delta_{2,2,1}\,k_{r,x} +$$

$$+ \Delta_{2,2,2}\,k_{r,y} + \Delta_{2,2,3}\,k_{r,z},\ \Delta_{2,3,1}\,k_{r,x} + \Delta_{2,3,2}\,k_{r,y} +$$

$$+ \Delta_{2,3,3}\,k_{r,z})$$

Przejście od macierzy (D_2) do (D_3) odbywa się analogicznie jak przejście od (B_2) do (B_3).
Diagonalne macierze trzeciego rzędu (D_4) i (D_5) mają jako elementy odpowiednio $V_{1,0,y}$ i $V_{2,0,y}$.
Macierze (D_6) i (D_7) są analogicznie zbudowane jak macierze (B_6) i (B_7), tylko w miejsce $k_{r,x}$ wchodzi $k_{r,y}$.
Wiersz o trzech elementach (D_8) posiada różny od zera element środkowy i równy $N_{1,0}$.
Podobnie jest zbudowany wiersz (D_9), tylko w miejsce $N_{1,0}$ wchodzi $N_{2,0}$.
Wektor kolumny (D_{10}) i (D_{11}), różnią się od analogicznych (B_{10}) i (B_{11}), że różny od zera element drugi wynosi odpowiednio $c_1^2/N_{1,0}$ lub $c_2^2\,/N_{2,0}$.
Elementy (D_{12}) i (D_{13}) różnią się tym od (B_{12}) i (B_{13}), że w miejsce $V_{1,0,x}$, $V_{2,0,x}$ wchodzą odpowiednio $V_{1,0,y}$, $V_{2,0,y}$.
Macierz (E) posiada również analogiczną budowę jak macierz (B). W macierzy (B_1) trzeciego rzędu są jedynie różne od zera elementy: $e_{2,1} = -\,e_{1,2} = 1$

$$(E_2)=(j\omega_r/c)(\delta_{i,k,3})+(\omega_r/c)(\Delta_{1,i,k})k_{r,z} + (\omega_r/c) \cdot$$

$$\cdot \operatorname{diag}(\Delta_{2,1,3}\,k_{r,x}, \Delta_{2,2,3}\,k_{r,y}, \Delta_{2,3,3}\,k_{r,z})+(\omega_r/c) \cdot$$

$$\cdot \operatorname{diag}(\Delta_{2,1,1}\,k_{r,x} + \Delta_{2,1,2}\,k_{r,y} + \Delta_{2,1,3}\,k_{r,z}, \Delta_{2,2,1}\,k_{r,x} +$$

$$+ \Delta_{2,2,2}\,k_{r,y}+\Delta_{2,2,3}k_{r,z}, \Delta_{2,3,1}k_{r,x}+\Delta_{2,3,2}k_{r,y}+\Delta_{2,3,3}k_{r,z})$$

Przejście od (E_2) do (E_3) odbywa się analogicznie jak w przypadku analogicznych macierzy (B_2) i (B_3).
Macierz (E_4) i (E_5) są diagonalne trzeciego rzędu o elementach odpowiednio $V_{1,0,z}$, $V_{2,0,z}$.
Macierz (E_6) i (E_7) są analogicznie zbudowane jak (B_6) i (B_7), tylko w miejsce $k_{r,x}$ wchodzi $k_{r,z}$.
W wierszach (E_8) i (E_9) analogicznych do (B_8) i (B_9) jest różny od zera trzeci element i odpowiednio równy $N_{1,0}$ i $N_{2,0}$.
Podobnie w wektorach kolumnach (E_{10}) i (E_{11}) różny od zera element $c_1^2/N_{1,0}$ czy $c_2^2/N_{2,0}$ przesuwa się na trzecie miejsce.
W elementach (E_{12}) i (E_{13}) występują odpowiednio $V_{1,0,z}$ lub $V_{2,0,z}$.
Macierze (G), (I), (J) dotyczą jedynie dyspersji przestrzennej i ich elementy różnią się od elementów odpowiednich macierzy (B), (D), (E) tym, że mnożone są przez $j\omega_r$.
Macierze (K), (M), (O) powstają odpowiednio z macierzy (B), (D), (E) przez skreślenie czynników $j\omega_r$ oraz odpowiednio $-j\,k_{r,x}$, $-j\,k_{r,y}$, $-j\,k_{r,z}$ i przyrównanie do zera pozostałych składowych wektora k. Macierz (L), (N), (P) z macierzy (B), (D), (E) przez skreślenie współczynnika $j\omega_r$ oraz odpowiednio $-j\,k_{r,y}$, $-j\,k_{r,z}$, $-j\,k_{r,x}$ i przyrównanie do zera pozostałych składowych wektora k. Macierze te zawierają w swoich elementach wyrażenia $\Gamma_{1,i,k}$, $\Gamma_{2,i,k}$ oraz $\Delta_{1,i,k}$ i $\Delta_{2,i,k}$. Te same wyrażenia występują również w macierzach (Q), (R), (S), (T),

