ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 43 Nr kol. 795

Krystyna MIŚTA

WZORY WARIACYJNE W PEWNEJ PODKLASIE FUNKCJI JEDNOLISTNYCH I ICH ZASTOSOWANIE

Streszczenie. W pracy rozważa się klasę S_1 funkcji holomorficznych i jednolistnych w kole jednostkowym U postaci $f(z) = a_1z + a_2z^2 + \ldots$, spełniających warunki $|f(z)| < 1$ i $f'(0) > 0$.

Po podaniu wariacji dla funkcji tej klasy wykorzystuje się je do oszacowania wartości pewnych funkcjonałów określonych w S_1.

WARIACJE W RODZINIE FUNKCJI OGRANICZONYCH

Niech S_1 oznacza rodzinę funkcji holomorficznych i jednolistnych w kole jednostkowym $U = \{z: |z| < 1\}$ postaci

$$f(z) = a_1z + a_2z^2 + \ldots \tag{1}$$

spełniających warunki

$$|f(z)| < 1, \quad f'(0) > 0. \tag{2}$$

Twierdzenie 1

Niech D oznacza obszar jednospójny, będący obrazem funkcji z klasy S_1, natomiast Δ będzie obszarem, którego domknięcie nie zawiera 0 i ∞, niech ponadto $\partial U \subset \Delta$ i Δ jest symetryczny ze względu na odwzorowanie $w \to \frac{1}{\bar{w}}$ (tzn. $w \in \Delta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1}{\bar{w}} \in \Delta$). Niech $\Phi(w)$ będzie funkcją holomorficzną w Δ taką, że

$$\Phi(w) = -\overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)} \quad \text{dla każdego } w \in \Delta . \tag{3}$$

Wówczas dla każdego ε, dostatecznie bliskiego 0, funkcja

$$w^*(w) = w \exp\left[\varepsilon\, \Phi(w)\right] \tag{4}$$

jest jednolistna w Δ i odwzorowuje brzeg koła jednostkowego ∂U na brzeg obszaru D.

Dowód:

Wprowadzamy funkcję

$$\tau(w,\omega) = \begin{cases} \dfrac{\Phi(w)-\Phi(\omega)}{w-\omega}, & w \neq \omega \\ \Phi'(\omega), & w = \omega \end{cases} \tag{5}$$

$\tau(w,\omega)$ jest określona, holomorficzna i ograniczona w zbiorze zwartym $\bar{\Delta}\times\bar{\Delta}$. $w^*(w)$ jest jednolistna w Δ dla $|\varepsilon|$ dostatecznie małego. Załóżmy, że $w^*(w)$ nie jest jednolistna w Δ. Wtedy istniałyby $w_1 \neq w_2$, $w_1,w_2 \in \Delta$ takie, że $w^*(w_1) = w^*(w_2)$, a więc

$$w_1 \exp\left[\varepsilon\Phi(w_1)\right] = w_2 \exp\left[\varepsilon\Phi(w_2)\right].$$

Stąd

$$w_1 - w_2 = w_1 - w_1\exp\left[\varepsilon(\Phi(w_1) - \Phi(w_2))\right],$$

$$w_1 - w_2 = w_1(1 - \exp\left[\varepsilon(w_1 - w_2)\frac{\Phi(w_1)-\Phi(w_2)}{w_1-w_2}\right]),$$

i ostatecznie korzystając z (5), otrzymujemy

$$w_1 - w_2 = w_1\left[1 - \exp\left\{\varepsilon(w_1 - w_2)\tau(w_1,w_2)\right\}\right].$$

Korzystając następnie z oszacowania $|1 - e^s| \leqslant |s|e^{|s|}$, otrzymujemy

$$|w_1-w_2| = |w_1|\,\left|1-\exp\left\{\varepsilon(w_1-w_2)\tau(w_1,w_2)\right\}\right| \leqslant |w_1|\,|\varepsilon|\,|w_1-w_2|\,|\tau(w_1,w_2)| \cdot$$
$$\exp\left\{|\varepsilon|\,|w_1-w_2|\,|\tau(w_1,w_2)|\right\}$$

co jest niemożliwe ze względu na dowolność ε i ograniczoność funkcji $\tau(w_1,w_2)$. Tak więc funkcja $w^*(w)$ jest jednolistna w Δ. Z jednolistności tej funkcji wynika, że funkcja ta odwzorowuje brzeg koła jednostkowego na brzeg pewnego obszaru jednospójnego D^*. Wystarczy pokazać, że dla wystarczająco małych ε, D^* jest obszarem $f(U)$, gdzie $f \in S_1$. Aby to wykazać, wystarczy wykazać, że $D^* \cap D_1^* = \phi$, gdzie $D_1^* = \left\{w\colon \frac{1}{\bar{w}} \in D^*\right\}$. Przypuśćmy, że tak nie jest, tzn., że obszary D^* i D_1^* nie są rozłączne. Istnieją wówczas dwa punkty $w_1,w_2 \in U$ tak bliskie brzegu ∂U, że $w_1,w_2 \in \Delta\cap U$ i ponadto $w^*(w_1)\cdot\overline{w^*(w_2)} = 1$. Uwzględniając (4), otrzymujemy

$$w_1\cdot\bar{w}_2\exp\left\{\varepsilon(\Phi(w_1) + \overline{\Phi(w_2)})\right\} = 1. \tag{6}$$

Korzystając z (5), na mocy tego, że $w_1 \cdot \bar{w}_2 \neq 1$ dla $w_1, w_2 \in U$, dostajemy z (3) i (6)

$$w_1 - \frac{1}{\bar{w}_2} = w_1\left(1-\exp\left\{\varepsilon\left(w_1 - \frac{1}{\bar{w}_2}\right)\tau\left(w_1, \frac{1}{\bar{w}_2}\right)\right\}\right),$$

a stąd korzystając z cytowanego już powyżej oszacowania

$$\left|w_1 - \frac{1}{\bar{w}_2}\right| \leqslant |w_1|\,|\varepsilon|\left|w_1 - \frac{1}{\bar{w}_2}\right|\left|\tau\left(w_1, \frac{1}{\bar{w}_2}\right)\right| \exp\left\{\left|\varepsilon\left(w_1 - \frac{1}{\bar{w}_2}\right)\tau\left(w_1, \frac{1}{\bar{w}_2}\right)\right|\right\} .$$

Po podzieleniu obu stron przez $\left|w_1 - \frac{1}{\bar{w}_2}\right| \neq 0$, otrzymujemy

$$1 \leqslant |w_1|\,|\varepsilon|\left|\tau\left(w_1, \frac{1}{\bar{w}_2}\right)\right| \exp\left\{\left|\varepsilon\left(w_1 - \frac{1}{\bar{w}_2}\right)\tau\left(w_1, \frac{1}{\bar{w}_2}\right)\right|\right\} . \tag{7}$$

Ponieważ funkcja $\left|\tau\left(w_1, \frac{1}{\bar{w}_2}\right)\right|$ jest ograniczona w $\bar{\Delta} \times \bar{\Delta}$, $0, \infty \notin \bar{\Delta}$ oraz w_1, $\frac{1}{\bar{w}_2} \in \Delta$, wobec tego prawa strona nierówności (7) jest mniejsza od 1, jeżeli tylko $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, gdzie ε_0 nie zależy ani od w_1 ani od w_2. Otrzymujemy w ten sposób sprzeczność, co dowodzi, że obszary D^* i D_1^* są rozłączne, czyli twierdzenie jest dowiedzione.

