ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 43 Nr kol. 795

Lucjan MERES

O PEWNEJ RODZINIE FUNKCJI KLASY C^{∞} W PRZESTRZENI EUKLIDESA E^{m}

Streszczenie. W pracy pokazano konstrukcję rodziny funkcji $F(x_1, \ldots, x_m)$ należących do $C^{\infty}(E^m)$, z których każda jest holomorficzna poza danym z góry zbiorem domkniętym $P \subset E^m$. Funkcje tej rodziny zależą od nieskończonego ciągu parametrów rzeczywistych. Odpowiedni dobór tych parametrów pozwala z tej rodziny wybierać funkcje o pewnych dodatkowych własnościach specjalnych. Można np. tak dobrać wspomniany ciąg parametrów, by wybrana funkcja miała w każdym punkcie zbioru P osobliwość Pringsheima.

Celem tej pracy jest pokazanie konstrukcji pewnej rodziny funkcji, z których każda jest klasy C^{∞} w E^m i każda jest holomorficzna poza danym z góry zbiorem domkniętym $P \subset E^m$. Ponadto, funkcja tej rodziny zależą od nieskończonego ciągu parametrów rzeczywistych, których odpowiedni dobór pozwala uzyskiwać funkcje o specjalnych własnościach.

1. Niech

$$v(t) = (B/\sqrt{\pi})(\exp(-B^2(t+L)^2-\exp(-B^2(t-L)^2), \quad t \in R, \ B, \ L - \text{stała dodatnie} \tag{1}$$

Funkcja $v(t)$ traktowana jako funkcja zmiennej zespolonej $t = x+i\xi$, i - jednostka urojona, jest funkcją całkowitą. Z twierdzenia całkowego Cauchy'go wynika, że całka

$$\int_{-\infty}^{z} v(t)dt \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{c} v(t)dt + \int_{c}^{z} v(t)dt, \quad z = x+i\xi, \ c - \text{liczba rzeczywista} \tag{2}$$

nie zależy ani od wyboru liczby c na osi rzeczywistej, ani od drogi łączącej punkt $(c,0)$ z punktem z. W dalszym ciągu przyjmujemy drogę całkowania najwygodniejszą, tzn. przyjmujemy

$$\int_{-\infty}^{z} v(t)dt = \int_{-\infty}^{x+i\xi} v(t)dt = \int_{-\infty}^{x} v(t)dt + \int_{x}^{x+i\xi} v(t)dt, \tag{3}$$

ostatnia całka obliczana jest po odcinku. Zbieżność pierwszej całki (rzeczywistej w granicach rzeczywistych) jest widoczna, istnienie drugiej też. Oznaczmy ponadto

$$U(x) = U(x,B,L) = \int_{-\infty}^{x} v(t)dt, \quad x \in R. \tag{4}$$

Zgodnie z (3) mamy

$$U(x+i\xi,B,L) = U(x,B,L) + \int_{x}^{x+i\xi} v(t)dt. \tag{5}$$

Niech l,h będą liczbami dodatnimi. Połóżmy $L = l+h$. Wiadomo [1], że

$$0 < U(x,B,L) < 1 \quad \text{dla każdego} \quad x \in R, \tag{6}$$

$$U(x,B,L) < (1/2Bh\sqrt{\pi})\exp(-B^2(x-L)^2) \quad \text{dla} \quad x \geqslant L+h, \tag{7}$$

$$U(x,B,L) < (1/2Bh\sqrt{\pi})\exp(-B^2(x+L)^2) \quad \text{dla} \quad x \leqslant -L-h, \tag{8}$$

$$U(x,B,L) \geqslant 1 - (2/Bh\sqrt{\pi})\exp(-B^2h^2) \quad \text{dla} \quad x \in \langle -L+h, L-h\rangle, \tag{9}$$

$$|U(x+i\xi,B,L)| \leqslant U(x,B,L) + (1/\sqrt{\pi})(\exp(-B^2(x+L)^2) + \exp(-B^2(x-L)^2))\exp(B^2\xi^2) \tag{10}$$

dla wszelkich rzeczywistych x, ξ.

W przestrzeni E^m weźmy pod uwagę m wymiarową kostkę domkniętą K o krawędziach długości $2l$, równoległych do osi współrzędnych. Niech punkt $(a_1,\ldots,a_m)$ będzie środkiem tej kostki. Weźmy następnie pod uwagę kostkę domkniętą K' współśrodkową z K i krawędziach długości $2L + 2h = 2l+4h$, równoległych do osi współrzędnych. Rozważmy związaną z kostką K funkcję

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m) = f(x_1,\ldots,x_m,a_1,\ldots,a_m,B,L,M,C,r) =$$

$$= \frac{M^m}{C^{4mr}} \prod_{j=1}^{m} (U(x_j-a_j,B,L)\cos C(x_j-a_j)), \tag{11}$$

gdzie r jest liczbą naturalną, C,M,B,L są stałymi dodatnimi. Niech d będzie liczbą dodatnią, $\varrho((x_1,\ldots,x_m),K')$ niech będzie odległością punktu $(x_1,\ldots,x_m)$ od kostki K'.