(U), (V), które różnią się od odpowiednich macierzy (K), (L), (M), (N), (O), (P) tym, że są mnożone przez $j\omega_r$.

Wyrazy nieliniowe są ujęte w formie dwu wektorów kolumn $\overline{N}_o$ i $\overline{N}_1$. Każdą z nich można podzielić na trzy części, odpowiadającą indeksowi zero (w przypadku $\overline{N}_o$ są to wyrazy kwadratowe o indeksie zero), wyrazy odpowiadające indeksowi r i wyrazy zespolone sprzężone do tych ostatnich. Ze względu na analogiczną budowę tych ostatnich wypisywać nie będziemy. Odpowiednie części wektorów-kolumn oznaczać będziemy indeksem O lub r.

$$N_{0,0,1-3} = -(1/c)\sum_{l,n} \eta_{i,l,n}\left[(\partial H_{l,o}/\partial t)H_{n,o} + (\partial H_{n,o}/\partial t)H_{l,o}\right]$$

$$N_{0,0,4-6} = (1/c)\sum_{l,n} \varepsilon_{i,l,n}\left[(\partial E_{l,o}/\partial t)E_{n,o} + (\partial E_{n,o}/\partial t)E_{l,o}\right] +$$
$$+ V_{1,0}\, e_1\, N_{1,0} - V_{2,0}\, e_2\, N_{2,0}$$

$$N_{0,0,7} = -\operatorname{div}(N_{1,0}\, V_{1,0})$$

$$N_{0,0,8} = -\operatorname{div}(N_{2,0}\, V_{2,0})$$

$$N_{0,0,9-11} = -(V_{1,0}\nabla)V_{1,0} - c_1^2\nabla V_{1,0}/N_{1,0} + (e_1/m_1c)\cdot$$
$$\cdot\,(V_{1,0} \times B_o)$$

$N_{0,0,12-14}$ analogiczne do $N_{0,0,9-11}$, tylko w miejsce indeksu 1 należy napisać 2.

$$N_{0,0,15-17} = -\bar{\varepsilon}\left[M_o \times ((2\bar{A}/M_o^2)\nabla^2 M_o + H_o)\right] + (\bar{\alpha}/M_o)M_o \times \dot{M}_o$$

$N_{0,0,18-20}$ analogiczne do $N_{0,0,15-17}$, tylko w miejsce $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{A}$, M_o wchodzi $\bar{\delta}$, $\bar{\beta}$, $\bar{B}$, P_o.

(17)

$$N_{o,r,1-3} = -(1/c) \sum_{l,n} \eta_{i,l,n} \Big[(\partial H_{l,o}/\partial t)\, H_{n,r} +$$

$$+ (\partial H_{n,o}/\partial t) H_{l,r} + 2\, j\omega_r\, (H_{n,o}\, H_{l,r} + H_{l,o}\, H_{n,r}) +$$

$$+ (\partial H_{l,o}/\partial t) H_{n,r} + (\partial H_{n,o}/\partial t)\, H_{l,r}\Big]$$

$$N_{o,r,4-6} = (1/c) \sum_{l,n} \varepsilon_{i,l,n} \Big[(\partial E_{l,o}/\partial t) E_{n,r} + (\partial E_{n,o}/\partial t)\, E_{l,r}\Big] +$$

$$+ 2\, j\omega_r\, (E_{n,o}\, E_{l,r} + E_{l,o}\, E_{n,r}) + (\partial E_{l,o}/\partial t)\, E_{n,r} +$$

$$+ (\partial E_{n,o}/\partial t) E_{l,r}\Big] + N_{1,0}\, e_1\, V_{1,r} - N_{2,0}\, e_2\, V_{2,r} +$$

