ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 43 Nr kol. 795

Brunon SZOCIŃSKI

BIPRODUKT PÓŁPROSTY GRUP

Streszczenie. W pracy tej podano definicję i podstawowe własności pewnej grupy, będącej uogólnieniem produktu półprostego grup.

1. OKREŚLENIE BIPRODUKTU PÓŁPROSTEGO GRUP

Załóżmy, że dane są trzy grupy H, G_1, G_2, których elementami neutralnymi są odpowiednio $\circledcirc$, e_1, e_2. Symbolem $*$ oznaczać będziemy działanie w grupie H, zaś symbole działań grupowych w grupach G_1 i G_2 będziemy opuszczać. Niech dane będą ponadto dwa odwzorowania $\Phi_i : H \times G_i \to H$, $i = 1, 2$, spełniające dla dowolnych h, $\bar{h} \in H$ oraz g_i, $\bar{g}_i \in G_i$ następujące warunki:

$$\Phi_1(\Phi_1(h,g_1),\bar{g}_1) = \Phi_1(h,\bar{g}_1 g_1), \tag{1.1}$$

$$\Phi_2(\Phi_2(h,g_2),\bar{g}_2) = \Phi_2(h,g_2\bar{g}_2), \tag{1.2}$$

$$\Phi_i(h,e_i) = h \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \tag{1.3}$$

$$\Phi_i(\bar{h}*h,g_i) = \Phi_i(\bar{h},g_i)* \Phi_i(h,g_i) \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \tag{1.4}$$

$$\Phi_2(\Phi_1(h,g_1),g_2) = \Phi_1(\Phi_2(h,g_2),g_1). \tag{1.5}$$

Z warunku (1.4) wynika, że dla każdego $g_i \in G_i$ odwzorowania Φ_i są automorfizmami grupy H, więc dla dowolnych $h \in H$ oraz $g_i \in G_i$ zachodzą równości

$$\Phi_i(\circledcirc,g_i) = \circledcirc, \quad i = 1, 2, \tag{1.6}$$

$$(\Phi_i(h,g_i))^{-1} = \Phi_i(h^{-1},g_i), \quad i = 1, 2. \tag{1.7}$$

W dalszym ciągu dla uproszczenia zapisu będziemy również stosować oznaczenia

$$g_1h := \Phi_1(h, g_1), \quad hg_2 := \Phi_2(h, g_2). \tag{1.8}$$

Obecnie udowodnimy lemat, mający podstawowe znaczenie.

Lemat 1.1

Iloczyn kartezjański $G_2 \times H \times G_1$ z działaniem $\curlywedge$ określonym wzorem

$$(\bar{g}_2, \bar{h}, \bar{g}_1) \curlywedge (g_2, h, g_1) := (\bar{g}_2 g_2, \Phi_2(\bar{h}, g_2) * \Phi_1(h, \bar{g}_1), \bar{g}_1 g_1), \tag{1.9}$$

tworzy grupę, przy czym $(e_2, \circledast, e_1)$ jest jej elementem neutralnym oraz

$$(g_2, h, g_1)^{-1} = (g_2^{-1}, \Phi_2(\Phi_1(h^{-1}, g_1^{-1}) g_2^{-1}), g_1^{-1}). \tag{1.10}$$

Dowód:

Sprawdzimy kolejno poszczególne aksjomaty grupy. Stosując uproszczone oznaczenia (1.8) oraz aksjomaty (1.1) - (1.5) zgodnie z określeniem działania $\curlywedge$ mamy kolejno

$$(\bar{\bar{g}}_2, \bar{\bar{h}}, \bar{\bar{g}}_1) \curlywedge \left[(\bar{g}_2, \bar{h}, \bar{g}_1) \curlywedge (g_2, h, g_1)\right] = (\bar{\bar{g}}_2, \bar{\bar{h}}, \bar{\bar{g}}_1) \curlywedge (\bar{g}_2 g_2, \bar{h} g_2 * \bar{g}_1 h, \bar{g}_1 g_1) =$$

$$= (\bar{\bar{g}}_2 \bar{g}_2 g_2, \bar{\bar{h}} \bar{g}_2 g_2 * \bar{\bar{g}}_2 \bar{h} g_2 * \bar{\bar{g}}_1 \bar{g}_1 h, \bar{\bar{g}}_1 \bar{g}_1 g_1).$$

