ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 14 Nr kol. 243

JÓZEF SZPILECKI
Katedra Fizyki B

ZWIĄZKI DYSPERSYJNE W PLAŹMIE CIAŁA STAŁEGO O WŁASNOŚCIACH FERROELEKTRYKA I FERROMAGNETYKA

Streszczenie. Spośród różnych zagadnień, jakie wiążą się z problemem, sformułowanym w postaci równania (9) pracy [1] rozpatrzono zagadnienie liniowe stanu ustalonego, w którym amplitudy fal są wielkościami stałymi. W tym przypadku do głosu dochodzi jedynie macierz (F). Badanie miejsc zerowych wyznacznika tej macierzy daje związki dyspersyjne, wiążące ω_r z wektorami falowymi k_r. Przedstawienie tych związków w formie macierzowej pozwala stosunkowo prosto przedyskutować zależność tych związków od wielkości, występujących w równaniu. Rozpatrzono szereg przypadków szczególnych. Przez pewne upraszczające założenia można przejść do sformułowań analogicznych zagadnień poprzednich prac.

1. Wstęp

W pracy [1] wyprowadzono równanie różniczkowe (9), opisujące zachowanie się fal w plazmie ciała stałego o własnościach ferroelektryka i ferromagnetyka. Przed przejściem do ogólnego przypadku rozpatrzymy szereg przypadków szczególnych. Zagadnienie jest w najogólniejszym przypadku nieliniowe. Jeżeli jako pierwsze przybliżenie przyjmiemy linearyzowane zagadnienie, wtedy jako pierwszy problem nasuwa się badanie stanu ustalonego linearyzowanego zagadnienia, przy założeniu stałych amplitud fal. Oznacza to ograniczenie się do rozpatrywania równania.

$$(F)\,C = 0 \tag{1}$$

Jednorodny układ równań (1) posiada nietrywialne rozwiązanie, jeżeli wyznacznik układu

$$\det(F) = 0 \tag{2}$$

Daje to związki między ω_r i k_r, czyli związki dyspersyjne, którym poświęcony jest artykuł niniejszy.

Ze względu na skomplikowaną postać wyrażeń, występujących w macierzy (F), odsyłamy czytelnika do tej pracy [1].

2. Pewne przypadki szczególne

Równanie (1) posiada nietrywialne rozwiązanie, jeżeli wyznacznik tego równania jest równy zeru. Ponieważ w problemie fal stacjonarnych wartości stałe należy uważać za znane, wystarczy rozpatrzeć $\det(F(r))$. Rozważanie dla $(F(r))^x$ przebiega analogicznie. Zerowanie tego wyznacznika daje związki, jakie muszą zachodzić między ω_r i k_r oraz jego składowymi. Z postaci tego równania wynika, że bardzo dużą rolę odgrywają w nim wartości stałe poszczególnych wielkości. Przez ich specyfikację można otrzymać różne przypadki i różne zachowanie się ośrodka. Ze względu na bardzo złożoną postać tego równania, dobrze jest zorientować się, znikanie jakich wielkości wywołuje degenerację problemu lub też pozwala sprowadzić go do postaci prostszej.

Jeżeli założymy, że P_o i wszystkie jego składowe są równe zeru, wtedy również $(F_{25}) = 0$ i można wydzielić z równania czynnik $\det(F_{26}) = 0$. Przy uwzględnieniu warunku $P_o = 0$ i po pomnożeniu przez wielkość zespoloną sprzężoną, otrzymujemy:

$$\omega_r^2 \left[-\omega_r^2 + (\bar{\delta} E_{o,x})^2 + (\bar{\delta} E_{o,y})^2 + (\bar{\delta} E_{o,z})^2 \right] = 0 \tag{3}$$

Daje to podwójny pierwiastek $\omega_r = 0$ oraz wartość

$$\omega_r = \pm \sqrt{(\delta E_{o,x})^2 + (\delta E_{o,y})^2 + (\delta E_{o,z})^2} \tag{4}$$

W przypadku znikania wektora pola elektrycznego, otrzymujemy dalsze wartości $\omega_r = 0$.

Kolejnie założenie, że $M_o = 0$ i podobnie jego składowe, czyli $(F_{23}) = 0$ daje równanie $\det(F_{24}) = 0$, analogiczne do (3), z tym że w miejsce E_o i jego składowych wchodzą H_o i jego składowe.

Założenie $(F_{19}) = 0$, co jest możliwe dla $c_2 \to 0$ lub $N_{2,0} \to \infty$ i pomnożenie przez wartość zespoloną sprzężoną równania $\det(F_{11}) = 0$ daje

$$(\omega_r - (V_{2,0,x}\, k_{r,x} + V_{2,0,y}\, k_{r,y} + V_{2,0,z}\, k_{r,z}))^2 = 0 \tag{5}$$

co daje podwójną zależność

$$\omega_r = V_{2,0,x}\, k_{r,x} + V_{2,0,y}\, k_{r,y} + V_{2,0,z}\, k_{r,z} \tag{6}$$

I tu $\omega_r = 0$, gdy zerują się składowe prędkości $V_{2,0}$.

Podobnie, gdy $(F_{17}) = 0$, czyli gdy $c_1 \to 0$, lub $N_{1,0} \to \infty$ otrzymujemy analogiczny związek, z tym, że w miejsce $V_{2,0}$ i jej składowych wchodzą $V_{1,0}$ i jej składowe, wtedy otrzymujemy związek $\det(F_9) = 0$, który można podobnie potraktować, jak równanie $\det(F_{11}) = 0$.

Założenie $(F_7) = 0$, czyli $N_{2,0} \to 0$, pozwala wydzielić czynnik $\det(F_{18}) = 0$, co daje potrójny pierwiastek

$$\omega_r = \pm (1/\tau_2)\, j \tag{7}$$

Założenie to może być sprzeczne z podanym wyżej założeniem $N_{1,0} = N_{2,0} = 0$.