$$+ N_{1,r}\, e_1\, V_{1,o} - N_{2,r}\, e_2\, V_{2,o}$$

$$N_{o,r,7-8} = -\operatorname{div}(N_{s,o}\, V_{s,r} + N_{s,r}\, V_{s,o}) \qquad s = 1,2$$

$$N_{o,r,9-11} = -(V_{1,r}\nabla) V_{1,o} - (V_{1,o}\nabla) V_{1,r} + j(V_{1,r}\, k_r) V_{1,o} +$$

$$+ j(V_{1,o}\, k_r) V_{1,r} - c_1^2\, \nabla V_{1,r}/N_{1,o} + j\, c_1^2\, (k_r\, V_{1,r}/N_{1,o}) -$$

$$- (e_1/m_1 c) \Big[V_{1,r} \times B_o + V_{1,o} \times B_r \Big]$$

$N_{o,r,12-14}$ analogicznie zbudowane jest $N_{o,r,9-11}$, tylko w miejsce indeksu 1 należy napisać indeks 2.

$$N_{o,r,15-17} = -\bar{\varepsilon}\Big[M_o x((2\bar{A}/M_o^2)\, \nabla^2 M_r + H_r) - M_o\, x((2\bar{A}/M_o^2) k_r^2\, M_o)\Big] +$$

$$+ (\bar{\alpha}/M_o)(M_o \times \dot{M}_r + M_r \times \dot{M}_o + M_o \times j\, \omega_r\, M_r)$$

$N_{o,r,18-20}$ analogicznie zbudowane do $N_{o,r,15-17}$, tylko w miejsce $\bar{\mathcal{E}},\bar{\alpha}$, $\bar{A}$ i M należy wstawić $\bar{\delta},\bar{\beta}$, B, P.

(18)

$$N_{1,0,1-3} = -(1/c) \sum_{l,n} \eta_{i,l,n} \Big\{ 2\, j\omega_r (H_{n,r} H_{l,r}{}^{x} + H_{n,r}{}^{x} H_{l,r}) +$$

$$+(\partial H_{l,r}/\partial t) H_{n,r}{}^{x} + (\partial H_{n,r}{}^{x}/\partial t) H_{l,r} \Big\}$$

$$H_{1,0,4-6} = (1/c) \sum_{l,n} \varepsilon_{i,l,m} \Big\{ 2\, j\, \omega_r (E_{n,r} E_{l,r}{}^{x} + E_{n,r}{}^{x} E_{l,r}) +$$

$$+ (\partial E_{l,r}/\partial t) E_{n,r}{}^{x} + (\partial E_{n,r}{}^{x}/\partial t)\, E_{l,r} \Big\} + N_{1,r}\, e_1\, V_{1,r}{}^{x} +$$

$$+ N_{1,r}{}^{x}\, e_1\, V_{1,r} - N_{2,r}{}^{x}\, e_2\, V_{2,r} - N_{2,r}\, e_2\, V_{2,r}{}^{x}$$

$$N_{1,0,7-8} = -\operatorname{div} (N_{s,r}\, V_{s,r}{}^{x} + N_{s,r}{}^{x}\, V_{s,r}) \qquad s = 1,2$$

$$N_{1,0,9-11} - \Big[(V_{1,r}{}^{x} \nabla) V_{1,r} + (V_{1,r} \nabla) V_{1,r}{}^{x} + j(V_{1,r}{}^{x} k_r)\, V_{1,r} +$$

$$+ j(V_{1,r}\, k_r) V_{1,r}{}^{x} \Big] + (e_1/m_1)(V_{1,r}{}^{x} \times B_{1,r} + V_{1,r} \times B_{1,r}{}^{x}) -$$

$$- c_1^2\, (V_{1,r}/N_{1,0})(1/(1 + N_{1,r}{}^{x}/N_{1,0}) - 1) - c_1^2 (V_{1,r}{}^{x}/N_{1,0})(1/(1 +$$

$$+ N_{1,r}/N_{1,0}) - 1)$$

$N_{1,0,12-14}$ analogicznie zbudowane do $N_{1,0,9-11}$, tylko indeks 1 należy zastąpić indeksem 2.