Podobnie

$$\left[(\bar{\bar{g}}_2, \bar{\bar{h}}, \bar{\bar{g}}_1) \curlywedge (\bar{g}_2, \bar{h}, \bar{g}_1)\right] \curlywedge (g_2, h, g_1) = (\bar{\bar{g}}_2 \bar{g}_2, \bar{\bar{h}} \bar{g}_2 * \bar{\bar{g}}_1 \bar{h}, \bar{\bar{g}}_1 \bar{g}_1) \wedge (g_2, h, g_1) =$$

$$= \left[(\bar{\bar{g}}_2 \bar{g}_2 g_2, \bar{\bar{h}} \bar{g}_2 g_2 * \bar{\bar{g}}_1 \bar{h} g_2 * \bar{\bar{g}}_1 \bar{g}_1 h, \bar{\bar{g}}_1 \bar{g}_1 g_1).\right.$$

Wynika stąd, że działanie $\curlywedge$ jest łączne. Okazuje się, że elementem neutralnym jest $(e_2, \circledast, e_1)$. Rzeczywiście

$$(g_2, h, g_1) \curlywedge (e_2, \circledast, e_1) = (g_2 e_2, he_2 * g_1 \circledast, g_1 e_1) = (g_2, h, g_1).$$

Na koniec zauważmy, że

$$(g_2,h,g_1)\curlywedge(g_2^{-1},g_1^{-1}h^{-1}g_2^{-1},g_1^{-1}) = (g_2g_2^{-1},hg_2^{-1} * g_1g_1^{-1}h^{-1}g_2^{-1},g_1g_1^{-1}) =$$

$$= (e_2,hg_2^{-1} * h^{-1}g_2^{-1},e_1) = (e_2,\circledast g_2^{-1},e_1) = (e_2,\circledast,e_1).$$

Wynika stąd, że dla dowolnego elementu (g_2,h,g_1) istnieje odwrotny, który wyraża się wzorem (1.10). W ten sposób dowód lematu został zakończony.

Definicja 1.1

Iloczyn kartezjański $G_2 \times H \times G_1$ z działaniem określonym wzorem (1.9) nazywamy biproduktem półprostym grupy H przez grupy G_2 i G_1 lub biproduktem półprostym grup G_2, H, G_1 i oznaczamy symbolem

$$G_2 \curlywedge_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \curlywedge G_1 \tag{1.11}$$

lub krótko $G_2 \curlywedge H \curlywedge G_1$.

Omówimy teraz pewne przypadki szczególne biproduktu półprostego grup. Niech $\Phi_i : H \times G_i \longrightarrow H$ będą odwzorowaniami określonymi $\Phi_i(h,g_i) := h$ dla $i = 1, 2$. Tak określone odwzorowania spełniają oczywiście aksjomaty (1.1) -(1.5). Możemy więc utworzyć biprodukt półprosty (1.11). Ponieważ w przypadku tym związek (1.9) przyjmuje postać

$$(\bar{g}_2,\bar{h},\bar{g}_1)\curlywedge(g_2,h,g_1) = (\bar{g}_2g_2,\bar{h} * h,\bar{g}_1g_1),$$

więc omawiany biprodukt półprosty jest produktem prostym $G_1 \times H \times G_1$ grup G_2, H, G_1.

W charakterze grupy G_2 przyjmijmy teraz grupę trywialną, tzn. przyjmijmy $G_2 = \{e_2\}$ oraz $\Phi_2(h,e_2) := h$ dla każdego $h \in H$. Wówczas, jak łatwo zauważyć, grupa (1.11) jest izomorficzna z produktem półprostym $H_{\Phi_1} \curlywedge G_1$ grupy H przez G_1 w sensie następującej definicji (por. [1]).

Definicja 1.2

Produktem półprostym $H_{\Phi_1} \curlywedge G_1$ grupy H przez G_1 nazywamy iloczyn kartezjański $H \times G_1$ z działaniem $\curlywedge$ określonym wzorem

$$(\bar{h},\bar{g}_1)\curlywedge(h,g_1) := (\bar{h} * \Phi_1(h,\bar{g}_1),\bar{g}_1g_1).$$

gdzie $\Phi_1 : H\times G_1 \longrightarrow H$ jest danym odwzorowaniem, spełniającym warunek (1.1) oraz dla $i = 1$ warunki (1.3) oraz (1.4).