Lemat 1

Jeżeli

(i) $2Bh\sqrt{\pi} \geq 1$,

(ii) $(2l+3h)^2 \leq 0,1d^2/m-1$

(iii) $|\xi_j| < 0,01d/\sqrt{m}$, $j = 1,2,\dots,m$.

(iiii) $\rho((x_1,\dots,x_m),K') \geq \frac{4}{5}d$,

to dla funkcji określonej wzorem (11) ma miejsce nierówność

$$|f(x_1+i\xi_1,\dots,x_m+i\xi_m)| < 3.2^m \frac{M^m}{C^{4mr}} \exp(-0,62B^2d^2 + 0,01\sqrt{m}d). \tag{12}$$

Dowód:

Ze wzoru Eulera, $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, wynika, że dla każdego $j = 1,\dots,m$, jest

$$|\cos C(x_j-a_j+i\xi_j)| = \frac{1}{2}|e^{iC(x_j-a_j)-C\xi_j}+e^{-C(x_j-a_j)+C\xi_j}| \leq \frac{1}{2}(e^{-C\xi_j}+e^{C\xi_j}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\, 2\, e^{C|\xi_j|} < e^{0,01d/\sqrt{m}}.$$

W takim razie

$$\text{(A)}\ \left|\prod_{j=1}^{m}\cos C(x_j+i\xi_j-a_j)\right| = \prod_{j=1}^{m}|\cos C(x_j+i\xi_j-a_j)| < e^{m.0,01d/\sqrt{m}} = e^{0,01\sqrt{m}d}.$$

Z nierówności (10) wynika, że dla każdego $j \in \{1,2,\dots,m\}$ jest

$$\prod_{j=1}^{m}|U(x_j+i\xi_j-a_j,B,L)| \leq \prod_{j=1}^{m}\Big[U(x_j-a_j,B,L) +$$

$$+ (1/\sqrt{\pi})(\exp(-B^2(x_j-a_j+L)^2) +$$

$$+ \exp(-B^2(x_j-a_j-L)^2))\exp B^2\xi_j^2\Big] \leq \prod_{j=1}^{m}\Big[U(x_j-a_j,B,L) +$$

$$+ (1/\sqrt{\pi})(\exp(-B^2(x_j-a_j+L)^2)+\exp(-B^2(x_j-a_j-L)^2))\exp\frac{0,0001B^2d}{m}\Big] =$$

$$= J_1 + S + (1/\sqrt{\pi})J_2(\exp(0,0001B^2d^2/m))^m,$$

gdzie

$$J_1 = \prod_{j=1}^{m} U(x_j-a_j,B,L), \quad J_2 = \prod_{j=1}^{m} (\exp(-B^2(x_j-a_j+L)^2)+\exp(-B^2(x_j-a_j-L)^2)),$$

S jest sumą 2^m-2 iloczynów po m czynników postaci

$$U(x_j-a_j,B,L) \quad i \quad \exp(-B^2(x_1-a_1+L)^2) + \exp(-B^2(x_1-a_1-L)^2).$$

Oszacujemy teraz kolejno J_1, J_2, S.
Z (iiii) wynika, że $x = (x_1,\dots,x_m)$ K oraz to, że kwadrat odległości punktu x od każdego naroża kostki K' jest nie mniejsza niż $0,64d^2$, to znaczy

(a) każda z liczb postaci $(x_1-a_1\pm L)^2+(x_2-a_2\pm L)^2+\dots+(x_m-a_m\pm L)^2$ (jest ich 2^m) jest nie mniejsza niż $0,64d^2$.

Ponadto z tego, że $x \notin K'$ wynika, że zachodzi przynajmniej jedna z relacji

(b) $x_j \notin \langle a_j-L-h, a_j+L+h \rangle$, $j = 1,2,\dots,m$,

to znaczy dla przynajmniej jednego j spełniona jest któraś z nierówności

(c) $x_j-a_j < -L-h$ lub $x_j-a_j > L+h$.