$$N_{1,0,15-17} = -\bar{\varepsilon}\left[M_r\ x((2\bar{A}/M_o^2)(\nabla^2 - k_r^2)M_r^{\,x} + H_r^{\,x})\right] +$$

$$+ (\bar{\alpha}/M_o)M_r\ x\ \dot{M}_r^{\,x} + \bar{\varepsilon}\left[M_r^{\,x}\ x((2\bar{A}/M_o^2)(\nabla^2 - k_r^2)M_r + H_r)\right] +$$

$$+ (\bar{\alpha}/M_o)M_r^{\,x}\ x\ \dot{M}_r$$

$N_{1,0,18-20}$ analogicznie zbudowane jest do $N_{1,0,15-17}$, tylko w miejsce $\bar{A}, \bar{\alpha}, \bar{\varepsilon}$ i M należy wstawić $\bar{B}, \bar{\beta}, \bar{\delta}$, i P.

$$N_{1,r,1-3} = -(1/c)\sum_{l,m,n} \eta_{i,l,n}\Big[(\partial/\partial t)(H_{l,m})H_{n,r-m} + \tag{19}$$

$$+ (\partial/\partial t)(H_{n,m})H_{l,r-m} + (\partial/\partial t)(H_{l,r})H_{n,m-r}^{\,x} +$$

$$+ (\partial/\partial t)(H_{n,r})\,H_{l,m-r}^{\,x} + j(\omega_m + \omega_{r-m})H_{l,m}\,H_{n,r-m} +$$

$$+ j(\omega_m H_{l,m}\,H_{n,m-r}^{\,x} + \omega_{m-r}\,H_{n,m}\,H_{l,m-r}^{\,x}) + (\partial/\partial t)(H_{l,r+m})\,\cdot$$

$$\cdot\, H_{n,m}^{\,x} + (\partial/\partial t)(H_{n,r+m})H_{l,m}^{\,x} + j(\omega_{r+m}\,H_{l,r+m}\,H_{m}^{\,x} +$$

$$+ \omega_m\,H_{n,r+m}\,H_{l,m}^{\,x})\Big]$$

$$N_{1,r,4-6} = N_{1,r,4-6}' + N_{1,r,4-6}''$$

$N_{1,r,4-6}'$ jest analogicznie zbudowane jak $N_{1,r,1-3}$ z tym, że w miejsce η i H należy wstawić ε i E

$$N_{1,r,4-6}'' = N_{1,m}\, e_1\, V_{1,r-m} - N_{2,r}\, e_2\, V_{2,r-m} +$$

$$+ N_{1,r-m}\, e_1\, V_{1,m} - N_{2,r-m}\, e_2\, V_{2,m} + N_{1,m}\, e_1\, V_{1,m-r}^{\,x} -$$

$$- N_{2,m}\, e_2\, V_{2,m-r}^{\,x} + N_{1,r+m}\, e_1\, V_{1,m}^{\,x} - N_{2,r+m}\, e_2\, V_{2,m}^{\,x} +$$

$$+ N_{1,r/2}\, e_1\, V_{1,r/2} - N_{2,r/2}\, e_2\, V_{2,r/2}$$

$$N_{1,r,7-8} = - \operatorname{div}(N_{s,m}\, V_{s,r-m} + N_{s,r-m}\, V_{s,m} + N_{s,m}\, V_{s,m-r}^{\,x} +$$

$$+ N_{s,m+r}\, V_{s,m}^{\,x} + N_{s,r/2}\, V_{s,r/2}) \qquad s = 1,2$$

$$N_{1,r,9-11} = -(V_{1,r/2}\, \nabla)V_{1,r/2} + j(V_{1,r/2}\, k_{r/2})\, V_{1,r/2} -$$

$$-(e_1/m_1)(V_{1,r/2} \times B_{r/2}) - \Big[(V_{1,m}\, \nabla)\, V_{1,r-m} + (V_{1,r-m}\, \nabla)\, V_{1,m} -$$

$$- j(V_{1,m}\, k_{r-m})\, V_{1,r-m} - j(V_{1,r-m}\, k_m)V_{1,m} + (V_{1,m}\, \nabla)V_{1,m-r}^{\,x} +$$

$$+ (V_{1,r+m} \nabla)V_{1,m}^{\,x} - j(V_{1,m}\, k_{m-r})\, V_{1,m-r}^{\,x} - j(V_{1,r+m}\, k_m)V_{1,m}\Big] +$$

$$+ (e_1/m_1)\Big\{ V_{1,m} \times B_{r-m} + V_{1,r-m} \times B_m + V_{1,m} \times B_{m-r}^{\,x} +$$

$$+ V_{1,r+m} \times B_m^{\,x} \Big\} - c_1^2\, (\nabla V_{1,m}/N_{1,0})(1/(1+N_{1,r-m}/N_{1,0})-1) -$$

