Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 43 Nr kol. 795

Lucjan MERES

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH ZBIORÓW TYPU G_δ W PRZESTRZENI EUKLIDESA E^m

Streszczenie. W pracy udowodniono zależności (4) - (15) odnoszące się do zbiorów klasy G_δ w przestrzeni Euklidesa E^m. Rezultaty te stanowią wzmocnienie i uogólnienie na przestrzeń o dowolnym (skończonym) wymiarze analogicznego wyniku dla przestrzeni E^2. Udowodnione twierdzenie może znaleźć zastosowanie przy rozwiązywaniu problemu osobliwości Pringsheima i Cauchy'ego dla funkcji wielu zmiennych.

Wiele problemów analizy matematycznej, zwłaszcza takich, które dotyczą charakteryzacji pewnych zbiorów, wymaga konstruowania funkcji, które na danych z góry zbiorach posiadają z góry narzucone własności. Szczególnie ważną rolę w tego typu problemach odgrywają zbiory borelowskie. W przestrzeni Euklidesa E^m są to twory dość skomplikowane (nawet te klasy 0, tj. domknięte lub otwarte), więc zręczny ich rozkład na inne zbiory o dostatecznie prostej (i znanej) budowie, może znacznie uprościć lub wręcz umożliwić konstrukcję potrzebnej funkcji. W niniejszej pracy zajmujemy się zagadnieniem tego typu w odniesieniu do zbiorów klasy G_δ. Rezultaty, które tu przedstawimy, wydają się być ciekawe same w sobie, ale jest możliwe, że znajdą zastosowanie do charakteryzacji zbiorów osobliwości Pringsheima i Cauchy'ego dla funkcji wielu zmiennych (rzeczywistych). Do takiego przypuszczenia skłania fakt, że praca stanowi uogólnienie analogicznego wyniku dla osi liczbowej (dowody różnią się istotnie - ten dla zbiorów na osi nie da się bez istotnych zmian przenieść na E^m, $m > 1$), który umożliwił Z. Zahorskiemu podanie pełnej charakteryzacji zbiorów wymienionych osobliwości dla funkcji jednej zmiennej [1]. Problem ten jest rozwiązany w klasie funkcji $f(x_1,\dots,x_m)$ z jednym tylko rodzajem osobliwości).

Oznaczenia:

E^m - przestrzeń Euklidesa m wymiarowa,

$x \in E^m \Leftrightarrow x = (x_1,x_2,\dots,x_m)$, $x_i \in R$, $i = 1,2,\dots,m$,

$\bar{A}$ - domknięcie zbioru A.

$\rho(p,q)$ - odległość (euklidesowa) punktów $p,q \in E^m$,

$\rho(p,A) = \inf\limits_{a\in A}\rho(p,a)$,

$\rho(A,B) = \inf\limits_{a\in A,b\in B}\rho(a,b)$,

$K_n = \left\{x: |x_i| < d_n, \quad i = 1,2,\dots,m\right\},$

$\bar{K}_n = \left\{x: |x_i| \leqslant d_n, \quad i = 1,2,\dots,m\right\}, \quad d_n$ - liczba naturalna,

Φ - zbiór pusty.

Niech G będzie dowolnym zbiorem typu G leżącym w E^m. Zbiór G można przedstawić w postaci iloczynu

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \tag{1}$$

zbiorów otwartych G_n $(n = 1,2,\dots)$ takich, że

$$G_{n+1} \subset G_n, \quad n = 1,2,\dots \tag{2}$$

Każdy ze zbiorów G_n jest sumą

$$G_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{n,j} \tag{3}$$

m wymiarowych kostek domkniętych $P_{n,j}$ $(j = 1,2,\dots)$ o rozłącznych wnętrzach i mających krawędzie równoległe do osi współrzędnych.

Twierdzenie

Dla dowolnego zbioru G typu G_δ leżącego w E^m i każdej pary n,j liczb naturalnych istnieją

(a) zbiór domknięty nigdziegęsty Φ_n,

(b) zbiory domknięte B_n i T_n rozłączne, które są sumami skończonych ilości m wymiarowych kostek domkniętych o rozłącznych wnętrzach i mających krawędzie równoległe do osi współrzędnych albo są puste,