Jeżeli zachodzą wszystkie relacje (b), to dla każdego czynnika iloczynu J_1 stosuje się jedno z oszacowań (7)-(8) i $J_1 < e^{-B^2t^2} < e^{-0,64B^2d^2}$, gdzie t^2 jest którąś z liczb występujących w (a).
Jeżeli p ($1 \leq p \leq m-1$) spośród relacji (b) zachodzi, a $m-p$ nie, to wtedy dla p czynników iloczynu J_1 mają miejsce oszacowania (7) bądź (8), a dla pozostałych spełnione są nierówności

$$a_{j_s}-L-h \leq x_{j_s} \leq a_{j_s}+L+h, \quad s = 1,\dots,m-p,$$

to znaczy

$$-2l-3h = -2L-h \leq x_{j_s}-a_{j_s}-L \leq h < 2L+h = 2l + 3h$$

i

$$-2l - 3h = -2L - h < -h \leqslant x_{j_s} - a_{j_s} + L \leqslant 2L + h = 2l + 3h,$$

czyli

(d) $$(x_{j_s} - a_{j_s} \pm L)^2 \leqslant (2l+3h)^2 \leqslant \frac{0,1d^2}{m-1}.$$

Wobec tego, dzięki (a), każda z liczb

(e) $$(x_{j_1} - a_{j_1} \pm L)^2 + \ldots + (x_{j_p} - a_{j_p} \pm L)^2$$

jest nie mniejsza niż $0,64d^2 - \frac{0,1d^2}{m-1}(m-p) \geqslant 0,64d^2 - \frac{0,1d^2}{m-1}(m-1) = 0,63d^2$.
W tym przypadku (gorszym) $J_1 < \underbrace{1 \,.\, 1 \ldots 1}_{p-m \text{ czynników}} \,.\, \exp(-B^2 t'^2) \leqslant \exp(-0,63B^2d^2)$,
gdzie t'^2 jest którąś z liczb występujących w (e). W rezultacie

(B) $$J_1 < \exp(-0,63B^2d^2).$$

Oszacowanie iloczynu J_2 jest łatwiejsze. Mianowicie, iloczyn J_2 jest sumą 2^m iloczynów po m czynników postaci $\exp(-B^2(x_j-a_j \pm L)^2)$. Wobec tego, zgodnie z (a), jest

(C) $$J_2 \leqslant 2^m.\exp(-0,64B^2d^2).$$

Oszacujemy teraz sumę S. Każdy składnik sumy S ma postać

$$S_s = U(x_{j_1}-a_{j_1},B,L)\ldots U(x_{j_s}-a_{j_s},B,L).(\exp(-B^2(x_{j_{s+1}}-a_{j_{s+1}}+L)^2) +$$

$$+ \exp(-B^2(x_{j_{s+1}}-a_{j_{s+1}}-L)^2))\ldots(\exp(-B^2(x_{j_m}-a_{j_m}+L)^2) +$$

$$+ \exp(-B^2(x_{j_m}-a_{j_m}-L)^2)),$$

gdzie $j_1,\ldots,j_m$ jest pewną permutacją liczb $1,2,\ldots,m$, $1 \leqslant s \leqslant m-1$. Wynik mnożenia nawiasów daje sumę 2^{m-s} iloczynów po $m-c$ czynników postaci $\exp(-B^2(x_\tau-a_\tau \pm L)^2)$. Jeżeli do k funkcji $U(x_{j_1}-a_{j_1}) \cdots U(x_{j_s}-a_{j_s})$ stosuje się którać z oszacowań (7) - (8), to zastępując te funkcje prawymi stronami (7) bądź (8), a pozostałe jedynkami i wykonując mnożenie dostaniemy, zgodnie z (e), oszacowanie

$$(*)\quad S_s < \exp(-B^2d^2(0{,}64 - \tfrac{0{,}1}{m-1}(m-k))),\quad \text{gdzie}\quad 1 \leq k \leq s \leq m-1.$$

Jeżeli natomiast do żadnej z funkcji $U(x_1-a_1),\dots,U(x_{j_s}-a_{j_s})$ nie stosuje się ani (7), ani (8), to znaczy

$$x_{j_r} \in \langle a_{j_r} - L - h,\ a_{j_r} + L + h\rangle,\qquad r = 1,\dots,s,$$

to zgodnie z (e), każda z liczb

$$(x_{j_{s+1}} - a_{j_{s+1}} \pm L)^2 + \dots + (x_{j_m} - a_{j_m} \pm L)^2$$

jest nie mniejsza niż $0{,}64d^2 - \frac{0{,}1d^2}{m-1}(m-s)$. W tym przypadku otrzymujemy

$$(**)\quad S_s < \underbrace{1\ 1\dots1}_{s\ \text{czynników}}\ \exp(-B^2d^2(0{,}64 - \tfrac{0{,}1}{m-1}(m-s))),\qquad 1 \leq s \leq m-1.$$