Stosując twierdzenie 1 oraz opierając się na metodzie Gałuzina [2] s. 99-101, uzyskamy teraz wzory wariacyjne dla funkcji klasy S_1.

Niech $f(z) \in S_1$, $D = f(U)$, Δ obszarem takim, jak w twierdzeniu 1 i niech $P = \{z: r < |z| < 1\}$, gdzie $r > 0$, tak bliskie 1, aby $f(D) \subset \Delta$. Połóżmy

$$F(z,\varepsilon) = w^*(f(z)) \quad \text{dla} \quad z \in P.$$

$F(z,\varepsilon)$ jest funkcją holomorficzną zmiennych z, $\varepsilon \in P \times \mathbf{C}$ oraz dla każdego ε rzeczywistego takiego, że $|\varepsilon|$ jest dostatecznie mały jest funkcją jednolistną zmiennej $z \in P$. Rozwijając $F(z,\varepsilon)$ na szereg Maclourina ze względu na ε, otrzymujemy

$$F(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon f(z)\, \Phi(f'z)) + o(\varepsilon),$$

gdzie $o(\varepsilon)/\varepsilon \longrightarrow 0$ niemal jednostajnie w P.

Z twierdzenia Gołuzina [2] s. 99 wynika, że funkcja $f^*(z)$ odwzorowująca konforemnie U na D^*, $f^*(0) = 0$, jest postaci:

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon f(z)\, \Phi(f(z)) - \varepsilon z f'(z)\, S(z) + \varepsilon z f'(z)\, \overline{S\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} + o(\varepsilon), \tag{8}$$

gdzie $S(z)$ oznacza część główną rozwinięcia funkcji $\frac{f(z)\,\Phi(f(z))}{zf'(z)}$ na szereg Laurenta o środku w zerze w pierścieniu P, a $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ przy $\varepsilon \to 0$ niemal jednostajnie w U; jest to szukana wariacja funkcji $f(z)$.

Znajdziemy obecnie funkcję $\Phi(w)$ spełniającą warunek (3) i napiszemy wariację (8) generowaną przez tę funkcję.

Niech $w_0 \in D$ i $z_0 \in U$ takie, że $f(z_0) = w_0$. Niech α będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Połóżmy

$$\Phi(w) = \frac{e^{i\alpha}}{w-w_0} - \frac{e^{-i\alpha}w}{1-\bar{w}_0 w}. \tag{9}$$

Zauważmy, że $\frac{1}{\bar{w}_0} \notin \partial D$, ponieważ $w_0 \in D$, więc można wybrać obszar Δ w taki sposób, żeby funkcja $\Phi(w)$ była holomorficzna w $\bar{\Delta}$. Funkcja $\Phi(w)$ spełnia warunek (3). Aby otrzymać wariację (8) funkcji $f(z)$ generowaną przez funkcję (9), należy znaleźć funkcję $S(z)$, czyli część główną rozwinięcia Laurenta w zerze funkcji

$$\frac{f(z)}{zf'(z)}\left(\frac{e^{i\alpha}}{f(z)-f(z_0)} - \frac{e^{-i\alpha}f(z)}{1-\overline{f(z_0)}\,f(z)}\right).$$

Otrzymujemy, że

$$S(z) = \frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)}\,\frac{e^{i\alpha}}{z-z_0}.$$

Stąd oraz (8) otrzymujemy

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon\left(\frac{e^{i\alpha}f(z)}{f(z)-f(z_0)} - \frac{e^{-i\alpha}f^2(z)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)}\right) - \varepsilon e^{i\alpha}\frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)}\,\frac{zf'(z)}{z-z_0} +$$

$$+\ \varepsilon e^{-i\alpha}\frac{z^2 f'(z)}{1-\bar{z}_0 z}\,\overline{\left(\frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)}\right)} + o(\varepsilon). \tag{10}$$

W przypadku gdy $w_0 \notin \bar{D}$ i $\frac{1}{\bar{w}_0} \notin \bar{D}$, funkcja (9) jest holomorficzna i jednolistna w D, przekształca D na obszar D^*, który jest też obrazem funkcji z klasy S_1. Złożenie $w^*(f(z))$ daje od razu wariację funkcji $f(z)$:

$$f^*(z) = f(z) + \frac{f(z)}{f(z)-w_0}\,e^{i\alpha}\varepsilon - \varepsilon e^{-i\alpha}\frac{f^2(z)}{1-\bar{w}_0 f(z)} + o(\varepsilon). \tag{11}$$

Powyższe wyniki można wypowiedzieć w postaci następujących twierdzeń:

Twierdzenie 2

Niech $f(z) \in S_1$, α - dowolna liczba rzeczywista, $z_0 \in U$, dowolne. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ dostatecznie małego istnieje funkcja $f^*(z) \in S_1$ taka, że

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon e^{i\alpha} \frac{f(z)}{f(z)-f(z_0)} - \varepsilon e^{-i\alpha} \frac{f^2(z)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)} -$$

$$- \varepsilon e^{i\alpha} \frac{zf'(z)}{z-z_0} \frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)} + \varepsilon e^{-i\alpha} \frac{z^2 f'(z)}{1-\bar{z}_0 z} \cdot \overline{\frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)}} + o(\varepsilon),$$

gdzie $o(\varepsilon)/_\varepsilon \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$, niemal jednostajnie w U.

Twierdzenie 3

Niech $f(z) \in S_1$, α - dowolna liczba rzeczywista oraz w_0 takie, że $w_0 \notin \overline{f(U)}$ i $\frac{1}{\bar{w}_0} \notin \overline{f(U)}$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ dostatecznie małego istnieje funkcja $f^*(z) \in S_1$ taka, że

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon e^{i\alpha} \frac{f(z)}{f(z)-w_0} - \varepsilon e^{-i\alpha} \frac{f^2(z)}{1-\bar{w}_0 f(z)} + o(\varepsilon);$$

gdzie $o(\varepsilon)/_\varepsilon \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$, niemal jednostajnie w U.

Dla funkcji $f(z) \in S_1$ można tworzyć pewne elementarne wariacje oparte na odwzorowaniu U w U. Zauważmy, że jeśli $g(z)$ jest funkcją jednolistną w U, $g(0) = 0$, $g(U) \subset U$, wtedy z faktu, że $f(z) \in S_1$ wynika, że $f(g(z)) \in S_1$.