(c) liczby naturalne m_n, k_n, d_n

takie, że wraz z (1) - (3) spełnione są warunki:

$$\bar{G} - G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n, \tag{4}$$

$$\Phi_n \subset \Phi_{n+1}, \tag{5}$$

$$\rho(P_{n,j}, \Phi_n) > 0, \tag{6}$$

ciąg

$$P_{m_1,k_1}, P_{m_2,k_2}, P_{m_3,k_3}, \dots \tag{7}$$

zawiera wszystkie kostki $P_{n,j}$ odpowiadające rozkładom (3),

$$m_n \leqslant n, \tag{8}$$

$$\overline{K}_n \supset P_{m_n,k_n} \tag{9}$$

$$d_{n+1} > d_n, \tag{10}$$

$$\Phi_{n+1} \subset B_n \subset \overline{K}_n, \tag{11}$$

$$\overline{G} \cap B_n = \overline{G} \cap \overline{K}_n, \tag{12}$$

$$T_n \subset K_n, \tag{13}$$

$$T_n \subset T_{n+1}, \tag{14}$$

$$E^m - \overline{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n. \tag{15}$$

Uwaga!

Gdy $G \neq \emptyset$, to zbiór $\overline{K}_n$ występujący w (13) może być zastąpiony przez K_n. Słabsze wersja tego twierdzenia, bez wymagania by zbiór B_n był złożony ze skończonej liczby kostek (kwadratów) domkniętych o rozłącznych wnętrzach i mających krawędzie równoległe do osi współrzędnych jest dla $m = 2$ udowodnione w [2].

Dowód:

Ciąg (7) i liczby m_n spełniające nierówności (8) definiujemy tak samo jak w pracy [2] (zastępując jedynie słowo kwadrat słowem kostka). Liczby k_n i d_n spełniające przy każdym $n \geqslant 1$ warunki (9) i (10) również określamy tak jak w [2].
Rozważmy m rodzin hiperpłaszczyzn prostopadłych do osi współrzędnych i przecinających te osie w punktach o współrzędnych całkowitych. W ten sposób całą przestrzeń E^m podzielimy na kostki domknięte o rozłącznych wnętrzach i krawędziach równoległych do osi współrzędnych. Długości tych krawędzi wynoszą $1/2^0$. Otrzymaną w ten sposób siatkę nazywamy siatką rzędu 1.

Prowadząc hiperpłaszczyzny symetrii kostek siatki rzędu 1 (prostopadle do krawędzi kostek) otrzymamy siatkę rzędu 2 itd. Po n krokach otrzymamy siatkę rzędu n-tego, której "oczkami" są kostki domknięte o rozłącznych wnętrzach i równoległych do osi współrzędnych krawędziach długości $1/2^{n-1}$. Niech H_n będzie sumą tych wszystkich i tylko tych kostek domkniętych siatki rzędu n-tego, których przecięcie ze zbiorem $\overline{G}$ jest niepuste. Jasne, że dla każdego n spełnione są warunki $\overline{G} \subset H_{n+1} \subset H_n$ i w konsekwencji

$$\overline{G} \cap H_n = \overline{G}. \tag{16}$$

Połóżmy

$$B_n = H_n \cap \overline{K}_n. \tag{17}$$

Ponieważ liczby d_n (zdefiniowane wyżej, a określające kostkę K_n) są naturalne, więc ze sposobu budowy ciągu siatek wynika, że zbiór B_n jest albo pusty albo jest sumą skończonej ilości kostek domkniętych o rozłącznych wnętrzach siatki rzędu n-tego. Zbiór B_n jest oczywiście domknięty, ponadto z definicji (17) wynika, że

$$B_n \subset \overline{K}_n, \tag{18}$$

to znaczy spełniona jest prawa część (11). Mnożąc obie strony (17) przez zbiór $\overline{G}$ i uwzględniając (16) dostajemy (12). Istotnie,

$$B_n \cap \overline{G} = (H_n \cap \overline{K}_n) \cap \overline{G} = (H_n \cap \overline{G}) \cap \overline{K}_n = \overline{G} \cap \overline{K}_n.$$

Niech

$$\Phi_n \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \overline{G} \cap B_1 - G_1 & \text{dla} \quad n = 1 \\ \overline{G} \cap B_{n-1} - G_n & \text{dla} \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{19}$$

Zbiory Φ_n jako różnice zbioru domkniętego i otwartego są domknięte. Lewą część (11), (5), (6), (4) i fakt, że zbiory Φ_n są nigdziegęste dowodzimy tak samo jak w pracy [2]. Należy jedynie zauważyć, że $\rho(P_{n,j}, E^m - G_n) > 0$ dla wszystkich n,j i zastąpić E_2 przez E^m, otoczenie kołowe w E_2 kulą w E^m, kwadrat $\{(x,y): -d_{n-1} \leq x \leq d_{n-1}, -d_{n-1} \leq y \leq d_{n-1}\}$ kostką $\overline{K}_{n-1}$, kwadrat $\{(x,y): -d_n \leq x \leq d_n, -d_n \leq y \leq d_n\}$ kostką $\overline{K}_n$.