Podobnie przyjęcie $(F_6) = 0$, czyli $N_{1,0} \to 0$ pozwala z równania $\det (F_{16}) = 0$ otrzymać

$$\omega_r = \pm (1/\tau_1)\, j \tag{8}$$

Po tych wszystkich uproszczeniach, pozostaje, wynikające z równań Maxwella równanie

$$\det \begin{pmatrix} (F_1), & (F_2) \\ (F_4), & (F_1) \end{pmatrix} = 0 \tag{9}$$

Jeżeli ze wszystkich wyrazów tego równania wyłączymy czynnik j jako wspólny i oznaczymy

$$k_{r,x}\, f_{s,i,1} + k_{r,y}\, f_{s,i,2} + k_{r,z}\, f_{s,i,3} = F_s\,(i,1) \tag{10}$$

$$s = 4,2 \qquad i = 1,2,3$$

$f_{s,i,k}$ elementy macierzy (F_4) lub (F_2),

oraz

$$D_s(mn,\, pq) = f_{s,m,n}\, f_{s,p,q} - f_{s,m,q}\, f_{s,p,n} \qquad s = 4,2 \tag{11}$$

i podobnie dla innych kombinacji indeksów, wtedy równanie (9) można napisać w postaci:

$$
\begin{aligned}
&-(k_{r,x} F_4(11)+k_{r,y} F_4(21)+k_{r,z} F_4(31))(k_{r,x} F_2(11) + \\
&+ k_{r,y} F_2(21)+k_{r,z} F_2(31)) - \left[k_{r,z} D_4(11,23)+k_{r,y} D_4(11,22)\right] \cdot \\
&\cdot \left[k_{r,y} D_2(22,33)+k_{r,x} D_2(21,33)\right] - \left[k_{r,z} D_4(11,33) + \right. \\
&\left. + k_{r,y} D_4(11,32)\right] \cdot \left[k_{r,z} D_2(22,32) - k_{r,x} D_2(21,32)\right] + \\
&+\left[k_{r,z} D_4(21,33)+k_{r,y} D_4(21,32)\right]\left[k_{r,z} D_2(21,33)+k_{r,y} D_2(21,32)\right]+ \\
&+\left[k_{r,z} D_4(11,33)-k_{r,y} D_4(11,32)\right]\left[k_{r,z} D_2(12,33)-k_{r,x} D_2(11,32)\right]+ \\
&+\left[k_{r,z} D_4(13,23)-k_{r,x} D_4(11,22)\right]\left[k_{r,y} D_2(12,33)+k_{r,x} D_2(11,32)\right]- \\
&-\left[k_{r,z} D_4(22,33)-k_{r,x} D_4(21,32)\right]\left[k_{r,z} D_2(11,33)+k_{r,y} D_2(11,32)\right]+ \\
&+\left[k_{r,y} D_4(12,23)+k_{r,x} D_4(11,23)\right]\left[k_{r,y} D_2(12,23)+k_{r,x} D_2(11,23)\right]+ \\
&+\left[k_{r,y} D_4(12,33)+k_{r,x} D_4(11,33)\right]\left[k_{r,z} D_2(12,23)-k_{r,x} D_2(11,22)\right]- \\
&-\left[k_{r,y} D_4(22,33)+k_{r,x} D_4(21,33)\right]\left[k_{r,z} D_2(11,23)+k_{r,y} D_2(11,22)\right]- \\
&- \det(F_2) \cdot \det(F_4) = 0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Ponieważ wyłączono przed wyznacznik j^6, należy wyznacznik (12) pomnożyć przez ten czynnik.

Występujące w równaniu (12) wyrażenia posiadają następujące wartości:

$$\det(F_2) = f_{2,1,1}\,(f_{2,2,2}\,f_{2,3,3} - f_{2,2,3}\,f_{2,3,2}) - $$
$$- f_{2,2,1}\,(f_{2,1,2}\,f_{2,3,3} - f_{2,1,3}\,f_{2,3,2}) + f_{2,3,1}\,\cdot$$
$$\cdot\,(f_{2,1,2}\,f_{2,2,3} - f_{2,1,3}\,f_{2,2,2}) \tag{13}$$

Występujące tu iloczyny są typu

$$f_{2,i,k}\,(f_{2,m,n}\,f_{2,p,q} - f_{2,m,q}\,f_{2,p,n}), \quad i \neq m, \quad i \neq p \quad k \neq n, \quad k \neq q \tag{14}$$

Iloczyn

$$f_{2,m,n}\,f_{2,p,q} = \mathrm{Re}(f_{2,m,n}\,f_{2,p,q}) + j\,\mathrm{Im}(f_{2,m,n}\,f_{2,p,q}) \tag{15}$$

gdzie

$$\mathrm{Re}(f_{2,m,n}\,f_{2,p,q}) = (\omega_r/c)^2 \Big\{ \beta_{m,n}\,\beta_{p,q} - k_r^2\,\Delta_{1,m,n}\,\beta_{p,q} -$$
$$- \beta_{p,q} \sum_{s=1}^{3} \Delta_{2,m,s}\,k_{s,n} - \sum_{s=1}^{3} \delta_{m,n,s}\,k_{r,x_s} \sum_{t=1}^{3} \delta_{p,q,t}\,k_{r,x_t} -$$
$$- k_r^2\,\beta_{m,n}\,\Delta_{1,p,q} + k_r^4\,\Delta_{1,m,n}\,\Delta_{1,p,q} + k_r^2\,\Delta_{1,p,q}\,\cdot$$
$$\cdot \sum_{s=1}^{3} \Delta_{2,m,s}\,k_{s,n} - \beta_{m,n} \sum_{s=1}^{3} \Delta_{2,p,s}\,k_{s,q} + k_r^2\,\Delta_{1,m,n}\,\cdot$$
$$\cdot \sum_{s=1}^{3} \Delta_{2,p,s}\,k_{s,q} + \sum_{\Delta=1}^{3} \Delta_{2,m,s}\,k_{s,n} \sum_{t=1}^{3} \Delta_{2,p,t}\,k_{t,q} \Big\}. \tag{16}$$