Kładąc po pierwsze $g(z) = e^{i\varepsilon} z$, ε - dowolna liczba rzeczywista, otrzymujemy wzór wariacyjny:

$$f^*(z) = f(e^{i\varepsilon} z) = f(z) + i\varepsilon z f'(z) + o(\varepsilon). \tag{12}$$

Kładąc następnie $g(z) = k_\alpha^{-1}((1-\varepsilon)\, k_\alpha(z))$, gdzie $k_\alpha(z) = \frac{z}{(1+e^{-i\alpha}z)^2}$, α - dowolna liczba rzeczywista, $\varepsilon > 0$, otrzymujemy drugi wzór wariacyjny:

$$f^*(z) = f(k_\alpha^{-1}((1-\varepsilon)k_\alpha(z))) = f(z) - \varepsilon z f'(z) \frac{e^{i\alpha}+z}{e^{i\alpha}-z} + o(\varepsilon). \tag{13}$$

RÓWNANIE TYPU SCHIFFERA

Niech $\phi(f)$ będzie funkcjonałem o wartościach zespolonych określonym i ciągłym w S_1. Niech $H(U)$ oznacza przestrzeń funkcji holomorficznych w U ze zbieżnością jednostajną w zbiorach zwartych, a $H'(U)$ przestrzeń do niej sprzężoną. Zakładamy, że $\phi(f)$ ma pochodną zespoloną w sensie Gâteaux w punkcie f, tzn. istnieje funkcjonał $\Lambda_f \in H'(U)$ taki, że

$$\phi(f^*) = \phi(f) + \varepsilon\Lambda_f(h) + o(\varepsilon), \tag{14}$$

gdzie $\varepsilon > 0$, f^* - dowolna wariacja funkcji rodziny S_1 taka, że

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon h(z) + o(\varepsilon), \quad h(z) \in H(U), \tag{15}$$

oraz $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$, niemal jednostajnie w U. Funkcjonał $\Lambda_f(h)$ nazywamy pochodną w sensie Gâteaux.

Połóżmy korzystając z oznaczeń wprowadzonych w [3] s. 12.

$$D(w) = \Lambda_f\left(\frac{wf}{f-w}\right), \quad E(\zeta) = \Lambda_f\left(\frac{\zeta z f'(z)}{z-\zeta}\right),$$

$$A(w) = D(w) + \overline{\Lambda_f(f)} + \overline{D\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)}, \tag{16}$$

$$B(\zeta) = E(\zeta) + \overline{\Lambda_f(z\,f'(z))} + \overline{E\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}.$$

Wzory na $D(w)$ i $E(\zeta)$ wymagają wyjaśnienia. A mianowicie, w przypadku gdy $w \in f(U)$, funkcja $wf/f-w$ ma biegun jednokrotny w pewnym punkcie z_0, takim, że $f(z_0) = w$, a więc nie należy do $H(U)$ i funkcjonał Λ_f dla takiej funkcji może być nieokreślony. Można jednak rozszerzyć w sposób ciągły funkcjonał Λ_f np. na wszystkie funkcje meromorficzne w U, posiadające jedynie biegun w ustalonym punkcie z_0, przy pomocy wzoru Caccioppoli-Köthego [1, 4] na ogólną postać funkcjonału liniowego z $H'(U)$. I tak wiadomo, że funkcjonał Λ_f da się wyrazić wzorem

$$\Lambda_f(h) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} h(z)Q(z)dz, \tag{17}$$

gdzie $Q(z)$ jest funkcją holomorficzną w zbiorze $\{z: |z| < r'\}$, $0 < r' < 1$, a r jest dowolną liczbą z przedziału $(r', 1)$. Jeżeli założymy dodatkowo, że $r > |z_0|$, to wzór (17) określa funkcjonał również dla funkcji $h(z)$ holomorficznej w U poza jednym punktem z_0.

Zauważmy, że

$$\frac{\bar{w}f^2(z)}{\bar{w}f(z)-1} = f(z) + \frac{f(z)}{\bar{w}f(z) - 1}$$

$$\Lambda_f\left(\frac{\bar{w}f^2(z)}{\bar{w}f(z)-1}\right) = \Lambda_f(f(z)) + D\left(\frac{1}{\bar{w}}\right),$$

$$\frac{\bar{\mathfrak{z}}z^2f'(z)}{\bar{\mathfrak{z}}z-1} = zf'(z) + \frac{zf'(z)}{\bar{\mathfrak{z}}(z - \frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}})}, \tag{18}$$

$$\Lambda_f\left(\frac{\bar{\mathfrak{z}}z^2f'(z)}{\bar{\mathfrak{z}}z-1}\right) = \Lambda_f(zf'(z)) + E\left(\frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}}\right).$$

Korzystając z oznaczeń (16) i (18), ze wzorów (14), (15) oraz ze wzorów wariacyjnych (10), (11), (12), (13), otrzymujemy pewne wzory wariacyjne dla funkcjonału re ϕ w punkcie f w rodzinie S_1. Mają one postać:

$$\mathrm{re}\,\phi(f^*) = \mathrm{re}\,\phi(f) + \varepsilon\,\mathrm{re}\left\{\frac{e^{i\alpha}}{f(z_0)}\left[A(f(z_0)) - \left(\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)}\right)^2 B(z_0)\right]\right\} + o(\varepsilon) \tag{19}$$

dla każdego $z_0 \in U$, α - dowolnej liczby rzeczywistej i $\varepsilon > 0$ dostatecznie małego;

$$\mathrm{re}\,\phi(f^*) = \mathrm{re}\,\phi(f) + \varepsilon\,\mathrm{re}\left\{\frac{e^{i\alpha}}{w_0} A(w_0)\right\} + o(\varepsilon), \tag{20}$$

dla każdego w_0 takiego, że $w_0 \notin \overline{f(U)}$ i $\frac{1}{\bar{w}_0} \notin \overline{f(U)}$, α - dowolnej liczby rzeczywistej oraz $\varepsilon > 0$, dostatecznie małego;

$$\mathrm{re}\,\phi(f^*) = \mathrm{re}\,\phi(f) + \varepsilon\,\mathrm{re}\; i\,\Lambda_f(zf'(z)) + o(\varepsilon), \tag{21}$$

dla ε dowolnego rzeczywistego, dostatecznie bliskiego 0;

$$\mathrm{re}\,\phi(f^*) = \mathrm{re}\,\phi(f) - \varepsilon\,\mathrm{re}\,\Lambda_f\left(z\,f'(z)\,\frac{e^{i\alpha}+z}{e^{i\alpha}-z}\right) + o(\varepsilon), \tag{22}$$

dla α - dowolnej liczby rzeczywistej i $\varepsilon > 0$ dostatecznie małego.

Możemy obecnie udowodnić następujące twierdzenie:

<u>Twierdzenie 4</u>

Niech $\phi(f)$ będzie funkcjonałem zespolonym, określonym i ciągłym na S_1, mającym w punkcie $f \in S_1$ pochodną zespoloną w sensie Gâteaux. Niech f realizuje maksimum lokalne funkcjonału $\mathrm{re}\,\phi(f)$ w rodzinie S_1.