Uwzględniając (*) i (**) możemy ostatecznie napisać $S_s < \exp(-0{,}63B^2d^2)$ i w rezultacie

$$(D)\quad S < (2^m-2)\exp(-0{,}63B^2d^2).$$

Uwzględniając teraz oszacowanie (A) i (D), możemy napisać

$$|f(x_1+i\xi_1,\dots,x_m+i\xi_m)| < (M^m/C^{4mr})(\exp(-0{,}63B^2d^2) + (2^m-2)\exp(-0{,}63B^2d^2) +$$

$$+ (1/\sqrt{\pi})^m\exp(0{,}0001B^2d^2).2^m.\exp(-0{,}64B^2d^2))\exp(0{,}01\sqrt{m}.d) <$$

$$(M^m/C^{4mr})(2^m.\exp(-0{,}63B^2d^2) + 2^m.\exp(-0{,}63B^2d^2) +$$

$$+ 2^m.\exp(0{,}0001B^2d^2 - 0{,}64B^2d^2))\exp(0{,}01\sqrt{m}.d) =$$

$$= (2^mM^m/C^{4mr})(2\exp(-0{,}63B^2d^2+0{,}01\,md)+\exp(0{,}0001B^2d^2-0{,}64B^2d^2+0{,}01\sqrt{m}d))$$

$$< (3.2^m.M^m/C^{4mr})\exp(-0{,}62B^2d^2 + 0{,}01\sqrt{m}\,d)\qquad \text{c.b.d.u.}$$

Lemat 2

Jeżeli $t_1,\dots,t_m$ są liczbami całkowitymi nieujemnymi, to dla funkcji $f(x_1,\dots,x_m)$, określonej wzorem (11), ma miejsce oszacowanie

$$\frac{\partial^{t_1+t_2+\dots+t_m} f(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\dots\partial x_m^{t_m}} = M^m \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\cos^{(t_j)} C(x_j-a_j)}{C^{4r-t_j}}\, U(x_j-a_j,B,L)+E_{j,t_j}\right), \tag{13}$$

gdzie

$$\left|E_{j,t_j}\right| \leqslant \frac{B}{\sqrt{\pi}}\,\frac{(t_j)}{\left[\frac{t_j-1}{2}\right]!}\cdot\frac{1}{C^{4r}}\Big(\left(C+B+2B^2\left|x_j-a_j+L\right|\right)^{t_j-1}\exp\left(-B^2(x_j-a_j+L)^2\right)+$$

$$+\left(C+B+2B^2\left|x_j-a_j-L\right|\right)^{t_j-1}\exp\left(-B^2(x_j-a_j-L)^2\right)\Big), \quad j=1,2,\dots,m. \tag{13a}$$

Przy tym

$$\cos^{(t_j)}(\cdot)=\begin{cases}\cos(\cdot) & \text{dla} \quad t_j=4k\\ -\sin(\cdot) & \text{dla} \quad t_j=4k+1\\ -\cos(\cdot) & \text{dla} \quad t_j=4k+1\\ \sin(\cdot) & \text{dla} \quad t_j=4k+3,\end{cases}$$

$[x]!$ - oznacza silnię części całkowitej liczby x.
Dowód tego lematu w niczym nie różni się od dowodu analogicznego lematu w pracy [1].

2. Niech P będzie dowolnym, niepustym zbiorem domkniętym leżącym w E^m. Rozważmy ciąg kostek

$$T_k=\left\{(x_1,\dots,x_m):\ |x_j|\leqslant 2^k,\quad j=1,2,\dots,m\right\},\qquad k=1,2,\dots$$

Każdą z nich podzielmy na przystające kostki domknięte o rozłącznych wnętrzach i krawędziach, długości 2^{-k}, równoległych do osi współrzędnych. Otrzymane kostki nazywamy kostkami klasy k. Ponieważ zbiór P jest niepusty, przy dostatecznie dużym k pewien jego punkt znajdzie się w kostce T_k, a więc w pewnej kostce klasy k. Niech k_0 będzie najmniejszą liczbą naturalną o tej własności. Wtedy mają tę własność wszystkie liczby $k \geqslant k_0$. Z klasy k_0 wybieramy wszystkie te i tylko te kostki, których przecięcie ze zbiorem P jest niepuste, ustawiamy je byle jak w ciąg (skończony) i numerujemy

(c_0) $K_1,K_2,\dots,K_{n_1}$.

Następnie wybieramy wszystkie takie kostki z klasy k_0+1 i numerujemy

(c_1) $K_{n_1+1}, K_{n_1+2}, \dots, K_{n_2}$.

itd.

Biorąc ciąg $(c_0), (c_1), \dots, (c_s), \dots$, otrzymamy ciąg kostek domkniętych

$$K_1, K_2, \dots, K_n, \dots \tag{14}$$

o krawędziach równoległych do osi współrzędnych, których długości, w dalszym ciągu oznaczane przez $2l_n$, dążą do zera, gdy $n \to \infty$. Ponadto z konstrukcji kostek (14) wynika, że:

1° Każdy punkt zbioru P należy do nieskończenie wielu K_n.