Pozostaje zdefiniować zbiory T_n i udowodnić (13), (14) i (15). Jeżeli w (18) zachodzi równość, to przyjmujemy $T_n = \Phi$. Jeżeli w (18) równość nie zachodzi, tzn. $B_n \subset \overline{K}_n$ w sensie właściwym, to zbiór

$$A_n = K_n - B_n \tag{20}$$

jest ograniczony, niepusty i otwarty (różnica zbioru otwartego i domkniętego). Zauważmy, że

$$A_n \subset A_{n+1} \quad \text{dla każdego} \quad n. \tag{21}$$

Istotnie, jest to oczywiste, gdy $A_n = \emptyset$. Niech $A_n \neq \emptyset$ i niech $q \in A_n$. Ponieważ A_n jest otwarty, więc istnieje kula $U(q,r)$ o środku w punkcie q i dodatnim promieniu r, leżąca w A_n, a więc $U(q,r) \subset K_n$. W takim razie $H_n \cap U(q,r) \subset H_n \cap K_n \subset H_n \cap \overline{K}_n = B_n$. Jeżeli zatem $p \in H_n \cap U(q,r)$, to $p \in B_n$. Z drugiej strony, $p \in H_n \cap U(q,r)$ pociąga $p \in U(q,r)$, a więc $p \in A_n$, czyli $p \notin B_n$. W rezultacie $H_n \cap U(q,r) = \emptyset$. Ponieważ $H_{n+1} \subset H_n$, więc też $H_{n+1} \cap U(q,r) = \emptyset$. W takim razie $q \notin H_{n+1}$ i wobec tego (*) $q \notin B_{n+1}$ (zob. def zbioru B_{n+1}). Ponieważ $q \in A_n$, więc $q \in K_n$ i stąd $q \in K_{n+1}$ (bo $d_{n+1} > d_n$). Stąd i (*) wynika, że $q \in A_{n+1}$, co dowodzi (21).

Jeżeli w (18) równość zachodzi przy każdym n, to $E^m - \overline{G} = \emptyset$. Istotnie powiedzmy, że tak nie jest. Niech $p \in E^m - \overline{G}$. Zbiór $E^m - \overline{G}$ jest otwarty więc istnieje kula $U(p,r)$, $r > 0$ taka, że

(a_1) $U(p,r) \subset E^m - \overline{G}$.

Istnieje liczba N_1 taka, że

(a_2) $p \in \overline{K}_n$ dla wszystkich $n \geq N_1$ (bo d_n dąży do nieskończoności).

Z założenia wiemy, że $\overline{K}_n = B_n = \overline{B}_n = \overline{H_n \cap K_n} \subset \overline{H}_n \cap \overline{K}_n \subset \overline{H}_n$ dla $n=1,2,\ldots$ Wobec tego i (a_2) jest $p \in \overline{H}_n$ dla wszystkich $n > N_1$, a stąd

(a_3) $\rho(p,H_n) = 0$ dla wszystkich $n \geq N_1$,

(bo warunki $p \in \overline{A}$ i $\rho(p,A) = 0$ są równoważne). Punkt p jest zawsze punktem pewnej kostki $K_{p,n}$ przy każdym numerze n rzędu siatki (przy tym $K_{p,n+1} \subset K_{p,n}$). Wobec ($a_1$), żadna kostka siatki rzędu n leżąca w $U(p,r)$ nie wchodzi w skład H_n. Ponieważ średnice kostek siatki rzędu n wynoszą $\sqrt{m}/2^{n-1}$, więc jeżeli $(\sqrt{m}/2^{n-1}) < r/2$, tj. $n \geq 1 + \left[2 + \log_2 \frac{\sqrt{m}}{r}\right] = N_2$, $[x]$ - część całkowita liczby x, to odległość punktu p od najbliższej kostki wchodzącej w skład H_n jest większa niż $r/2$, a więc

(a_4) $\rho(p,H_n) > r/2$ dla $n \geq N_2$.

Warunki (a_3) i (a_4) są dla $n \geq \max(N_1,N_2$ sprzeczne.