Wtedy f spełnia następujące równanie:

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2 A(f(z)) = B(z), \quad z \in U, \tag{23}$$

gdzie $A(w)$ i $B(z)$ są zdefiniowane wzorami (16).
$\Lambda_f(zf'(z))$ jest rzeczywiste, $B(z)$ jest rzeczywiste i niedodatnie na $\partial U = \{z : |z| = 1\}$.

Dowód:

Fakt, że funkcja $f(z)$ spełnia równanie (23) wynika ze wzoru wariacyjnego (19), z dowolności α oraz z tego, że spełniona jest równość $\mathrm{re}\,\phi(f^*) \leq \mathrm{re}\,\phi(f)$. Własności $\Lambda_f(zf'(z))$ i $B(z)$ wynikają ze wzorów wariacyjnych (21) i (22), z nierówności wzmiankowanej wyżej i z faktu, że ε w (21) jest dowolną liczbą rzeczywistą a w (22) dowolną liczbą dodatnią.

Podamy teraz twierdzenie, które wynika ze wzoru wariacyjnego (20).

Twierdzenie 5

Niech ϕ oraz f spełnia założenia poprzedniego twierdzenia, $A(w)$ jest funkcją meromorficzną w $\mathbb{C}$ i $A(w) \not\equiv 0$. Jeżeli w_0 i $\frac{1}{\bar{w}_0}$ nie należą do obszaru $D = f(U)$, wtedy co najmniej jeden z tych punktów znanduje się na brzegu obszaru D.

Dowód:

Załóżmy nie wprost, że w_0 i $\frac{1}{\bar{w}_0} \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(U)}$. Korzystając ze wzoru wariacyjnego (20) oraz z dowolności α wnioskujemy, że istnieje otoczenie U_{w_0} punktu w_0, w którym $A(w) = 0$ dla każdego $w \in U_{w_0}$, czyli $A(w) \equiv 0$ w $\mathbb{C}$, co przeczy założeniu.

Wniosek 1

Przy założeniach twierdzenia 5 zbiór $\mathbb{C} \setminus (f(U) \cup h(U))$, gdzie $h(z) = \frac{1}{\overline{f(\bar{z})}}$ nie ma punktów wewnętrznych. Istotnie, gdyby w_0 był punktem wewnętrznym zbioru $\mathbb{C} \setminus (f(U) \cup h(U))$, to $\frac{1}{\bar{w}_0} \notin f(U)$, bo w przeciwnym razie w_0 należałoby do $h(U)$, a to jest niemożliwe. Na mocy twierdzenia 5 co najmniej jeden z tych punktów, tzn. w_0 lub $\frac{1}{\bar{w}_0}$ leżałoby na brzegu $f(U)$, co jest nieprawdą na mocy definicji w_0 jako punktu wewnętrznego zbioru $\mathbb{C} \setminus (f(U) \cup h(U))$.

Uwaga. Założenia twierdzenia 5 i wniosku 1 można osłabić, żądając jedynie, by $A(w)$ była meromorficzna i $A(w) \not\equiv 0$ w obszarze pokrywającym zbiór $\mathbb{C}\setminus(f(U)\cup h(U))$.

NIERÓWNOŚCI TYPU GRUNSKY'EGO DLA FUNKCJI KLASY S_1

Określimy w rodzinie S_1 funkcjonał:

$$I(f) = \mathrm{Re}\Big\{\lambda^2 \log f'(0) + 2\lambda L(\log \frac{f(z)}{z}) +$$

$$+ L^2(\log \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}) - |L|^2(\log(1 - f(z)\overline{f(\zeta)})\Big\}, \tag{24}$$

gdzie $L^2(\varphi(z,\zeta)) = L(L(\varphi(z,\zeta)))$, $|L|^2(\varphi(z,\bar{\zeta})) = L(\overline{L(\varphi(z,\bar{\zeta}))})$, $\varphi(z,\zeta)$ jest funkcją holomorficzną w $U\times U$, λ - dowolną liczbą rzeczywistą. Można zauważyć, korzystając ze wspomnianego już wzoru Caccioppoli-Köthego na ogólną postać funkcjonału z $H'(U)$, że $\psi(\zeta) = L(\varphi(z,\zeta)) \in H(U)$. Stwierdzamy, że funkcjonał (24) ma w dowolnym punkcie $f\in S_1$ zespoloną pochodną częstkową w sensie Gâteaux. Pochodną tą jest funkcjonał:

$$\Lambda_f(h) = \lambda^2 \frac{h'(0)}{f'(0)} + 2\lambda L(\frac{h(z)}{f(z)}) + L^2(\frac{h(z)-h(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}) +$$

$$+ \overline{|L|^2(\frac{h(z)\overline{f(\zeta)}}{1-f(z)\overline{f(\zeta)}})} + |L|^2(\frac{f(z)\overline{h(\zeta)}}{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}).$$

Połóżmy zgodnie z (16) $D(w) = \Lambda_f(\frac{wf}{f-w})$, a dalej $A(w) = D(w) + \overline{\Lambda_f(f)} + \overline{D(\frac{1}{\bar{w}})}$.

Po niezbyt skomplikowanych rachunkach otrzymujemy

$$A(w) = -\Big[\lambda - L(\frac{w}{f(z)-w}) + \overline{L(\frac{1}{1-\bar{w}f(z)})}\Big]^2.$$

Przypuśćmy teraz, że $f\in S_1$ jest funkcją, dla której funkcjonał (24) osiąga wartość największą w S_1. Wówczas na mocy twierdzenia 4 funkcja ta spełnia równanie różniczkowo-funkcyjne o postaci:

$$\Big(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\Big)^2 A(f(\zeta)) = B(\zeta), \tag{26}$$

gdzie $B(\zeta) = E(\zeta) + \overline{\Lambda_f(\zeta f'(\zeta))} + \overline{E(\frac{1}{\bar{\zeta}})}$, $E(\zeta) = \Lambda_f(\frac{\zeta z f'(z)}{z-\zeta})$.

Z postaci funkcji $B(\zeta)$ oraz ze wspomnianego już twierdzenia Cacciappoli-Köthego wynika, że funkcja ta jest holomorficzna co najmniej w pierścieniu $P = \left\{\zeta : r < |\zeta| < \frac{1}{r}\right\}$, $0 < r < 1$. Wiadomo ponadto, na podstawie twierdzenia 4, że funkcja $B(\zeta)$ jest niedodatnia dla $\zeta \in \partial U$. Wynika stąd, między innymi, że wszystkie pierwiastki funkcji $B(\zeta)$ położone na ∂U są parzystokrotne. Ze związku (26), który zachodzi między innymi w pierścieniu $P_1 = \left\{\zeta : r < |\zeta| < 1\right\}$, wynika, że funkcja $-\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)^2 A(f(\zeta))$ jest holomorficzna w tym pierścieniu i przedłuża się jako funkcja holomorficzna na pierścień P oraz jest nieujemna na ∂U. Na mocy (25) funkcja ta jest kwadratem funkcji