$$\mathrm{Im}(f_{2,m,n}\, f_{2,p,q}) = (\omega_r/c)^2 \Big\{ - \beta_{p,q} \sum_{s=1}^{3} \delta_{m,n,s}\, k_{r,x_s} - \beta_{m,n} \cdot \sum_{s=1}^{3} \delta_{p,q,s}\, k_{r,x_s} + \Delta_{1,m,n} \sum_{s=1}^{3} \;p,q,s\; k_{r,x_s} + \sum_{s=1}^{3} \Delta_{2,m,s} k_{s,n} \cdot \sum_{s=1}^{3} \delta_{p,q,t}\, k_{r,x_t} + k_r^2\, \Delta_{1,p,q} \sum_{s=1}^{3} \delta_{m,n,s}\, k_{r,x_s} + \sum_{s=1}^{3} \delta_{m,n,s}\, k_{r,x_s} \cdot \sum_{t=1}^{3} \Delta_{2,p,t}\, k_{t,q} \Big\} \tag{17}$$

Iloczyn

$$f_{2,i,k}\, f_{2,m,n}\, f_{2,p,q} = (\omega_r/c)(\beta_{i,k} - k_r^2\, \Delta_{1,i,k} - \sum_{s=1}^{3} \Delta_{2,i,s}\, k_{s,k}) \cdot \mathrm{Re}(f_{2,m,n}\, f_{2,p,q}) + (\omega_r/c) \cdot \sum_{s=1}^{3} \delta_{i,k,s}\, k_{r,x_s} \cdot \mathrm{Im}(f_{2,m,n}\, f_{2,p,q}) + j \Big\{ \mathrm{Im}(f_{2,m,n}\, f_{2,p,q}) \cdot (\omega_r/c)(\beta_{i,k} - k_r^2\, \Delta_{1,i,k} - \sum_{s=1}^{3} \Delta_{2,i,s}\, k_{s,k}) - (\omega_r/c) \cdot \sum_{s=1}^{3} \delta_{i,k,s}\, k_{r,x_s} \cdot \mathrm{Re}(f_{2,m,n}\, f_{2,p,q}) \Big\} \tag{18}$$

Przy obliczeniu wyrażeń (16)-(18) pominięto czynnik j^2 lub j^3. Przy odpowiedniej zmianie znaku i oznaczeń otrzymujemy analogicznie det (F_4). Mianowicie - $\alpha_{i,k}$, $\delta_{i,k,l}$, $\Delta_{1,i,k}$, $\Delta_{2,i,k}$ należy zastąpić przez $\beta_{i,k}$, $\gamma_{i,k,l}$, $\Gamma_{1,i,k}$, $\Delta_{2,i,k}$.
$k_{s,k}$ oznaczają elementy macierzy (K), k_{r,x_s} kolejne składowe $k_{r,x}$, $k_{r,y}$, $k_{r,z}$.

$$k_{r,x}\, f_{2,1,1} + k_{r,y}\, f_{2,1,2} + k_{r,z}\, k_{2,1,3} = (\omega_r/c)\Big\{(k_{r,x}\, \beta_{1,1} + k_{r,y}\, \beta_{1,2} + k_{r,z}\, \beta_{1,3}) - j \sum_{s=1}^{3} (k_{r,x}\, \Delta_{1,1,s}\, k_{r,x_s} +$$

$$+ k_{r,y}\,\delta_{1,2,s}\,k_{r,x_s} + k_{r,z}\,\delta_{1,3,s}\,k_{r,x_s}) - k_r^2(k_{r,x}\,\Delta_{1,1,1} +$$

$$+ k_{r,y}\,\Delta_{1,1,2} + k_{r,z}\,\Delta_{1,1,3}) - \sum_{s=1}^{3} (k_{r,x}\,\Delta_{2,1,s}\,k_{s,1} +$$

$$+ k_{r,y}\,\Delta_{2,1,s}\,k_{s,2} + k_{r,z}\,\Delta_{2,1,s}\,k_{s,3})\Big\} \tag{19}$$

Wyrażenia typu $k_{r,y}\,(f_{2,1,2}\,f_{2,2,3} - f_{2,1,3}\,f_{2,2,2}) +$

$+ k_{r,x}\,(f_{2,1,1}\,f_{2,2,3} - f_{2,1,3}\,f_{2,2,1}) = k_{r,y}\,D_2(12,23) +$

$+ k_{r,x}\,D_2\,(11,23)$ można prosto wyrazić przez (18).

Analogicznie obliczają się wyrażenia zawierające elementy macierzy (F_4).

3. Obniżenie rzędu równania $\det(F(r)) = 0$

Rząd równania $\det(F(r)) = 0$ można obniżyć przez częściową eliminację niektórych zmiennych. Najprościej robi się to dla P, M, N_1, N_2 przy pomocy równań

$$\begin{aligned}
(F_{25})\,E + (F_{26})\,P &= 0\\
(F_{23})\,H + (F_{24})\,M &= 0\\
(F_6)\,V_1 + (F_9)\,N_1 &= 0\\
(F_{10})\,V_2 + (F_{11})\,N_2 &= 0
\end{aligned} \tag{20}$$

W miejsce macierzy 20 rzędu otrzymujemy macierz rzędu 12 o następującej postaci:

$$\begin{pmatrix} (F_1) & (F_2)-(F_3)(F_{24})^{-1}(F_{23}), & (0) & (0) \\ (F_4)-(F_5)(F_{26})^{-1}(F_{25}), & (F_1) & (F_6) & (F_7) \\ (F_{13}) & (F_{14})-(F_{15})(F_{24})^{-1}(F_{23}), & (F_{16})-(F_{17})(F_9)^{-1}(F_8), & (0) \\ (F_{20}) & (F_{21})-(F_{22})(F_{24})^{-1}(F_{23}), & (0) & (F_{18})-(F_{19})(F_{11})^{-1}\cdot(F_{10}) \end{pmatrix} \tag{21}$$