$$- (- c_1^2\, k_m\, V_{1,m}/N_{1,0})(1/(1 + N_{1,r-m}/N_{1,0})-1) - c_1^2\, \nabla V_{1,m}(1/(1 +$$

$$+ N_{1,m-r}^{\,x}/N_{1,0})-1) + c_1^2\, j\, k_m\, V_{1,m}(1/(1 + N_{1,m-r}^{\,x}/N_{1,0})-1) -$$

$$- c_1^2\, (\nabla V_{1,m+r}/N_{1,0})(1/(1 + N_{1,m}^{\,x}/N_{1,0})-1) + c_1^2\, (j\, k_{r+m}\, \cdot$$

$$\cdot\, V_{1,r+m}/N_{1,0})(1/(1+N_{1,m}{}^{x}/N_{1,0})-1) + c_1^2\,(j\,k_{r-m}\,V_{1,r-m}/N_{1,0})\,\cdot$$

$$\cdot\,(1/(1+N_{1,m}/N_{1,0})-1) - c_1^2\,\nabla V_{1,m-r}(1/(1+N_{1,m}/N_{1,0})-1) -$$

$$-\; c_1^2\,(\nabla V_{1,r+m}/N_{1,0})(1/(1+N_{1,m}{}^{x})-1) + c_1^2(j\,k_{r+m}V_{1,r+m}/N_{1,0})\,\cdot$$

$$\cdot\,(1/(1+N_{1,m}{}^{x}/N_{1,0})-1)$$

$N_{1,r,12-14}$ są analogicznie zbudowane, tylko w miejsce indeksu 1 należy napisać 2.

$$N_{1,r,15-17} = -\,\bar{\delta}\Big\{M_m \times((2\bar{A}/M_o^2)\nabla^2 M_{r-m} + H_{r-m}) - M_m \times((2\bar{A}/M_o^2)\,\cdot$$

$$\cdot\, k_{r-m}{}^2\, M_{r-m} + M_{r-m} \times ((2\bar{A}/M_o^2)\nabla^2 M_m + H_m) - M_{r-m} \times((2\bar{A}/M_o^2)\,\cdot$$

$$\cdot\, k_m^2\, M_m + M_m \times ((2\bar{A}/M_o^2)\nabla^2 M_{m-r}{}^{x} + H_{m-r}{}^{x}) + M_{r+m} \times((2\bar{A}/M_o^2)\,\cdot$$

$$\cdot\,\nabla^2 M_m{}^{x} + H_m{}^{x})\Big\} + (\bar{\alpha}/M_o)(M_m \times \dot{M}_{r-m} + M_{r-m} \times \dot{M}_m + M_{r+m} \times \dot{M}_m{}^{x} +$$

$$+ M_m \times \dot{M}_{m-r}{}^{x} + M_m \times M_{r-m}\cdot j\,\omega_{r-m} + M_{r-m} \times M_m \cdot j\,\omega_m - M_{r+m} \times M_m{}^{x}\,\cdot$$

$$\cdot\, j\omega_m - M_m \times M_{m-r}{}^{x}\cdot j\,\omega_{m-r}) - \bar{\varepsilon}\Big[M_{r/2} \times((2\bar{A}/M_o^2)\nabla^2 M_{r/2} + H_{r/2}) -$$

$$- M_{r/2} \times ((2\bar{A}/M_o^2)\,k_{r/2}{}^2\, M_{r/2}\Big] + (\bar{\alpha}/M_o)(M_{r/2} \times \dot{M}_{r/2} +$$

$$+ M_{r/2} \times M_{r/2}\cdot j\,\omega_{r/2}) \qquad (20)$$

$N_{1,r,18-20}$ są analogicznie zbudowane jak $N_{1,r,15-17}$, tylko w miejsce $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{A}$ i M należy wstawić $\bar{\delta}$, $\bar{\beta}$, $\bar{B}$ i P.

Wyrażenia z indeksem $r/2$ są słuszne jedynie dla r parzystych.

5. Zakończenie

Wyprowadzone w pracy równanie macierzowe (9) zawiera bardzo wiele informacji, dotyczącej rozchodzenia się fal w ośrodku zdefiniowanym we wstępie. Jak z postaci równania i jego współczynników wynika postać jego jest bardzo złożona. Dlatego przed rozpatrywaniem rozwiązań równania rozpatrzymy w szeregu prac następnych kilka przypadków szczególnych, pozwalających wydobyć sens fizykalny wyrażeń występujących w równaniu.