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\left(\lambda - L\left(\frac{f(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}\right) + \overline{L\left(\frac{1}{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}\right)}\right), \tag{27}$$

która jest także funkcją holomorficzną w pierścieniu P_1, a więc na mocy (26) w tym samym pierścieniu jest ona gałęzią pierwiastka z-$B(\zeta)$; połóżmy

$$B^*(\zeta) = \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\left(\lambda - L\left(\frac{f(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}\right) + \overline{L\left(\frac{1}{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}\right)}\right).$$

Funkcja $B^*(\zeta)$ przedłuża się z pierścienia P_1 jako funkcja ciągła, a nawet holomorficzna, na pierścień $\left\{\zeta : r < |\zeta| \leqslant 1\right\}$. Istotnie, jeżeli $\zeta^* \in \partial U$ i $B(\zeta^*) \neq 0$, to w pewnym otoczeniu punktu ζ^* istnieją dwie jednoznaczne gałęzie pierwiastka kwadratowego z-$B(\zeta)$ i jedna z nich musi pokrywać się w części wspólnej koła U i tego otoczenia punktu ζ^* z $B^*(\zeta)$. Jeżeli natomiast $B(\zeta^*) = 0$, to, ze względu na wspomnianą już parzystokrotność tego pierwiastka, musi być $B(\zeta) = (\zeta-\zeta^*)^{2k}\,\widetilde{B}(\zeta)$ w pewnym otoczeniu punktu ζ^*, przy czym $\widetilde{B}(\zeta^*) \neq 0$. W pewnym otoczeniu punktu ζ^* istnieją zatem znowu dwie jednoznaczne gałęzie pierwiastka kwadratowego z - $B(\zeta)$ i jedna z nich w części wspólnej tego otoczenia i koła U pokrywa się z $B^*(\zeta)$. Ponadto tak przedłużona funkcja $B^*(\zeta)$ jest rzeczywista na okręgu ∂U.

Weźmy teraz pod uwagę funkcję $G(\zeta) = L\left(\frac{\zeta}{z-\zeta}\right) - \overline{L\left(\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}\right)}$, jest ona holomorficzna w pierścieniu P i rzeczywista na okręgu ∂U. Funkcja

$$B^*(\zeta) + G(\zeta) = \lambda\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} - L\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,\frac{f(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)} + \frac{\zeta}{z-\zeta}\right) +$$

$$+ \overline{L\left(\overline{\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}}\,\frac{1}{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}\right)} - \overline{L\left(\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}\right)}$$

jest holomorficzna w kole U i przedłuża się w sposób ciągły na koło domknięte $\bar{U}$, pozostając rzeczywista na ∂U. Stosując zasadę odbicia Schwarza, dochodzimy do wniosku, że funkcja $B^*(\zeta) + G(\zeta)$ przedłuża się jako funkcja holomorficzna na płaszczyznę domkniętą $\overline{\mathbb{C}}$, a więc jest funkcją stałą, a ponieważ $B^{*}(0) + G(0) = \lambda$, otrzymujemy następujący związek

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\left(\lambda - L\left(\frac{f(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}\right) + \overline{L\left(\frac{1}{1-f(z)\overline{f(\zeta)}}\right)}\right) =$$

$$= \lambda - L\left(\frac{\zeta}{z-\zeta}\right) + \overline{L\left(\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}\right)}. \tag{28}$$

Zauważmy, że zachodzą tożsamości

$$\begin{aligned}
&\lambda \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} - \lambda = \lambda\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta} \log \frac{f(\zeta)}{\zeta}\\
&\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,\frac{f(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)} - \frac{\zeta}{z-\zeta} = -\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta} \log \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\\
&\frac{\bar{\zeta}\overline{f'(\zeta)}}{\overline{f(\zeta)}}\,\frac{1}{1-f(z)\overline{f(\zeta)}} = \frac{\bar{\zeta}\overline{f'(\zeta)}}{\overline{f(\zeta)}} - \bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} \log(1 - f(z)\overline{f(\zeta)})\\
&\frac{1}{1-\bar{\zeta}z} = 1 - \bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} \log(1 - \bar{\zeta}z).
\end{aligned} \tag{29}$$

Wprowadzając (29) do (28), biorąc pod uwagę, że ze względu na liniowość i ciągłość funkcjonału L, $L(\frac{\partial}{\partial\zeta}\varphi(z,\zeta)) = \frac{\partial}{\partial\zeta}L(\varphi(z,\zeta))$ oraz całkując tak otrzymane związki względem ζ, otrzymujemy

$$\lambda\log\frac{f(\zeta)}{\zeta} + L\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) - \overline{L(\log(1 - f(z)\overline{f(\zeta)}))} + \overline{L(\log(1-\bar{\zeta}z))} = C, \tag{30}$$

gdzie

$$C = \lambda\log f'(0) + L\left(\log\frac{f(z)}{z}\right). \tag{31}$$

Udowodnimy, że

$$\mathrm{Re}\, C = 0. \tag{32}$$

W tym celu wystarczy wykazać, że $\mathrm{Re}\, C = -\mathrm{Re}\, \bar{C}$. Najpierw wykażemy, że brzegi obszarów $f(U)$ i $h(U)$ nie mogą być rozłączne. Przypuśćmy, że $\partial f(U) \cap \partial h(U) = \emptyset$. Wobec tego, że ponadto $f(U) \cap h(U) = \emptyset$ otrzymamy $\overline{f(U)} \cap \overline{h(U)} = \emptyset$. Zbiór $\mathbb{C} \setminus (\overline{f(U)} \cup \overline{h(U)}) \subset \mathbb{C} \setminus (f(U) \cup h(U))$, ale zbiór $\mathbb{C} \setminus (f(U) \cup h(U))$ nie ma punktów wewnętrznych (patrz wniosek 1 z twierdzenia 5), czyli zbiór $\mathbb{C} \setminus (\overline{f(U)} \cup \overline{h(U)})$ też nie ma punktów wewnętrznych, a więc jako zbiór otwarty jest pusty. Wobec tego $\mathbb{C} = \overline{f(U)} \cup \overline{h(U)}$ a to jest sprzeczne ze spójnością $\mathbb{C}$, czyli $\partial f(U)$ i $\partial h(U)$ muszą mieć punkt wspólny. Niech $w^* \in \partial f(U) \cap \partial h(U)$. Istnieją zatem takie dwa ciągi punktów $\zeta'_n, \zeta''_n \in U$, $n = 1,2,\dots$, że $f(\zeta'_n) \to w^* \leftarrow h(\zeta''_n) = \frac{1}{\overline{f(\bar\zeta''_n)}}$, $\zeta'_n \to \zeta')$, $\zeta''_n \to \zeta''$, $\zeta', \zeta'' \in \partial h(U)$. Wstawiając do (30) najpierw $\zeta = \zeta'_n$ a następnie $\zeta = \zeta''_n$ i przechodząc do granicy przy $n \to \infty$, otrzymujemy:

$$\lambda \log \frac{w^*}{\zeta'} + L\left(\log \frac{f(z)-w^*}{z-\zeta'}\right) - \overline{L(\log(1 - f(z)\bar{w}^*))} + \overline{L(\log(1-\bar\zeta' z))} = C$$

$$\lambda \log \frac{1}{\bar{w}^* \zeta''} - L\left(\log \frac{1-\bar{w}^* f(z)}{\bar{w}^*(z-\zeta'')}\right) - \overline{L\left(\log\left(1 - \frac{1}{\bar{w}^*} f(z)\right)\right)} = \overline{L(\log(1 - \bar\zeta'' z))} = C$$

a stąd już widać, że zachodzi (32).