Z postaci tej wynika, że równanie to daje się rozłożyć na prostsze, jeżeli spełnione są warunki $(F_7) = (F_6) = 0$, co jest możliwe dla $N_{1,0} = N_{2,0} = 0$ lub też bliskiego tej wartości. Wtedy otrzymujemy następujące związki:

$$\det \begin{pmatrix} (F_1) & (F_2)-(F_3)(F_{24})^{-1}(F_{23}) \\ (F_4)-(F_5)(F_{26})^{-1}(F_{25}), & (F_1) \end{pmatrix} = 0 \tag{22}$$

$$\det \left\{(F_{16})-(F_{17})(F_9)^{-1}(F_8)\right\} = 0 \tag{23}$$

$$\det \left\{(F_{18})-(F_{19})(F_{11})^{-1}(F_{10})\right\} = 0 \tag{24}$$

W przypadku, gdy upraszczające założenia nie są spełnione wyznacznik macierzy (32) posiada następującą postać:

$$\det\begin{pmatrix}(F_1), & (F_2)-(F_3)(F_{24})^{-1}(F_{23})\\ (F_{20}), & (F_{21})-(F_{22})(F_{24})^{-1}(F_{23})\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\ \det\left\{(F_{16})-(F_{17})(F_9)^{-1}(F_8)\right\}\ \det\,(F_7)\ +$$

$$+\ \det\begin{pmatrix}(F_1), & (F_2)-(F_3)(F_{24})^{-1}(F_{23})\\ (F_{13}), & (F_{14})-(F_{15})(F_{24})^{-1}(F_{23})\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\ \det\ \left\{(F_{18})-(F_{19})(F_{11})^{-1}(F_{10})\right\}\det(F_6)\ -$$

$$-\ \det\begin{pmatrix}(F_1) & (F_2)-(F_3)(F_{24})^{-1}(F_{23})\\ (F_4)-(F_5)(F_{26})^{-1}(F_{25}), & (F_1)\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\ \det\left\{(F_{16})-(F_{17})(F_9)^{-1}(F_8)\right\}\det\left\{(F_{18})-(F_{19})(F_{11})^{-1}(F_{10})\right\} = 0 \quad (25)$$

Fizykalnie równania (23) i (24) opisują własności plazmowe, ze względu na występujące w nich parametry charakteryzujące plazmę. W równaniu (22) znajdują swój wyraz równania Maxwella oraz równania opisujące dynamikę zmian polaryzacji elektrycznej i magnetycznej.

Równanie $\det\left\{(F_{16})-(F_{17})(F_9)^{-1}(F_8)\right\} = 0$ po prostych przekształceniach i pomnożeniu przez wartość zespoloną sprzężoną, może być napisane w postaci:

$$\Big\{(1/\tau_1)^3 - 3(1/\tau_1)\omega_r^2 - (1/\tau_1)\Big[c_1^4(k_{r,x} + k_{r,y} + k_{r,z})^2(k_{r,y} \cdot$$

$$\cdot k_{r,z} + k_{r,x} k_{r,z} + k_{r,x} k_{r,y})/(\omega_r - V_{1,o,x} k_{r,x} -$$

$$- V_{1,o,y} k_{r,y} - V_{1,o,z} k_{r,z})^2 - (e_1/m_1 c)^2(B_{o,x}{}^2 + B_{o,y}{}^2 +$$

$$+ B_{o,z}{}^2)\Big] + c_1^2\, \omega_r(k_{r,x} + k_{r,y} + k_{r,z})^2/(\omega_r - V_{1,o,x} k_{r,x} -$$

$$- V_{1,o,y} k_{r,y} - V_{1,o,z} k_{r,z})\Big\}^2 + \Big\{3(1/\tau_1)^2\, \omega_r - \omega_r{}^3 -$$

$$- \omega_r\Big[c_1^4\,(k_{r,x} + k_{r,y} + k_{r,z})^2(k_{r,y} k_{r,z} + k_{r,z} k_{r,x} +$$

$$+ k_{r,x} k_{r,y})/(\omega_r - V_{1,o,x} k_{r,x} - V_{1,o,y} k_{r,y} - V_{1,o,z} k_{r,z})^2 -$$

$$- (e_1/m_1 c)^2(B_{o,x}{}^2 + B_{o,y}{}^2 + B_{o,z}{}^2)\Big] - \Big[c_1^2(1/\tau_1)(k_{r,x} + k_{r,y} +$$

$$+ k_{r,z})^2/(\omega_r - V_{1,o,x} k_{r,x} - V_{1,o,y} k_{r,y} - V_{1,o,z} k_{r,z}) -$$

$$- c_1^6(k_{r,x} + k_{r,y} + k_{r,z})^4/(\omega_r - V_{1,o,x} k_{r,x} - V_{1,o,y} k_{r,y} -$$

$$- V_{1,o,z} k_{r,z})^3\Big] + \Big[c_1^2\,(k_{r,x} + k_{r,y} + k_{r,z})/(\omega_r - V_{1,o,x} k_{r,x} -$$

$$- V_{1,o,y} k_{r,y} - V_{1,o,z} k_{r,z})(e_1/m_1 c)^2(k_{r,x} B_{o,x}{}^2 + k_{r,y} B_{o,y}{}^2 +$$

$$+ k_{r,z} B_{o,z}{}^2)\Big]\Big\}^2 = 0 \tag{26}$$

Podobną postać posiada równanie:

$$\det\Big\{(F_{18})-(F_{19})(F_{11})^{-1}(F_{10})\Big\} = 0$$

z tym, że w miejsce indeksu 1 w wyrażeniach τ_1, c_1, e_1, m_1, $V_{1,o,x}$, $V_{1,o,y}$, $V_{1,o,z}$ należy podstawić analogiczne wielkości z indeksem 2.