2° Dla każdego punktu $x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in E^m$ takiego, że $x_0 \notin P$, a więc takiego, że $d = \rho(x_0, P) > 0$ (bo P domknięty) istnieje liczba naturalna N boku, że z nierówności $n > N$ i warunków

(w) $|x_j - x_j^0| < \frac{0{,}01d}{\sqrt{m}}$, $j = 1, 2, \dots, m$

wynika, że

$$\begin{cases} \rho((x_1, \dots, x_m), K_n') > \frac{4}{5}d \\ (2l_n + 3h_n)^2 \leq \frac{0{,}1d^2}{m-1} \end{cases} \tag{15}$$

gdzie

$h_n = l_n^{\frac{m}{2}} \leq l_n$ (bo $l_n < \frac{1}{2 \cdot 2^k}$, $k \geq 1$), K_n' jest kostką o krawędzi $2L_n + 2l_n^{\frac{m}{2}} = 2l_n + 4l_n^{\frac{m}{2}}$, odpowiadającą kostce K_n w taki sposób jak kostka K' występująca w lemacie 1 odpowiada kostce K.

Uzasadnienia wymaga tylko własność 2°.

Ponieważ długość krawędzi kostki K_n dąży do zera, gdy $n \to \infty$ (bo kostki K_n są wybierane z coraz wyższych klas, więc $l_n \to 0$, a to pociąga $(2L_n + 2l_n^{\frac{m}{2}}) \to 0$), więc dla $n > N_1$ średnica $2\sqrt{m}\,(L_n + l_n^{m/2})$ kostki K_n' jest mniejsza niż $0{,}19d$. W kostce $K_n \subset K_n'$ leży pewien punkt $x_n = (x_{1n}, \dots, x_{mn})$ zbioru P (bo tak kostki K_n były wybierane), więc punkt x_n leży w K_n. Skoro $x_0 \notin P$, to z definicji odległości punktu od zbioru wynika, że $\rho(x_0, x_n) \geq d$. W takim razie z nierówności trójkąta wynika, że gdy $n > N_1$, to dla każdego punktu $q \in K_n'$ jest

$$d \leqslant \rho(x_o,x_n) \leqslant \rho(x_o,q)+\rho(q,x_n) \leqslant \rho(x_o,q)+2\sqrt{m}(L_n+l_n^{m/2}) < \rho(x_o,q) + 0{,}19\ d.$$

Stąd

$$\rho(x_o,q) > 0{,}81d \quad \text{dla każdego punktu} \quad q \in K_n'.$$

Niech punkt x będzie punktem kostki określonej nierównościami (w). Wtedy z ostatniej nierówności i prawa trójkąta wynika, że

$$0{,}81d < \rho(x_o,q) \leqslant \rho(x_o,x) + \rho(x,q) =$$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(x_j-x_j^o)^2} + \rho(x,q) < \sqrt{m(0{,}01d/\sqrt{m})^2} + \rho(x,q) = 0{,}01d + \rho(x,q).$$

Stąd

$$\rho(x,q) > 0{,}80d = \frac{4}{5}d \quad \text{dla każdego punktu} \quad q \notin K_n'.$$

Oznacza to, że

$$\rho(x,K_n') > \frac{4}{5}d \quad \text{dla} \quad n > N_1.$$

Ponieważ $(2l_n+3l_n^{m/2})^2 \to 0$, gdy $n \to \infty$, więc dla $n > N_2$ będzie

$$(2l_n+3l_n^{m/2})^2 < 0{,}1d^2/m-1.$$

Biorąc $N = \max(N_1,N_2)$, dla $n > N$ zajdą równocześnie obie nierówności (15) c.n.

3. Weźmy pod uwagę ciąg (14) kostek K_n, odpowiadający zbiorowi domkniętemu P. Niech $(a_{1n},\dots,a_{mn})$ będzie środkiem kostki K_n, $2l_n$ niech będzie długością jej krawędzi, $\{M_n\}$ niech będzie byle jakim ciągiem liczb rzeczywistych, takim, że $M_n \geqslant 1$. Połóżmy

$$r_n = 20^n, \quad C_n = M_m^m.10^{2n+1}/l_n^m, \quad B_n = M_n^{m/2}.10^n/l_n^{m/2}, \quad L_n = l_n+l_n^{m/2}. \tag{16}$$

Oczywiście, $C_n > 1$, $B_n > 1$.
Weźmy pod uwagę ciąg funkcji $f_n(x_1,\dots,x_m)$ związanych z kostkami K_n, określonych wg wzoru (11), tzn.

$$f_n(x_1,\dots,x_m) = \frac{M_n^m}{C_n^{4m.r_n}} \prod_{j=1}^{m} \left(U(x_j-a_{jn},B_n,L_n)\cos C_n(x_j-a_{jn})\right) \tag{17}$$

i rozważmy szereg

$$F(x_1,\dots,x_m) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_1,\dots,x_m). \tag{18}$$

Twierdzenie 1

Szereg (18) i wszystkie szeregi pochodnych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^{t_1+t_2+\dots+t_m} f_n(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\dots\partial x_m^{t_m}}$$

są jednostajnie zbieżne w całej przestrzeni E^m, ich sumy są więc równe

$$\frac{\partial^{t_1+t_2+\dots+t_m} F(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\dots\partial x_m^{t_m}}$$

i ciągłe, czyli $F(x_1,\dots,x_m)$ jest funkcją klasy C^{∞}.