Wpłynęło do Redakcji 2.XI.67 r.

LITERATURA

[1] Ginzburg W.L.: Rasprostranienie elektromagnitnych wołn w płazmie, Fiz. Mat. Giz. M. 1960.

[2] Landau L.D.; Lifszic E.M.: Elektrodynamika spłosznych sried, Gos. Izd. Fiz. Mat. Lit. M. 1959.

[3] Wiesiełago W.G., Głuszkow M.W., Ruchadze A.A.: Fiz. Twierd. Tieła, 8, 24 1966.

[4] Wiesiełago W.G., Rudaszewskij E.P.: Fiz. Twierd. Tieła, 8, 2862, 1966.

ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ПЛАЗМЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ФЕРРОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ И ФЕРРОМАГНИТНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Р е з ю м е

Основываясь на работе [3, 4] автор, принимая во внимание нелинейность диэлектрической ε и магнитной μ проницаемости, обобщил формулировку проблемы распространения волн в бесконечном электропроводящем твердом теле, описанном координатами Картезия (x, y, z), и имеющем ферроэлектрические и ферромагнитные свойства.

Кроме того, автором учтена пространственная дисперсия диэлектрической и магнитной проницаемости с ограничением своих рассматриваний к первым и вторым производным по пространственным координатам. В случае гиромагнитных тел существует возможность ограничиться к первым производным, в случае центральной симметрии - к вторым. Кроме того, принимая произвольную координатную систему, не обязательно в направлении принципиальных осей тензора электрической и магнитной проницаемости и произвольное расположение волнового вектора k и постоянные компоненты величин, выступающих в уравнении, автор получил общую формулировку проблемы, которую для комплексного представления волн, возможно описать матричным дифференциальным уравнением (9), где C - вектор - столб с элементами, соответствующими поочереди всем неизвестным величинам в уравнении: E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z, $V_{1,x}$, $V_{1,y}$, $V_{1,z}$, $V_{2,x}$, $V_{2,y}$, $V_{2,z}$, N_1, N_2.

Любая из этих величин имеет следующие компоненты:

1. неволнового характера (постоянная или функция времени и пространственных координат) и
2. принадлежащие к частотам ω_r, r = 1,2....

Поскольку любой частоте ω_r отвечает 2x20 величин (а именно величины и их комплексные сопряженные) порядок вектора - столба равен 20 (1 + 2n), квадратные матрицы (A),...(V) этого уравнения того же порядка.

Работа будет исходной точкой следующих работ.

THEORY OF WAVE PROPAGATION IN SOLID-STATE BODY PLASMA WITH FERROELECTRIC AND FERROMAGNETIC PROPERTIES

S u m m a r y

Basing on paper [3, 4] the author generalises the formulation of the wave propagation problem in an infinite solid body described by Cartesian coordinates (x, y, z), which conducts electricity and posesses ferroelectric and ferromagnetic properties, taking into consideration the non linearity of dielectric (ε) and magnetic (μ) permeability.

Besides the author has taken into account the spatial dispersion of dielectric and magnetic permeability, limiting its considerations to the first and second derivatives with respect to the spatial coordinates. In the case of gyrotropic bodies one can limit oneself to the first derivatives, in the case of media with a central symmetry-to the second ones. Besides, choosing a quodlibed coordinate system, not necessarily lying along the principal axes of the electric or magnetic permeability tensor, and not determining precisely the situation of the wave vector k, and the constant components of quantities appearing in the equation, he has obtained a general formulation of the problem, which thanks to the acceptance of a complex representation of waves, can be described by means of the matrix differential equation (9), where C is a vector-column with the elements corresponding successively to all the unknown quantities in the equation: E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z, $V_{1,x}$, $V_{1,y}$, $V_{1,z}$, $V_{2,x}$, $V_{2,y}$, $V_{2,z}$, N_1, N_2.

Everyone of these quantities has components:

1. Of non-wave character (constant or functions of time and space coordinates) and

2. According to frequency ω_i, $i = 1,2,\ldots n$.

Because to every frequency ω_i correspond 2×20 quantities (i.e. quantities and their complex conjugates) the range of the vector-column C is $20\ (1 + 2n)$. The square matrices (A),... (V) of this equation are of the same range too.