Obliczenie wyznacznika (22) wymaga wstępnego obliczenia wielkości, które odróżniają to równanie od równania (13). Można napisać

$$(F_{24})^{-1} = \mathrm{ad}\,(F_{24}) / \det\,(F_{24}) \tag{27}$$

Oznaczając

$$\begin{gathered} \bar{\varepsilon} H_{o,x_i} + M_{o,x_i} \left[\bar{\varepsilon} (2\bar{\lambda}/M_o^2)\, k_r^2 + j\, \omega_r\, (\bar{\alpha}/M_o) \right] = X_i \\ i = 1,\ 2,\ 3 \end{gathered} \tag{28}$$

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\quad X_1 = X,\quad X_2 = Y,\quad X_3 = Z$$

otrzymujemy dla wyznacznika det (F_{24}) i elementów macierzy ad $(F_{24}) = (\mathcal{F}_{i,k})$

$$\begin{aligned} \det\,(F_{24}) &= -\,j\,\omega_r^3 - \omega_r^2\,(X^2 + Y^2 + Z^2) \\ \mathcal{F}_{1,1} &= -\,\omega_r^2 + X^2 \\ \mathcal{F}_{2,2} &= -\,\omega_r^2 + Y^2 \\ \mathcal{F}_{3,3} &= -\,\omega_r^2 + Z^2 \\ \mathcal{F}_{1,2} &= -\,j\,\omega_r\, Z + X\,Y \\ \mathcal{F}_{1,3} &= j\,\omega_r\, Y - Z\,X \\ \mathcal{F}_{2,1} &= j\,\omega_r\, Z + X\,Y \end{aligned} \tag{29}$$

$$\mathcal{F}_{2,3} = -j\,\omega_r X + Z Y$$

$$\mathcal{F}_{3,1} = -j\,\omega_r Y - Z X \tag{29}$$

$$\mathcal{F}_{3,2} = -j\,\omega_r X + Y Z$$

Elementy zaś macierzy ad $(F_{24})\,(F_{23})$ są następujące:

$$F_{1,1'} = -j\omega_r\,(Z M_{o,z} + Y M_{o,y})\,\bar{\varepsilon} + X\,(Y M_{o,z} - Z M_{o,y})\bar{\varepsilon}$$

$$F_{1,2'} = \omega_r^2 M_{o,z}\,\bar{\varepsilon} + X\,(-X M_{o,z} + Z M_{o,x})\,\bar{\varepsilon} + j\omega_r Y M_{o,x}\,\bar{\varepsilon}$$

$$F_{1,3'} = -\omega_r^2 M_{o,y}\bar{\varepsilon} + X\,(X M_{o,y} - Y M_{o,x})\,\bar{\varepsilon} + j\omega_r Z M_{o,x}\bar{\varepsilon}$$

$$F_{2,1'} = -\omega_r^2 M_{o,z}\bar{\varepsilon} + Y\,(Y M_{o,z} - Z M_{o,y})\,\bar{\varepsilon} + j\omega_r X M_{o,y}\bar{\varepsilon}$$

$$F_{2,2'} = -j\omega_r\,(Z M_{o,z} + X M_{o,x})\bar{\varepsilon} + Y\,(Z M_{o,x} - X M_{o,z})\bar{\varepsilon} \tag{30}$$

$$F_{2,3'} = \omega_r^2 M_{o,x}\,\bar{\varepsilon} + Y\,(X M_{o,y} - Y M_{o,x})\bar{\varepsilon} + j\omega_r Z M_{o,y}\,\bar{\varepsilon}$$

$$F_{3,1'} = \omega_r^2 M_{o,y}\,\bar{\varepsilon} + Z\,(Y M_{o,z} - Z M_{o,y})\,\bar{\varepsilon} + j\omega_r X M_{o,z}\bar{\varepsilon}$$

$$F_{3,2'} = -\omega_r^2 M_{o,x}\bar{\varepsilon} + Z\,(X M_{o,z} - Z M_{o,x})\,\bar{\varepsilon} + j\omega_r Y M_{o,z}\bar{\varepsilon}$$

$$F_{3,3'} = -j\omega_r\,(Y M_{o,y} + X M_{o,x})\bar{\varepsilon} + Z\,(Y M_{o,x} - X M_{o,y})\bar{\varepsilon}$$

Jeżeli dla skrócenia oznaczymy $(F_2') = (F_3)(F_{24})^{-1}(F_{23})$ oraz $(F_4^{\wedge}) = (F_5)(F_{26})^{-1}(F_{25})$, wtedy

$$(F_2') = (4\pi j\,\omega_r/c\,\det\,(F_{24}))\Big(\sum_{\Delta=1}^{3} \beta_{i,s}\,F'_{s,k}\Big) \tag{31}$$

Ze względu na analogiczną budowę podobnie do obliczeń macierzy (F_2') przebiegają obliczenia macierzy (F_4').

Równanie
$$\det \begin{pmatrix} (F_1) & (F_2)-(F_2') \\ (F_4)-(F_4'), & (F_1) \end{pmatrix} = 0 \tag{32}$$

może być doprowadzone do podobnej postaci jak równanie (23)

$$-(k_{r,x}(F_4(11) - F_4'(11)) + k_{r,y}(F_4(21) - F_4'(21)) + k_{r,z}(F_4(31) -$$
$$- F_4'(31))).(k_{r,x}(F_2(11) - F_2'(11)) + k_{r,y}(F_2(21) - F_2'(21)) +$$
$$+ k_{r,z}(F_2(31) - F_2'(31))) - \left[k_{r,z}\bar{D}_4(11,23) + k_{r,y}\bar{D}_4(11,22)\right] \cdot$$
$$\cdot \left[k_{r,y}\bar{D}_2(22,33) + k_{r,x}\bar{D}_2(21,33)\right] - \left[k_{r,z}\bar{D}_4(11,33) + k_{r,y} \cdot\right.$$
$$\left.\cdot \bar{D}_4(11,32)\right] \cdot \left[k_{r,z}\bar{D}_2(22,32) - k_{r,x}\bar{D}_2(21,32)\right] + \left[k_{r,z}\bar{D}_4(21,33) +\right.$$
$$\left.+ k_{r,y}\bar{D}_4(21,32)\right]\left[k_{r,z}\bar{D}_2(21,33) + k_{r,y}\bar{D}_2(21,32) +\right.$$
$$+ \left[k_{r,z}\bar{D}_4(11,33) - k_{r,y}\bar{D}_4(11,32)\right]\left[k_{r,z}\bar{D}_2(12,33) - k_{r,x} \cdot\right.$$
$$\left.\cdot \bar{D}_2(11,32)\right] + \left[k_{r,z}\bar{D}_4(13,23) - k_{r,x}\bar{D}_4(11,22)\right]\left[k_{r,z}\bar{D}_2(12,33) +\right.$$
$$\left.+ k_{r,x}\bar{D}_2(11,32)\right] - \left[k_{r,z}D_4(22,33) - k_{r,x}\bar{D}_4(21,32)\right]\left[k_{r,z} \cdot\right.$$
$$\left.\cdot \bar{D}_2(11,33) + k_{r,y}\bar{D}_2(11,32)\right] + \left[k_{r,y}\bar{D}_4(12,23) + k_{r,x}\bar{D}_4(11,23)\right] \cdot$$
$$\cdot \left[k_{r,y}\bar{D}_2(12,23) + k_{r,x}\bar{D}_2(11,23)\right] + \left[k_{r,y}\bar{D}_4(12,33) + k_{r,x} \cdot\right.$$