Dowód:

Niech będzie $t_j \leqslant 20^n = t_n$, $j = 1,2,\dots,m$. Ponieważ

$$\left|\cos^{(t_j)} C_n(x_j-a_{jn})\right| \leqslant 1, \quad 0 < U(x_j-a_{jn},B_n,L_n) < 1, \qquad j = 1,2,\dots,m,$$

więc

$$\text{(a)} \quad \left| \frac{\cos^{(t_j)} C_n(x_j-a_{jn})}{C_n^{4r_n-t_j}} \; U(x_j-a_{jn},B_n,L_n)\right| \leqslant (1_n^m/M_n^m.10^{2n+1})^{3.20^n}, \; 1=1,\dots,m.$$

Ustalmy j.

Zgodnie z lematem 2, możemy, uwzględniając (16) i fakt, że $\dfrac{(t_1)!}{\left[\frac{t_1-1}{2}\right]!}$ rośnie ze wzrostem t_j, napisać

$$\left|E_{j,t_j}\right| \leqslant (B_n/\sqrt{\pi})\left((t_j)!/\left[\frac{t_j-1}{2}\right]!\right)\left(C_n^{t_j-1}/C_n^{4r_n}\right)\left(\left(1+\frac{B_n}{C_n}+2.\frac{B_n^2}{C_n}\left|x_j-a_{jn}+L_n\right|\right)^{t_j-1}\right.\cdot$$

$$.\exp(-B_n^2(x_j-a_{jn}+L_n)^2)+\left(1+\frac{B_n}{C_n}+2.\frac{B_n^2}{C_n}\left|x_j-a_{jn}-L_n\right|\right)^{t_j-1}.\exp(-B_n^2(x_j-a_{jn}-L_n)^2)) \leqslant$$

$$\leqslant (M_n^{m/2}.10^n/1_n^m\sqrt{\pi})\left((20^n)!/\left[\frac{20^n-1}{2}\right]!\right) \cdot \frac{(M_n^m.10^{2n+1}/1_n^m)^{20^n-1}}{(M_n^m.10^{2n+1}/1_n^m)4.20^n} \cdot$$

$$.\left(\left(1+\frac{1_n^{m/2}}{M_n^{m/2}.10^{n+1}}+\frac{2}{10}\left|x_j-a_{jn}+L_n\right|\right)^{20^n-1}.\exp\left(-\frac{M_n^m}{1_n^m}\cdot 10^{2n}(x_j-a_{jn}+L_n)^2\right)+\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{1_n^{m/2}}{M_n^{m/2}.10^{m+1}}+\frac{2}{10}\left|x_j-a_{jn}-L_n\right|\right)^{20^n-1}.\exp\left(-\frac{M_n^m}{1_n^m}\cdot 10^{2n}(x_j-a_{jn}-L_n)^2\right)\right) =$$

$$= \left((20^n)!/\left[\frac{20^n-1}{2}\right]!\right)(1/\sqrt{\pi})\left(1_n^{3m.20^n}/M_n^{3m.20^n+\frac{m}{2}}\cdot 10^{(6n+3).20^n+n+1}\right) \cdot (w),$$

gdzie w oznacza wyrażenie stojące w nawiasie przed znakiem równości. Dla nieujemnych t, funkcja dodatnia

$$g(t) = (a+bt)\exp(-dt^2), \quad c \text{ - liczba naturalna}, \quad a,b,d \text{ - stałe dodatnie},$$

ma pochodną $g'(t) = -(a+bt)^{c-1}(2bdt^2+2adt-bc)\exp(-dt^2)$, której znak zależy tylko od znaku trójmianu kwadratowego, występującego w nawiasie. Trójmian ten ma dodatni pierwiastek

$$t_0 = \frac{-2ad + 2\sqrt{a^2d^2 + 2b^2cd}}{4bd},$$

wobec tego dla $0 < t < t_0$, $g(t)$ rośnie, a dla $t > t_0$ $g(t)$ maleje. Oznacza to, że w punkcie $t = t_0$, funkcja $g(t)$ ma maksimum absolutne, to jest