Z (32) oraz z (31) wynika równość

$$\mathrm{Re}\left\{\lambda \log f'(0) + L\left(\log \frac{f(z)}{z}\right)\right\} = 0. \tag{33}$$

Ze związku (30) otrzymujemy dalej

$$\lambda L\left(\log \frac{f(\zeta)}{\zeta}\right) + L^2\left(\log \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) - |L|^2(\log(1-\overline{f(\zeta)}f(z))) + |L|^2(\log(1-\bar\zeta z)) = 0. \tag{34}$$

Dodając do siebie stronami równość otrzymaną przez wzięcie części rzeczywistych obu stron (34) oraz równość (33) pomnożoną przez λ, otrzymujemy wartość funkcjonału (24) dla funkcji maksymalnej f:

$$I(f) = -|L|^2(\log(1 - \bar\zeta z)).$$

Otrzymane wyniki możemy ująć w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 6

Jeżeli f jest funkcją maksymalną dla funkcjonału (24), to funkcja ta spełnia związek:

$$\lambda \log \frac{f(\zeta)}{\zeta} + L\left(\log \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) - \overline{L(\log(1 - \overline{f(\zeta)} f(z)))} +$$

$$+ \overline{L(\log(1 - \bar\zeta z))} = \lambda \log f'(0) + L\left(\log \frac{f(z)}{z}\right),$$

a wartość funkcjonału (24) dla niej wynosi

$$\mathrm{Re}\, I(f) = I(f) = -|L|^2(\log(1 - \bar\zeta z)). \tag{36}$$

Zastanówmy się nad warunkami, przy których można twierdzić, że funkcjonał (24) osiąga w rodzinie S_1 maksimum.

Zauważmy najpierw, że funkcjonał (24) jest w zbiorze S_1 ograniczony z góry. Wynika to z całkowego przedstawienia funkcjonału z $H'(U)$, ze znanych oszacowań w klasie S (S - klasa funkcji holomorficznych i jednolistnych w U, znormalizowanych warunkiem $f(0) = f'(0) - 1 = 0$) wyrażeń $|\tilde{f}(z)|$, $\left|\log \frac{\tilde{f}(z)-\tilde{f}(\zeta)}{z-\zeta}\right|$ [4], z tego, że $|f'(0)| \leqslant 1$, a ponadto ponieważ przy stałym $\zeta \neq 0$, $\zeta \in U$ funkcja $-\frac{1}{\overline{f(\zeta)}f'(0)}\log(1-\overline{f(\zeta)}f(z)) \in S$, więc na mocy twierdzenia o zniekształceniu stosowanego dwukrotnie oraz wspomnianej już nierówności $|f'(0)| \leqslant 1$ dla $f \in S_1$ mamy

$$\left|\log(1-\overline{f(\zeta)}f(z))\right| \leqslant \frac{|z|\,|\zeta|}{(1-|z|)^2(1-|\zeta|)^2}.$$

Przypuśćmy najpierw, że $\lambda \neq 0$. Niech $M = \sup \operatorname{Re} I(f)$. Istnieje zatem ciąg funkcji $f_n \in S_1$ taki, że $\operatorname{Re} I(f_n) \to M$. Rodzina S_1 jest normalna, a więc można przyjąć, że ciąg $\{f_n\}$ jest ciągiem niemal jednostajnie zbieżnym. Jeżeli $f_n \to f \in S_1$, to $\operatorname{Re} I(f) = M$, a więc f jest funkcją realizującą maksimum funkcjonału (24) w S_1. Jeżeli natomiast $f_n \to 0$, to f_n można przedstawić w postaci $f_n = b_n \tilde{f}_n$, gdzie $\tilde{f}_n \in S$, $b_n \to 0$, oraz można przyjąć, ze względu na zwartość rodziny S, że $\tilde{f}_n \to f \in S$. Ale wtedy $\operatorname{Re} I(f_n) \to -\infty$, co oczywiście jest niemożliwe, bo istnieją funkcje, dla których wartość funkcjonału (24) jest większa od $-\infty$. Zatem w przypadku $\lambda \neq 0$ funkcjonał (24) osiąga w rodzinie S_1 maksimum, które równa się prawej stronie wzoru (35).

Wynik ten możemy ująć w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 7

Jeżeli $\lambda \neq 0$ jest liczbą rzeczywistą, to dla każdej funkcji $f \in S_1$ zachodzi nierówność:

$$\operatorname{Re}\left\{\lambda^2 \log f'(0) + 2\lambda L\left(\log\frac{f(z)}{z}\right) + L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) - |L|^2\left(\log(1-f(z)\overline{f(\zeta)})\right)\right\} \leqslant -|L|^2(\log(1-\bar{\zeta}z)). \qquad (37)$$

Nierówność ta jest dokładna, a nawet istnieje funkcja $f \in S_1$, dla której zachodzi znak równości. Ponadto każda taka funkcja spełnia związek (35).

Jeżeli $\lambda = 0$, to oczywiście również zachodzi nierówność (37). Co więcej, nierówność ta jest dokładna, chociaż nie wiadomo czy w rodzinie S_1 istnieje funkcja realizująca znak równości. Celem udowodnienia powyższego zauważmy, że dla każdej funkcji $\tilde{f} \in S$ zachodzi nierówność

$$\operatorname{Re}\left\{L^2\left(\log \frac{\widetilde{f}(z)-\widetilde{f}(\zeta)}{z-\zeta}\right)\right\} \leqslant -|L|^2(\log(1-\bar{\zeta}z)) \tag{38}$$

[5] s. 116. Wniosek 11.4 i że istnieje funkcja klasy S, dla której w tej nierówności zachodzi znak równości. Zauważmy następnie, że dla każdej funkcji ograniczonej $\hat{f}\in S$ istnieje takie b_0, że jeśli $|b|<b_0$, to $b\hat{f}\in S_1$ i $\operatorname{Re} I(b\hat{f})$ jest dowolnie bliski lewej stronie nierówności (38) dla dostatecznie małego b. Jeżeli teraz $\widetilde{f}\in S$ jest funkcją realizującą równość w nierówności (38), to można ją najpierw aproksymować funkcję ograniczoną $\hat{f}(z)=\frac{1}{\rho}\widetilde{f}(\rho z)$, gdzie $0<\rho<1$, ρ dostatecznie bliskie 1, a następnie tę ostatnią zastąpić funkcję $b\hat{f}$ przy b dostatecznie bliskim 0. Wartość funkcjonału (24) dla tej funkcji będzie dowolnie bliska prawej stronie nierówności (38), skąd widać, że nierówności tej poprawić się nie da.

Możemy więc sformułować twierdzenie.