$$\cdot\ \bar{D}_4(11,33)\Big]\Big[k_{r,z}\ \bar{D}_2(12,23) - k_{r,x}\ \bar{D}_2(11,22)\Big] - \Big[k_{r,y}\bar{D}_4(22,33) +$$

$$+ k_{r,x}\ \bar{D}_4(21,33)\Big]\Big[k_{r,z}\ \bar{D}_2(11,23) + k_{r,y}\ \bar{D}_2(11,22)\Big] -$$

$$- \det\Big[(F_2)-(F_2')\Big] \cdot \det\Big[(F_4)-(F_4')\Big] = 0 \tag{33}$$

Przy tym wypracowano następujące oznaczenia, analogicznie do (10) i (11)

$$k_{r,x}\ f'_{s,i,1} + k_{r,y}\ f'_{s,i,2} + k_{r,z}\ f'_{s,i,3} = F'_s\ \ (i,1)$$

$$s = 4,2 \qquad\qquad i = 1,2,3 \tag{34}$$

i podobne dla innych kombinacji indeksów.

$$\bar{D}_s(mn,pq) = (f_{s,m,n} - f'_{s,m,n})(f_{s,p,q} - f'_{s,p,q}) -$$

$$- (f_{s,p,n} - f'_{s,p,n})(f_{s,m,q} - f'_{s,m,q}) \tag{35}$$

$$s = 4,2$$

Inaczej

$$\bar{\bar{D}}_s(mn,pq) = D_s(mn,pq) + D'_s\ (mn,pq) - D'_s\ (mn)D_s(pq) -$$

$$- D'_s\ (pq)\ D_s(mn) \tag{36}$$

przy czym

$$D'_s(mn)D_s(pq) = f'_{s,m,n}\ f_{s,p,q} - f_{s,m,q}\ f'_{s,p,n}$$

$$D'_s(mn,pq) = f'_{s,m,n}\ f'_{s,p,q} - f'_{s,m,q}\ f'_{s,p,n} \tag{37}$$

$$\det\left[(F_s)-(F'_s)\right] = \det(F_s) - \det(F'_s) - \det(F_{s,1}) + \det(F_{s,2}) \tag{38}$$

gdzie

$$\det(F_{s,1}) = \sum_{i,j=1}^{3} (-1)^i \left(f_{s,m,n}\ f_{s,p,q} - f_{s,m,q}\ f_{s,p,n}\right) f'_{s,i,j}$$

$$i \neq m,\quad i \neq p,\quad j \neq n,\quad j \neq q,\quad i,j = 1,2,3 \tag{39}$$

$$\det(F_{s,2}) = \sum_{i,j=1}^{3} (-1)^i \left(f'_{s,m,n}\ f'_{s,p,q} - f'_{s,m,q}\ f_{s,p,n}\right) f_{s,i,j}$$

$$i \neq m,\quad i \neq p,\quad j \neq n,\quad j \neq q,\quad i,j = 1,2,3 \tag{40}$$

Wyrażenia powyższe mogą być napisane w innej postaci. Piszemy je dla (F'_2), ze względu na analogiczny rachunek. W formułach tych występują wielkości $F'_{i,k}$ z (30)

$$F'_2(i,1) = (4\pi j\omega_r/c \det(F_{24}))\Big[\beta_{1,1}(k_{r,x}\ F'_{1,1} +$$

$$+ k_{r,y}\ F'_{1,2} + k_{r,z}\ F'_{1,3}) + \beta_{1,2}(k_{r,x}\ F'_{2,1} + k_{r,y}\ F'_{2,2} +$$

$$+ k_{r,z}\ F'_{2,3}) + \beta_{1,3}(k_{r,x}\ F'_{3,1} + k_{r,y}\ F'_{3,2} + k_{r,z}\ F'_{3,3})\Big] \tag{41}$$

$$D_2'(mn,pq) = (4\pi j\omega_r/c \det(F_{24}))^2\Big[(\beta_{m,1}\beta_{p,2} - \beta_{m,2}\beta_{p,1})\cdot$$
$$\cdot (F'_{1,n}F'_{2,q} - F'_{2,n}F'_{1,q}) + (\beta_{m,1}\beta_{p,3} - \beta_{m,3}\beta_{p,1})\cdot$$
$$\cdot (F'_{1,n}F'_{3,q} - F'_{3,n}F'_{1,q}) + (\beta_{m,2}\beta_{p,3} - \beta_{m,3}\beta_{p,2})\cdot$$
$$\cdot (F'_{2,n}F'_{3,q} - F'_{3,n}F'_{2,q}) \qquad (42)$$