Podobnie, przyjmując $G_1 = \{e_1\}$ oraz $\Phi_1(h,e_1) := h$ dla każdego h, otrzymamy biprodukt półprosty $G_2 \curlywedge_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \curlywedge \{e_1\}$, który jest grupą izomorficzną z pewną grupą, którą nazwiemy produktem półprostym drugiego rodzaju.

Definicja 1.3

Produktem półprostym drugiego rodzaju $G_2 \curlywedge_{\Phi_2} H$ grupy H przez G_2 nazywamy zbiór $G_2 \times H$ z działaniem $\curlywedge$ określonym wzorem

$$(\bar{g}_2,\bar{h}) \curlywedge (g_2,h) := (\bar{g}_2 g_2, \Phi_2(\bar{h},g_2) * h),$$

gdzie $\Phi_2 : H\times G_2 \longrightarrow H$ jest odwzorowaniem spełniającym warunek (1.2) oraz dla $i = 2$ warunki (1.3) i (1.4).

Dla odróżnienia, produkt półprosty grup w sensie definicji 1.2 będziemy nazywać również produktem półprostym pierwszego rodzaju.

Pokazaliśmy w ten sposób, że zdefiniowany powyżej biprodukt półprosty grup jest uogólnieniem zarówno produktu prostego trzech grup, jak i produktów półprostych dwóch grup. W ustępie 3 określimy i podamy własności pewnej grupy, będącej również przypadkiem szczególnym biproduktu półprostego (1.11).

Nie trudno przekonać się o tym, że jeśli odwzorowania $\Phi_i : H\times G_i \longrightarrow H$ $(i = 1, 2)$ spełniają warunki (1.1) - (1.5), to odwzorowania

$$\Psi_1 : (G_2 \curlywedge_{\Phi_2} H)\times G_1 \longrightarrow G_2 \curlywedge_{\Phi_2} H$$

$$\Psi_2 : (H_{\Phi_1} \curlywedge G_1)\times G_2 \longrightarrow H_{\Phi_1} \curlywedge G_1$$

określone odpowiednio wzorami

$$\Psi_1((g_2,h),g_1) := (g_2,\Phi_1(h,g_1)), \qquad \Psi_2((h,g_1),g_2) := (\Phi_2(h,g_2),g_1)$$

spełniają warunki definicji 1.2 oraz 1.3. Możemy więc utworzyć produkty półproste grup

$$(G_2 \curlywedge_{\Phi_2} H)_{\Psi_1} \curlywedge G_1, \quad G_2 \curlywedge_{\Psi_2} (H_{\Phi_1} \curlywedge G_1). \tag{1.12}$$

Okazuje się przy tym, co łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że odwzorowania

$$\tau_1 : (G_2 \curlywedge_{\Phi_2} H)_{\Psi_1} \lambda\, G_1 \longrightarrow G_2 \curlywedge_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \lambda\, G_1$$

$$\tau_2 : G_2 \curlywedge_{\Psi_2} (H_{\Phi_1} \lambda\, G_1) \longrightarrow G_2 \curlywedge_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \lambda\, G_1$$

zdefiniowane następująco

$$\tau_1((g_2,h),g_1) := (g_2,h,g_1), \qquad \tau_2(g_2,(h,g_1)) := (g_2,h,g_1)$$

są izomorfizmami. Zachodzi więc następujący lemat.

Lemat 1.2

Każda z grup (1.12) jest izomorficzna z biproduktem półprostym (1.11). Podana w powyższym lemacie własność uzasadnia przyjęcie oznaczenia (1.11) na biprodukt półprosty grup.

2. PODSTAWOWE WŁASNOŚCI BIPRODUKTU PÓŁPROSTEGO GRUP

Na wstępie udowodnimy następujący lemat.

Lemat 2.1

Odwzorowania

$$\varkappa_0 : H \longrightarrow G_2 \curlywedge_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \lambda\, G_1 \quad \text{oraz} \quad \varkappa_i : G_i \longrightarrow G_2 \curlywedge_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \lambda\, G_1 \quad \text{dla} \quad i = 1,2$$

określone odpowiednio wzorami

$$\varkappa_0(h) := (e_2,h,e_1), \quad \varkappa_1(g_1) := (e_2,\Theta,g_1), \quad \varkappa_2(g_2) := (g_2,\Theta,e_1)$$

są monomorfizmami.