Twierdzenie 8

Dla każdej funkcji $f\in S_1$ zachodzi nierówność

$$\operatorname{Re}\left\{L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)-|L|^2\left(\log\left(1-f(z)\overline{f(\zeta)}\right)\right)\right\}\leqslant -|L|^2(\log(1-\bar{\zeta}z)). \tag{39}$$

Nierówność ta jest dokładna.

Jeśli rozpatrzymy funkcjonał:

$$I(f)=\operatorname{Re}\left\{L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)+|L|^2\left(\log\left(1-f(z)\overline{f(\zeta)}\right)\right)\right\}$$

i postępimy analogicznie jak w przypadku funkcjonału (24), to otrzymamy twierdzenie.

Twierdzenie 9

Dla każdej funkcji $f\in S_1$ zachodzi nierówność

$$\operatorname{Re}\left\{L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)+|L|^2\left(\log\left(1-f(z)\overline{f(\zeta)}\right)\right)\right\}\leqslant -|L|^2(\log(1-\bar{\zeta}z)).$$

Nierówność ta jest dokładna w takim sensie jak w twierdzeniu 7.

Uwaga: Zauważmy, że jeśli $L\in H'(U)$, to $iL\in H'(U)$, zatem kładąc w nierówności (39) iL zamiast L otrzymamy nierówność

$$-\mathrm{Re}\left\{L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) - |L|^2\left(\log 1-f(z)\overline{f(\zeta)}\right)\right\} \leqslant - |L|^2(\log(1 - \overline{\zeta}z)).$$

Korzystając z tej nierówności oraz z nierówności z twierdzenia 9, otrzymujemy nierówność

$$\left| L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) - |L|^2(\log(1-f(z)\overline{f(\zeta)}))\right| \leqslant - |L|^2(\log(1 - \overline{\zeta}z)).$$

Zastosujemy teraz powyższe twierdzenia do oszacowania pewnych funkcjonałów w rodzinie S_1.

1. Połóżmy $L(h) = \sum_{m=1}^{N}\lambda_m(h(z_m) - h(0))$, gdzie $h \in H(U)$ λ_m, $m=1,\dots,N$ - dowolne liczby zespolone, z_m, $m = 1,\dots,N$ dowolne punkty koła U. Jest oczywiście $L(1) = 0$. Niech $\lambda \neq 0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Z twierdzenia 7 wynika, że dla dowolnej funkcji $f \in S_1$ zachodzi nierówność

$$\mathrm{Re}\left\{(\lambda - \sum_{m=1}^{N}\lambda_m)^2 \log f'(0) + \sum_{n,m=1}^{N}\lambda_n\lambda_m \log\left(\frac{z_m z_n}{f(z_m)f(z_n)}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{f(z_m)-f(z_n)}{z_m-z_n}\right) + 2\lambda\sum_{m=1}^{N}\lambda_m\log\frac{f(z_m)}{z_m} - \sum_{n,m=1}^{N}\lambda_n\overline{\lambda}_m\log(1-f(z_n)\overline{f(z_m)})\right\} \leqslant$$

$$\leqslant - \sum_{n,m=1}^{N}\lambda_n\overline{\lambda}_m\log(1 - z_n\overline{z}_m). \tag{40}$$

W przypadku gdy $m = n$ przyjmujemy jako wartość ilorazu $\frac{f(z_m)-f(z_n)}{z_m-z_n}$ wartość $f'(z_m)$. Nierówność ta jest dokładna, istnieje funkcja $f \in S_1$, która realizuje znak równości. Dla funkcji tej zachodzi związek

$$-\sum_{m=1}^{N}\lambda_m \log\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(0)} + \sum_{m=1}^{N}\lambda_m \log\left(\frac{z_m}{f(z_m)}\,\frac{f(z_m)-f(\zeta_n)}{z_m-\zeta_n}\right) -$$

$$-\sum_{m=1}^{N}\overline{\lambda}_m \log(1 - f(\zeta)\overline{f(z_m)}) = - \sum_{m=1}^{N}\overline{\lambda}_m \log(1 - \zeta\overline{z}_m).$$

W szczególnym przypadku zakładając, że $\operatorname{Im} \sum_{m=1}^{N} \lambda_m = 0$, można przyjąć $\lambda = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m$. Nierówność (40) przyjmie wówczas postać

$$\operatorname{Re}\left[\sum_{n,m=1}^{N} \left(\lambda_n \lambda_m \log \frac{f(z_m)-f(z_n)}{z_m-z_n} - \lambda_n \bar{\lambda}_m \log(1-f(z_n)\overline{f(z_m)})\right)\right] \leq -\sum_{n,m=1}^{N} \lambda_n \bar{\lambda}_m \log(1 - z_n \bar{z}_m). \tag{41}$$

Jest ona dokładna, a funkcja ekstremalna spełnia związek:

$$\sum_{m=1}^{N} \lambda_m \log\left(\frac{z_m}{f(z_m)} \cdot \frac{f(z_m)-f(\zeta)}{z_m-\zeta}\right) - \sum_{m=1}^{N} \bar{\lambda}_m \log(1 - f(\zeta)\overline{f(z_m)}) =$$

$$= -\sum_{m=1}^{N} \bar{\lambda}_m \log(1 - \zeta \bar{z}_m).$$

Nierówność (41) jest analogiczna do nierówności Gołuzina dla klasy S [2] s. 120.

Kładąc w szczególności w (41) $N = 1$, $\lambda_1 = 1$, $z_1 = z$, otrzymujemy znaną nierówność, a mianowicie

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2},$$

która jest w rodzinie S_1 dokładną nierównością, a funkcja ekstremalna $f(u)$ spełnia związek

$$\frac{1}{f(z)} \frac{f(z)-f(u)}{1-\overline{f(z)}f(u)} = \frac{1}{z} \frac{z-u}{1-u\bar{z}}.$$

2. Połóżmy teraz w (37) $L(h) = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m h'(z_m)$, λ_m - dowolne liczby zespolone, z_m - dowolne punkty koła U oraz $\lambda \neq 0$ rzeczywiste. Po przeliczeniu otrzymujemy nierówność

$$\operatorname{Re}\left\{\lambda^2 \log f'(0) + 2\lambda \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \left(\frac{f'(z_m)}{f(z_m)} - \frac{1}{z_m}\right) + \right.$$

$$+ \sum_{n,m=1}^{N} \lambda_n \lambda_m \left(\frac{f'(z_m) f'(z_n)}{(f(z_m)-f(z_n))^2} - \frac{1}{(z_m-z_n)^2}\right) +$$

$$+\sum_{n,m=1}^{N}\lambda_n\bar{\lambda}_m\frac{\overline{f'(z_m)}f'(z_n)}{(1-f(z_n)\overline{f(z_m)})^2}\Bigg\}\leqslant\sum_{n,m=1}^{N}\lambda_n\bar{\lambda}_m\frac{1}{(1-z_n\bar{z}_m)^2},\tag{42}$$

przy czym w przypadku $m = n$ przyjmujemy

$$\frac{f'(z_m)f'(z_n)}{(f(z_m)-f(z_n))^2}-\frac{1}{(z_m-z_n)^2}=\lim_{z\to z_m}\left(\frac{f'(z_m)f'(z)}{(f(z_m)-f(z))^2}-\frac{1}{(z_m-z)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{d}{dz}\frac{f''(z)}{f'(z)}\bigg|_{z=z_m}-\frac{1}{2}\left(\frac{f''(z_m)}{f'(z_m)}\right)^2\right]=\frac{1}{6}\Big\{f(z_m),\ z_m\Big\},\tag{43}$$

gdzie $\Big\{f(z),\ z\Big\}$ oznacza operator Schwarza w punkcie z.