$$D_s''(mn)\,D_s(pq) = (4\pi j\omega_r/c \det(F_{24}))\Big[\beta_{m,1}(F'_{1,n}f_{2,p,q} -$$
$$- F'_{1,q}f_{2,p,n}) + \beta_{m,2}(F'_{2,n}f_{2,p,q} - F'_{2,q}f_{2,p,n}) +$$
$$+ \beta_{m,3}(F'_{3,n}f_{2,p,q} - F'_{3,q}f_{2,p,n})\Big] \qquad (43)$$

$$\det(F_{s,1}) = \sum_{i,j=1}^{3}(-1)^i(f_{s,m,n}f_{s,p,q} - f_{s,m,q}f_{s,p,n})\cdot$$
$$\cdot (4\pi j\omega_r/c \quad \det(F_{24}))\Big(\sum_{t=1}^{3}\beta_{i,t}F'_{t,k}\Big) \qquad (44)$$

$$i \neq m,\quad i \neq p,\quad j \neq n,\quad j \neq q,\quad i,j = 1,2,3$$

$$\det(F_{s,2}) = (4\pi j\omega_r/c \det(F_{24}))^2\sum_{i,j=1}^{3}(-1)^i\Big[(\beta_{m,1}\beta_{p,2} -$$
$$- \beta_{m,2}\beta_{p,1})(F'_{1,n}F'_{2,q} - F'_{2,n}F'_{1,q}) + (\beta_{m,1}\beta_{p,3} -$$
$$- \beta_{m,3}\beta_{p,1})(F'_{1,n}F'_{3,q} - F'_{3,n}F'_{1,q}) + (\beta_{m,2}\beta_{p,3} -$$
$$- \beta_{m,3}\beta_{p,2})\cdot(F'_{2,n}F'_{3,q} - F'_{3,n}F'_{2,q})\Big]f_{2,i,j} \qquad (45)$$

$$i \neq m,\quad i \neq p,\quad j \neq n,\quad j \neq q,\quad i,j = 1,2,3$$

$$\det(F_2') = (4\pi j\omega_r/c \det(F_{24}))^3 \det(\beta_{i,k}) \det(F_{23}) \tag{46}$$

Wyrażenia niekreskowane znane są z poprzednich obliczeń. Kreskowane odpowiadają iloczynowi dwu macierzy. Jeżeli elementy odnoszące się do pierwszej i drugiej części oznaczymy przez $I_{i,k}$, $II_{i,k}$, wtedy

$$F'_{i,n} F'_{i,q} - F'_{i,n} F'_{i,q} = \sum(I_{i,s} I_{j,r} - I_{i,r} I_{j,s}) \cdot$$

$$\cdot(II_{s,n} II_{r,q} - II_{r,n} II_{s,q}) \tag{47}$$

$$i \neq s, \quad i \neq r, \quad j \neq s, \quad j \neq r,$$

sumowanie odbywa się po różnych kombinacjach s, r dla $s \neq r$.

Podobnie można przekształcić iloczyny, w których jeden czynnik jest nie kreskowany

$$F'_{i,n} f_{2,p,q} - F'_{i,q} f_{2,p,n} = I_{i,1} (II_{1,n} f_{2,p,q} - II_{1,q} \cdot$$

$$\cdot f_{2,p,n}) + I_{1,2} (II_{2,n} f_{2,p,q} - II_{2,q} f_{2,p,n}) + I_{i,3} \cdot$$

$$\cdot (II_{3,n} f_{2,p,q} - II_{3,q} f_{2,p,n}) \tag{48}$$

4. Ogólne równanie (25)

Pewne wyrażenia z tego równania zostały wyliczone poprzednio. Uzupełnimy te obliczenia. Wyznaczniki

$$\det(F_6) = -64\,\pi^3 N_{1,o}{}^3\, e_1{}^3/c^3$$

$$\det(F_7) = -64\,\pi^3 N_{2,0}{}^3\, e_2{}^3/c^3 \tag{49}$$

Pozostają do wyliczenia dwa wyznaczniki:

$$\det \begin{pmatrix} (F_1), & (F_2)-(F_3)(F_{24})^{-1}(F_{23}) \\ (F_{13}), & (F_{14})-(F_{15})(F_{24})^{-1}(F_{23}) \end{pmatrix} \tag{50}$$

$$\det \begin{pmatrix} (F_1), & (F_2)-(F_3)(F_{24})^{-1}(F_{23}) \\ (F_{20}), & (F_{21})-(F_{22})(F_{24})^{-1}(F_{23}) \end{pmatrix} \tag{51}$$

Ze względu na analogiczną budowę tych wyznaczników, obliczamy pierwszy z nich. Najpierw obliczamy

$$\det \begin{pmatrix} (F_1), & (F_2) \\ (F_{13}), & (F_{14}) \end{pmatrix} \tag{52}$$

Jeżeli oznaczymy analogicznie do (22)

$$D_{14}(mn,pq) = f_{14,mn}\, f_{14,pq} - f_{14,mq}\, f_{14,pn} \tag{53}$$

$$F_2(1,i) = k_{r,x}\, F_{2,1,i} + k_{r,y}\, F_{2,2,i} + k_{r,z}\, F_{2,3,i} \tag{54}$$

wtedy po prostych przeliczeniach

$$\det \begin{pmatrix} (F_1), & (F_2) \\ (F_{13}), & (F_{14}) \end{pmatrix} = (e_1/m_1)\Big\{ F_2(1,1)\Big[- D_{14}(22,33)k_{r,x} +$$

$$+ D_{14}(12,33)k_{r,y} - D_{14}(12,23)k_{r,z}\Big] + F_2(1,2)\Big[D_{14}(21,33)k_{r,x} -$$

$$- D_{14}(11,33)k_{r,y} + D_{14}(11,23)k_{r,z}\Big] + F_2(1,3)\Big[- D_{14}(21,32) +$$

$$+ D_{14}(11,32)k_{r,y} - D_{14}(11,22)k_{r,z}\Big]\Big\} + (e_1/m_1)^2 \Big\{f_{14,3,1} \cdot$$

$$\cdot \Big[- j\, k_{r,y}\, D_2(22,33) + j\, k_{r,x}\, D_2(12,33)\Big] + f_{14,3,2}\Big[j\, k_{r,y} \cdot$$