Dowód:

Ponieważ różnowartościowość tych odwzorowań jest oczywista, więc aby udowodnić lemat wystarczy wykazać związki

$$\varkappa_o(\bar{h} * h) = \varkappa_o(\bar{h}) \curlywedge \varkappa_o(h), \quad \varkappa_i(\bar{g}_i g_i) = \varkappa_i(\bar{g}_i) \curlywedge \varkappa_i(g_i), \quad i = 1, 2.$$

Dowód pierwszego z nich przebiega następująco

$$\varkappa_o(\bar{h} * h) = (e_2, \bar{h} * h, e_1) = (e_2, \bar{h}, e_1) \curlywedge (e_2, h, e_1) = \varkappa_o(\bar{h}) \curlywedge \varkappa_o(h).$$

Pozostałe dwa związki są konsekwencjami równości

$$(e_2, \circledcirc, \bar{g}_1) \curlywedge (e_2, \circledcirc, g_1) = (e_2, \circledcirc, \bar{g}_1 g_1),$$

$$(\bar{g}_2, \circledcirc, e_1) \curlywedge (g_2, \circledcirc, e_1) = (\bar{g}_2 g_2, \circledcirc, e_1).$$

W ten sposób dowód lematu został zakończony.

Podgrupy biproduktu (1.11), będące obrazami omawianych homomorfizmów, oznaczmy symbolami

$$\hat{H} := \varkappa_o(H), \quad \hat{G}_i := \varkappa_i(G_i), \quad i = 1, 2. \tag{2.1}$$

Z powyższego lematu otrzymujemy natychmiast następujący wniosek.

Wniosek 2.1

Grupy H i $\hat{H}$, a także G_i oraz $\hat{G}_i$ dla $i = 1, 2$, są izomorficzne.

W dalszym ciągu przy omawianiu własności biproduktu półprostego korzystać będziemy ze znanego z teorii grup oznaczenia:

$$A\,B := \left\{ a\,b : a \in A \wedge b \in B \right\}$$

dla dowolnych podzbiorów A, B danej grupy G. Podstawowe własności biproduktu półprostego grup podają poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 2.1

Podgrupy (2.1) biproduktu półprostego (1.11) posiadają następujące własności:

$$\hat{H} \lhd G_2 \curlywedge H \curlywedge G_1, \tag{2.2}$$

$$\hat{G}_2 \cap (\hat{H} \curlywedge \hat{G}_1) = \left\{(e_2, \circledcirc, e_1)\right\} = \hat{H} \cap \hat{G}_1,$$

$$(\hat{G}_2 \curlywedge \hat{H}) \cap \hat{G}_1 = \left\{(e_2, \circledcirc, e_1)\right\} = \hat{G}_2 \cap \hat{H}, \tag{2.3}$$

$$G_2 \wedge H \wedge G_1 = \hat{G}_2 \wedge \hat{H} \wedge \hat{G}_1, \tag{2.4}$$

$$\bigwedge_{\hat{g}_1 \in \hat{G}_1} \bigwedge_{\hat{g}_2 \in \hat{G}_2} \hat{g}_1 \wedge \hat{g}_2 = \hat{g}_2 \wedge \hat{g}_1. \tag{2.5}$$

Dowód:

Aby udowodnić (2.2) wystarczy pokazać, że

$$\hat{h} := (g_2, h, g_1) \wedge (e_2, h_o, e_1) \wedge (g_2, h, g_1)^{-1} \in H.$$

Zależność tę sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem:

$$\hat{h} = (g_2, h * g_1 h_o, g_1) \wedge (g_2^{-1}, g_1^{-1} h^{-1} g_2^{-1}, g_1^{-1}) =$$

$$= (e_2, h * g_1 h_o g_2^{-1} * h^{-1} g_2^{-1}, e_1) = (e_2, (h * g_1 h_o * h^{-1}) g_2^{-1}, e_1) \in H.$$

Ponieważ dowody własności (2.3) i (2.5) są natychmiastowe, udowodnimy tylko (2.4). Oczywiście zachodzi inkluzja

$$G_2 \wedge H \wedge G_1 \supset \hat{G}_2 \wedge \hat{H} \wedge \hat{G}_1.$$

Dlatego wystarczy pokazać, że

$$G_2 \wedge H \wedge G_1 \subset \hat{G}_2 \wedge \hat{H} \wedge \hat{G}_1$$

lub co na jedno wychodzi, że zachodzi implikacja

$$(g_2, h, g_1) \in G_2 \wedge H \wedge G_1 \Longrightarrow (g_2, h, g_1) \in \hat{G}_2 \wedge \hat{H} \wedge \hat{G}_1.$$

Zachodzenie tej implikacji jest konsekwencją łatwej do sprawdzenia równości

$$(g_2, h, g_1) = (g_2, \Theta, e_1) \wedge (e_2, h, e_1) \wedge (e_2, \Theta, g_1).$$

W ten sposób twierdzenie zostało dowiedzione.