Nierówność (42) jest dokładna i funkcja ekstremalna spełnia równanie funkcyjne:

$$\lambda\log\frac{f(\zeta)}{\zeta}+\sum_{m=1}^{N}\lambda_m\left(\frac{f'(z_m)}{f(z_m)-f(\zeta)}-\frac{1}{z_m-\zeta}\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{N}\bar{\lambda}_m\frac{f(\zeta)\overline{f'(z_m)}}{1-\overline{f(z_m)}f(\zeta)}+\sum_{m=1}^{N}\bar{\lambda}_m\frac{1}{1-\bar{z}_m\zeta}=$$

$$=\lambda\log f'(0)+\sum_{m=1}^{N}\lambda_m\left(\frac{f'(z_m)}{f(z_m)}-\frac{1}{z_m}\right).\tag{44}$$

Przyjmując w (42) w szczególności $N = 1$, $z_1 = z$, z uwagi na (43), otrzymujemy nierówność:

$$\mathrm{Re}\left\{\lambda^2\log f'(0)+2\lambda\lambda_1\left(\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{1}{z}\right)+\lambda_1^2\frac{1}{6}\Big\{f(z),\ z\Big\}+\right.$$

$$\left.+|\lambda_1|^2\frac{|f'(z)|^2}{(1-|f(z)|^2)^2}\right\}\leqslant|\lambda_1|^2\frac{1}{(1-|z|^2)^2},$$

która jest nierównością dokładną, a funkcja realizująca znak równości spełnia związek (44), w którym dokonano odpowiednich podstawień.

W przypadku $\lambda = 0$ na mocy twierdzenia 8 i twierdzenia 9 zachodzi nierówność:

$$\mathrm{Re}\left\{\lambda_1^2\Big\{f(z),\ z\Big\}+6|\lambda_1|^2\frac{|f'(z)|^2}{(1-|f(z)|^2)^2}\right\}\leqslant 6|\lambda_1|^2\frac{1}{(1-|z|^2)^2}.$$

a nawet ze względu na dowolność λ_1, mamy

$$\left\{f(z), z\right\} \leqslant \frac{6}{(1-|z|^2)^2} - \frac{6\,|f'(z)|^2}{(1-|f(z)|^2)^2}$$

Nierówność ta jest również dokładna.

3. Niech $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych takim, że

$$\lim_{n\to\infty} \sup|\lambda_n|^{\frac{1}{n}} < 1, \tag{45}$$

a - dowolną liczbą rzeczywistą. Na mocy twierdzenia Töplitza [6], istnieje funkcjonał $L \in H'(U)$ taki, że $L(z^n) = \lambda_n$, $n = 1,\dots, L(1) = 0$. Przyjmując oznaczenia

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}(f) z^m \zeta^n = \log \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}$$

$$\sum_{m,n=1} b_{mn}(f,\bar{f}) z^m \zeta^n = \log(1 - \overline{f(\zeta)} f(z)),$$

wnioskujemy z twierdzenia 7 i twierdzenia 8, że dla każdej funkcji $f \in S_1$ zachodzi nierówność:

$$\mathrm{Re}\left\{\lambda^2 \log f'(0) + 2\lambda \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_{mo}(f) + \right.$$

$$\left. + \sum_{m,n=1}^{\infty} \lambda_m \lambda_n a_{mn}(f) - \sum_{m,n=1}^{\infty} \lambda_m \bar{\lambda}_n b_{mn}(f,\bar{f})\right\} \leqslant \sum_{m=1} \frac{|\lambda_m|^2}{m}. \tag{46}$$

Nierówność ta jest dokładna, a w przypadku gdy $\lambda \neq 0$ istnieje nawet funkcja f realizująca równość. Dla funkcji tej spełnione są związki

$$\lambda a_{no}(f) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_n a_{mn}(f) - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\lambda}_m b_{mn}(f,\bar{f}) = \frac{1}{n} \bar{\lambda}_n, \qquad n = 1,\dots.$$

oraz

$$\mathrm{Re}\left\{\lambda \log f'(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_{mo}(f)\right\} = 0.$$

Nierówność (46) jest odpowiednikiem nierówności Grunsky'ego dla funkcji klasy S_1.

Zauważmy na koniec, że spełnienie nierówności (46) dla każdego ciągu $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ spełniającego warunek (45) oraz dla każdego rzeczywistego λ jest równoważne spełnieniu nierówności (37) dla każdego funkcjonału $L \in H'(U)$, $L(1) = 0$ i dla każdego rzeczywistego λ. Wynika to także z twierdzenia Töplitza o ogólnej postaci funkcjonału z $H'(U)$. Nierówność (37) mimo pozorów nie jest więc mocniejsza od nierówności (46) i dlatego można ją nazwać również nierównością Grunsky'ego dla funkcji klasy S_1.

LITERATURA

[1] Caccioppoli R.: Sui funzionali lineari nel campo delle funzioni analitiche, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fiz. Mat. Natur. 13 (1931), s. 263-266.

[2] Голузин Г.М.: Геометрическая теория функции комплексного переменного, Москва 1966, s. 98-109, 120.

[3] Hummel J.A., Schiffer M.M.: Variational methods for Bieberbach-Eilenberg functions and for pairs, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A., I. Math. 3 (1977), s. 3-42.

[4] Kothe G.: Topological Vector Spaces I, Grundlehren math. Wiss. 159, Springer-Verlag, New York, (1969).

[5] Schober G.: Univalent functions - Selected Topics, Lecture Notes in Mathematics 478, Springer-Verlag (1975).

[6] Toplitz O.: Die linearen vollkommenen Raume der Funktionstheorie, Comment. Math. Helv, 23.

Recenzent: doc. dr hab. Janina Śladkowska-Zaharska

Wpłynęło, 23.XI.1983 r.

ВАРИАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Р е з ю м е

В настоящей работе рассматривается класс S_1 голломорфных и однолистных функций в единичном круге U вида $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ которые выполняют условия $|f(z)| < 1$, $f'(0) > 0$.

После введения вариаций для функций этого класса они применяются к оценке значений некаторых функционалов, определённых в S_1.

VARIATIONAL METHODS FOR A CLASS OF UNIVALENT FUNCTIONS AND THEIR APPLICATION

S u m m a r y

In the paper the class S_1 of analytic and univalent in the unit disc U functions in the form $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ $|f(z)| < 1$ for all z U and $f'(0) > 0$ is considered. Estimations of some functionals defined in S_1 are found using variations of the functions from this class.