$$g(t) \leqslant g(t_0) \quad \text{dla} \quad t \geqslant 0.$$

Przyjmując

$$t = \left|x_j - a_{jn} \pm t_n\right|, \quad a = 1 + \frac{l_n^{m/2}}{M_n^{m/2}.10^{n+1}}, \quad b = \frac{2}{10}, \quad c = 20^n - 1, \; d = \frac{M_n^m}{l_n^m}\, 10^{2n},$$

dostajemy

$$(w) \leqslant 2\left(1 + \frac{l_n^{m/2}}{M_n^{m/2}.10^{n+1}} + \frac{2}{10}t_o\right)^{20^n - 1} \exp(-M_n^m.10^{2n}.t_o^2/l_n^m) <$$

$$< 2\left(1 + \frac{l_n^{m/2}}{M_n^{m/2}.10^{n+1}} + 0{,}5t_o\right)^{20^n-1}.$$

Ale

$$t_o = -\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{b} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\,\frac{c}{d}} \leqslant -\frac{1}{2}\,\frac{a}{b} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \sqrt{2\,\frac{c}{d}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2\,\frac{c}{d}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2\,\frac{20^n-1}{\frac{M_n^m.10^{2n}}{l_n^m}}} < \frac{1}{2}\sqrt{2\,\frac{20^n\; l_n^m}{10^{2n}\; M_n^m}} < \frac{1}{2}\sqrt{2\left(\frac{20}{100}\right)^n} < \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad M_n \geqslant 1, \qquad l_n < 1).$$

Zatem

$$(w) < 2\left(1 + \frac{1}{10^{n+1}} + \frac{2\sqrt{2}}{20}\right)^{20^n-1} < 2\,.\,10^{20^n-1}.$$

W rezultacie

$$(b) \quad \left|E_{j,t_j}\right| \leqslant \frac{(20^n)}{\left[\frac{20^n-1}{2}\right]}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{l_n^{3m.20^n}}{M_n^{3.20^n + \frac{m}{2}}}\cdot\frac{2}{10^{(6n+2).20+n+2}}, \quad j=1,2,\ldots,m.$$

Uwzględniając oszacowania (a) i (b), lemat 2 i to, że $k! \leqslant k^k$, więc

$$(20^n)! \leqslant (20^n < (100^n)^{20^n} = 10^{2n.20^n} \quad \text{oraz} \quad \left[\frac{20^n-1}{2}\right]! > 1,$$

możemy napisać

$$\left|\frac{\partial^{t_1+\ldots+t_m} f_n(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\ldots\partial x_m^{t_m}}\right| < M_n^m((l_n^m/M_n^m.10^{2n+1})^{3.10^n} +$$

$$+\ (2.10^{2n.20^n}.l_n^{3m.20^n}/\sqrt{\pi}M_n^{3m.20^n}+\tfrac{m}{2}.10^{(6n+2).20^n+n+2}))^m =$$

$$= ((l_n^{3m.20^n}/M_n^{3m.20^n-1}.10^{6n.20^n+3.20^n}) +$$

$$+\ (2l_n^{3m.20^n}/\sqrt{\pi}M_n^{3m.20^n+\frac{m}{2}-1}.10^{4n.20^n+2.20^n+n+2})^m <$$

$$< ((1/10^{4n.20^n+2.20^n}) + (1/10^{4n.20^n+2.20^n}))^m = 2^m/10^{2m(2n+1).20^n} =$$

$$= (1/10^{4mn.20^n})(2/10^{2.20^n})^m < 1/10^{4mn.20^n}, \qquad (l_n < 1, \qquad M_n \geqslant 1).$$

Ostatecznie

$$\left|\frac{\partial^{t_1+\ldots+t_m} f_n(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\ldots\partial x_m^{t_m}}\right| < \frac{1}{10^{4mn.20^n}} \quad \text{dla wszelkich} \quad x_1,\ldots,x_m \in R,$$

$$|t_j| < 20^n, \quad j = 1,2,\ldots,m. \tag{19}$$

Z oszacowania (19) wynika, że szereg

$$\sum_{n=N(t_1,\ldots,t_m)}^{\infty} \frac{\partial^{t_1+\ldots+t_m} f_n(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\ldots\partial x_m^{t_m}},$$

gdzie $N(t_1,\ldots,t_m)$ jest taką liczbą naturalną, że

$\max(t_1,\ldots,t_m) \leqslant 20^{N(t_1,\ldots,t_m)}$, ma majorantę liczbową

$$\sum_{n=N(t_1,\ldots,t_m)}^{\infty} \frac{1}{10^{4mn.20^n}}$$

zbieżną i to niezależnie od $M_n \geqslant 1$. Ponieważ liczba $N(t_1,\ldots,t_m)$ jest dla całej przestrzeni jednakowa (może się zmieniać tylko ze zmianą $t_1,\ldots,t_m$), więc szereg ten, a tym samym szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^{t_1+\ldots+t_m} f_n(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_1^{t_1}\ldots\partial x_m^{t_m}}$$

jest jednostajnie zbieżny w całej przestrzeni E^m. Wobec dowolności $t_1,\ldots,t_m$, wszystkie różniczkowania wyraz po wyrazie szeregu (18) są dozwolone i $F(x_1,\ldots,x_m)$ jest klasy C^{∞} w E^m c.n.u.