A więc, gdy w (18) zachodzi równość dla wszystkich n, to $E^m - \overline{G} = \Phi$ i kładziemy $T_1 = T_2 = \ldots = \Phi$. Jasne, że w tym przypadku jest (13), (14), (15). Załóżmy, że w (18) równość ma miejsce nie dla wszystkich n. Niech n_0 będzie pierwszą liczbą naturalną, dla której w (18) jest zawieranie właściwe. Wówczas zbiór otwarty A_{n_0} określony wzorem (20) jest niepusty, a wobec (21) niepuste są też zbiory $A_{n_0+1}, A_{n_0+2}, \ldots$

Niech i będzie rzędem siatki mającej tę własność, że przynajmniej jedna jej kostka leży w zbiorze A_{n_0}. Takie i musi się znaleźć, bo A_{n_0} jest niepustym zbiorem otwartym. Gdy $n_0 > 1$, to zgodnie z przyjętą wcześniej umową kładziemy $T_1 = \ldots = T_{n_0-1} = \Phi$. Niech T_{n_0+k}, $k = 0,1,2,\ldots$ będzie sumą tych wszystkich i tylko tych kostek wziętych z siatki rzędu $i+k$, które całkowicie leżą w zbiorze A_{n_0+k}. W ten sposób dla każdego $n=1,2,\ldots$ mamy określone zbiory T_n, które albo są puste albo są sumami skończonej ilości kostek domkniętych (bo A_n są ograniczone) o rozłącznych wnętrzech i równoległych do osi współrzędnych krawędziach. Zbiory T_n spełniają oczywiście warunek $T_n \subset A_n$ dla każdego n, a więc też $T_n \cap B_n = \Phi$, czyli spełniony jest warunek (b) tezy naszego twierdzenia. Z faktu $T_n \subset A_n$ i definicji zbioru A_n wynika natychmiast (13). Ponieważ $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, więc ze sposobu budowy ciągu siatek i definicji zbiorów T_n wynika, że $T_1 \subset T_2 \subset T_3 \subset \ldots$, a więc jest (14). Pozostaje udowodnić (15).

Niech $q \in E^m - \overline{G}$. Z wcześniejszych rozważań wiemy, że dla $n \geqslant N_2$ kostka domknięta $K_{q,n}$ siatki rzędu n, w której leży punkt q, jest rozłączna ze zbiorem H_n. W takim razie kostka $K_{q,n}$ nie jest składnikiem zbioru B_n przy $n \geqslant N_2$. Z drugiej strony musi się znaleźć takie N', że gdy $n \geqslant N'$, to $K_{q,n} \subset K_n$. Tak więc kostka $K_{q,n}$ leży w zbiorze A_n dla $n = \max(N_1, N')$, czyli w zbiorze T_n (z definicji zbioru T_n). Stąd zaś wynika, że $q \in T_n$, gdzie $n = \max(N_2, N')$, a więc również $q \in \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$. Pokazaliśmy zatem, że

$$E^m - \overline{G} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n.$$

Zawieranie w drugą stronę uzyskuje się identycznym sposobem co relację (38) w [2], trzeba tylko zastąpić E_2 przez E^m, kwadrat domknięty kostką $\overline{K_n}$ i odpowiednio kwadrat otwarty kostką K_n. Relacja (15) została udowodniona. Udowodniliśmy zatem nasze twierdzenie, w przypadku gdy $G \neq \Phi$. Jeżeli G jest zbiorem pustym, to przyjmujemy zbiory G_n jako wnętrza kul otwartych o promieniach $r_n = 1/n$ i wspólnym środku (np. początku współrzędnych), z wyłączeniem tego środka. Liczby m_n, k_n, d_n określamy jak poprzednio. Zbiory B_n i Φ_n przyjmujemy jako puste. $T_n = \overline{K}_n$. Wszystkie punkty tezy naszego twierdzenia są w tym przypadku spełnione w sposób oczywisty.

LITERATURA

[1] Zahorski Z.: Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable reelle admettant les derivees de tous les ordres. Fund. Math., t. XXXIV (1946).

[2] Meres L.: O pewnych własnościach zbiorów typu G_δ w przestrzeni Euklidesa dwuwymiarowej. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria: Matematyka-Fizyka z. 31, 1979.

Recenzent: prof. zw. doc. dr hab. Zygmunt Zahorski

Wpłynęło, 10.06.1982 r.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МНОЖЕСТВА ТИПА G_δ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E^m

Р е з ю м е

В работе доказаны формулы (4) – (15), касающиеся мнозеств класса в Евклидовом пространстве E^m. Полученные результаты являются обобщающими для имеющих аналогичных в пространстве E^2. Доказанная теорема может найти применение при решении особенностей Прингшейма и Коши для многопеременных функций.

ON SOME PROPERTIES OF TYPE G_δ SETS IN EUCLIDEAN E^m SPACES

S u m m a r y

Properties (4) - (15) connected with G_δ sets in E^m spaces are proved. They generalized results of the similar properties for E^2 spaces. They may be used to solve Pringsheim's and Cauchy's singularities problems for multivariable functions.