$$\cdot D_2(21,33) - j\, k_{r,x}\, D_2(11,33)\Big] + f_{14,3,3}\Big[j\, k_{r,x}\, D_2(11,32) -$$

$$- j\, k_{r,y}\, D_2(21,32)\Big] + f_{14,2,1}\Big[j\, k_{r,z}\, D_2(22,33) - j\, k_{r,x} \cdot$$

$$\cdot D_2(12,23)\Big] + f_{14,2,2}\Big[j\, k_{r,x}\, D_2(11,22) - j\, k_{r,z}\, D_2(21,33)\Big] +$$

$$+ f_{14,2,3}\Big[j\, k_{r,z}\, D_2(21,32) - j\, k_{r,x}\, D_2(11,22)\Big] + f_{14,1,1} \cdot$$

$$\cdot \Big[j\, k_{r,y}\, D_2(12,23) - j\, k_{r,z}\, D_2(12,33)\Big] + f_{14,1,2}\Big[j\, k_{r,z} \cdot$$

$$\cdot D_2(11,33) - j\, k_{r,y}\, D_2(11,23)\Big] + f_{14,1,3}\Big[j\, k_{r,y}\, D_2(11,22) -$$

$$- j\, k_{r,z}\, D_2(11,32)\Big]\Big\} - (e_1/m_1)^3 \det (F_2) \tag{55}$$

Przejście do szukanego wyznacznika można przeprowadzić formalnie, zastępując wielkości, występujące w ostatnim równaniu przez wielkości z kreską u góry, przy czym

$$\bar{f}_{2,i,k} = f_{2,i,k} - f'_{2,i,k} \tag{56}$$

i podobnie dla indeksu 14. Wzory (34)-(40) należy uogólnić dla indeksu $s = 14$.

Występującą w tych zależnościach wielkość

$$(F'_{14}) = (F_{15})(F_{24})^{-1}(F_{23}) \tag{57}$$

można formalnie obliczać tak samo jak (F'_2) z tą jedynie różnicą, że w miejsce $\beta_{i,k}$ należy podstawić $\beta_{1,i,k}$.

Jak wynika z podanych zależności postać równania (25) jest bardzo złożona. Przedstawienie (25) tego równania pozwala łatwo stwierdzić pewne szczególne rozwiązania. Mianowicie równanie (25) jest spełnione dla następujących kombinacji:

1. $$\det\left\{(F_{18})-(F_{19})(F_{11})^{-1}(F_{10})\right\} = 0 \tag{58}$$

i albo

1a. $$\det\left\{(F_{16})-(F_{17})(F_{9})^{-1}(F_{8})\right\} = 0 \tag{59}$$

albo

1b. $$\det\begin{pmatrix}(F_1), & (F_2)-(F_3)(F_{24})^{-1}(F_{23}) \\ (F_{20}), & (F_{21})-(F_{22})(F_{24})^{-1}(F_{23})\end{pmatrix} = 0 \tag{60}$$

albo

1c. $$\det(F_7) = 0 \tag{61}$$

2. $$\det\left\{(F_{16})-(F_{17})(F_{9})^{-1}(F_{8})\right\} = 0 \tag{62}$$

i albo

2a.
$$\det\left\{(F_{18})-(F_{19})(F_{11})^{-1}(F_{10})\right\} = 0 \tag{63}$$

albo

2b.
$$\det\begin{pmatrix}(F_1), & (F_2)-(F_3)(F_{24})^{-1}(F_{23}) \\ (F_{13}), & (F_{14})-(F_{15})(F_{24})^{-1}(F_{23})\end{pmatrix} = 0 \tag{64}$$

albo

2c.
$$\det(F_6) = 0 \tag{65}$$

Ponieważ w tych przypadkach szczególnych rozwiązania podanych wyżej równań muszą być wspólne, jest to możliwe jedynie, gdy stałe układu spełniają pewne zależności.

Oczywiście wypisane wyżej równania mają swój sens fizykalny, reprezentując własności pola elektromagnetycznego, własności plazmowe, własności spinowe lub wreszcie wpływ polaryzacji elektrycznej.

Ze względu na ograniczoną objętość pracy, szczegółowa dyskusja otrzymanych równań zostaje odłożona do następnej publikacji.

Wpłynęło do Redakcji 2 listopada 1967 r.

LITERATURA

[1] Szpilecki J.: Teoria rozchodzenia się fal w plaźmie ciała stałego i własnościach ferroelektryka i ferromagnetyka Zesz. Pol. Śląskiej, Matematyka-Fizyka nr 14,69, 1969.

ДИСПЕРСИОННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ В ПЛАЗМЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ФЕРРОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ И ФЕРРОМАГНИТНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Р е з ю м е

Между различными возможными проблемами, связанными с уравнением (9) работы [1], работа посвящена линейной проблеме установившегося состояния, когда амплитуды волн постоянные величины.

В этом случае рассматривается только матрица (F). Исследование нулей детерминанта этой матрицы дает дисперсионные формулы, которые связывают ω_r с волновым вектором k_r.

Матричное представление этих связей дает возможность непосредственно рассматривать их связь с величинами, выступающими в уравнении. Рассматривались некоторые частные случаи. Применяя некоторые упрощения можно получить формулировку подобных проблем работ других авторов.

DISPERSION RELATIONS IN SOLID-STATE BODY PLASMA WITH FERROELECTRIC AND FERROMAGNETIC PROPERTIES

S u m m a r y

Among various problems, which can be related to equation (9), of [1] the paper deals with the linear problem of steady state, when the amplitudes of waves are constant quantities. In this case only matrix (F) comes into consideration. The investigation of the zero loci of the determinant of this matrix gives the formulae of dispersion, joining ω_r with the wave vector k_r. The matrix representation of these formulae makes it possible to discuss di-

rectly the relation of this formula to the quantities represented in the equation. Some particular cases were especially considered. With some simplifying assumptions one obtain the formulation of analogous problems discussed in the papers of other authors.