Twierdzenie 2

Jeżeli $r_n = 20^n$, to dla każdego punktu $(x_1,\ldots,x_m) \in E^m$ spełnione są nierówności

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^{4mr_n+t_1+\ldots+t_m} f_{n+1}(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_1^{4r_n+t_1}\,\partial x_2^{4r_n+t_2}\ldots\partial x_m^{4r_n+t_m}} \right| < 1, \tag{20}$$

gdzie $t_i = 0$ lub 1, $i = 1,2,\ldots,m$.
Dowód (20) wynika z oszacowania (19) i w niczym się nie różni od dowodu analogicznego twierdzenia w pracy [1].

Twierdzenie 3

Wszystkie funkcje $F(x_1,\ldots,x_m)$ (zależne od wolnego ciągu $\{M_n\}$ parametrów rzeczywistych $M_n \geqslant 1$) określone wzorem (18) są holomorficzne w każdym punkcie zbioru $E^m - P$.

Dowód:

Niech $F(x_1,\ldots,x_m)$ będzie funkcją określoną wzorem (18). Niech $x_0 = (x_1^0, x_2^0,\ldots,x_m^0) \notin P$. Ponieważ wszystkie składniki szeregu (18) są funkcjami całkowitymi, więc wystarczy wskazać m wymiarowe zespolone otoczenie $Z_{(x_0)}$ punktu x_0, w którym szereg (18) będzie zbieżny jednostajnie (tw. Weierstrassa).
Niech $d = \rho(x_0, P) > 0$ będzie odległością punktu x_0 od zbioru P. Połóżmy

$$Z_{(x_0)} = \left\{ (x_1+i\xi_1, x_2+i\xi_2,\ldots,x_m+i\xi_m) : |x_j - x_j^0| < \frac{0{,}01d}{m},\ |\xi_j| < \frac{0{,}01d}{m},\quad j = 1,\ldots,m \right\}$$

Dalsza część dowodu (oparta na lemacie 1) w niczym nie różni się od dowodu analogicznego twierdzenia w pracy [1].

Zbudowaliśmy zatem pewną rodzinę funkcji m zmiennych rzeczywistych danych wzorem (18) i zależnych od jednego wolnego ciągu $\{M_n\}$, $M_n \geqslant 1$, parametrów rzeczywistych, z których każda jest klasy C^∞ w E^m i każda jest poza danym z góry zbiorem domkniętym $P \subset E^m$ funkcją holomorficzną. Specjalizując odbiór ciągu $\{M_n\}$ można z tej rodziny wybierać funkcje o dodatkowych własnościach specjalnych. Można na przykład tak dobrać ciąg M_n by funkcja $F(x_1,\dots,x_m)$, należąca do tej rodziny, miała w każdym punkcie zbioru P osobliwość Pringsheima. O tym jak to zrobić napiszemy w oddzielnej pracy.

LITERATURA

[1] Meres L.: About certain family of functions of C^∞ class in E^2. Demonstratio Mathematica (przyjęta do druku). Również, L. Meres, Praca doktorska (Politechnika Śląska).

Recenzent: prof. zw. doc. dr hab. Zygmunt Zahorski

Wpłynęło, 10.06.1982 r.

О НЕКОТОРОМ СЕМЕЙСТВЕ ФУНКЦИЙ КЛАССА C^∞ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E^M

Р е з ю м е

В работе показывается конструкция семейства функций $F(x_1,\dots,x_m)$ принадлежащих к $C^\infty(E^m)$, из которых каждая является голломорфной вне наперёд заданного замкнутого множества $P \subset E^m$. Функции этого семейства зависят от бесконечного ряда действительных параметров. Соответствующий подбор этих параметров позволяет из этой семьи выбирать функции с некоторыми добавочными специальными свойствами. К примеру, можно так выбрать ряд параметров, чтобы выбранная функция имела в каждой точке множества P свойства Прингсгейма.

ON A CLASS OF C^{∞} FUNCTIONS IN EUCLIDEAN SPACE E^m

S u m m a r y

A construction of a set of functions $F(x_1,\ldots,x_m)$ of the C^{∞} (E^m) class is presented. They are holomorphic outside a given closed set $P \subset E^m$. They depend on the infinite sequence of real parameters. Some additional special properties of functions can be determined choosing these parameters. For example the Pringsheim singularity for the set P can be forced.