Twierdzenie 2.2

Jeżeli G_2, H, G_1 są podgrupami grupy G, spełniającymi warunki

$$H \lhd G, \tag{2.6}$$

$$G_2 \wedge (H \cdot G_1) = \{e\} \wedge H \cap G_1 = \{e\}, \quad (e - \text{element neutralny } G) \tag{2.7}$$

$$G = G_2 \cdot H \cdot G_1, \tag{2.8}$$

$$\bigwedge_{g_1 \in G_1} \bigwedge_{g_2 \in G_2} g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1, \tag{2.9}$$

to G jest grupą izomorficzną z biproduktem półprostym $G_2 \wedge_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \wedge G_1$, przy czym odwzorowania $\Phi_1 : H \times G_1 \to H$ określone są wzorami

$$\Phi_1(h,g_1) := g_1 h g_1^{-1} \quad \Phi_2(h,g_2) := g_2^{-1} h g_2. \tag{2.10}$$

Dowód:

Z założenia (2.6) wynika, że $\Phi_1(h,g_1) \in H$ oraz $\Phi_2(h,g_2) \in H$ dla dowolnych $h \in H$, $g_i \in G_i$, $i = 1, 2$. Poza tym, jak łatwo sprawdzić, bezpośrednim rachunkiem odwzorowania Φ_i zdefiniowane wzorami (2.10) spełniają warunki (1.1) - (1.5). Wynika stąd, że odwzorowania te są poprawnie określone. Można więc utworzyć biprodukt półprosty (1.11). Niech teraz $\varphi : G_2 \wedge_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \wedge G_1 \to G$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem $\varphi(g_2,h,g_1) := g_2 h g_1$. Udowodnimy, że φ jest szukanym izomorfizmem. Na mocy założenia (2.8) dowolny element $g \in G$ można przedstawić w postaci $g = g_2 h g_1$. Wynika stąd, że g jest obrazem elementu (g_2,h,g_1) grupy $G_2 \wedge H \wedge G_1$, przy odwzorowaniu φ. Oznacza to, że φ jest surjekcją. Odwzorowanie φ jest również injekcją. Z równości

$$\varphi(g_2,h,g_1) = \varphi(\bar{g}_2,\bar{h},\bar{g}_1) \tag{2.11}$$

wynika bowiem, że $g_2 h g_1 = \bar{g}_2 \bar{h} \bar{g}_1$, czyli

$$\bar{g}_2^{-1} g_2 = \bar{h} \bar{g}_1 g_1^{-1} h^{-1}. \tag{2.12}$$

Na mocy (2.6) dla dowolnych $g_1' \in G_1$ oraz $h' \in H$ istnieje taki element $h'' \in H$, że $g_1' h' (g_1')^{-1} = h''$, czyli $g_1' h' = h'' g_1'$. Wobec tego $\bar{h} \bar{g}_1 g_1^{-1} h^{-1}$ jest elementem grupy $H \cdot G_1$. Stąd wobec (2.12) oraz (2.7) mamy

$$\bar{g}_2^{-1} g_2 = e, \quad \bar{h} \bar{g}_1 g_1^{-1} h^{-1} = e,$$

a zatem $g_2 = \bar{g}_2$ oraz $\bar{g}_1 g_1^{-1} = \bar{h}^{-1} h$. Stąd i z drugiego ze związków (2.7) wynika, że $\bar{g}_1 g_1^{-1} = e$, $\bar{h}^{-1} h = e$, więc $g_1 = \bar{g}_1$ oraz $h = \bar{h}$.

Udowodniliśmy w ten sposób, że z (2.11) wynika równość $(g_2,h,g_1) = (\bar{g}_2,\bar{h},\bar{g}_1)$, co dowodzi różnowartościowości φ.

Aby zakończyć dowód twierdzenia należy jeszcze pokazać, że φ jest homomorfizmem, tzn. że zachodzi równość

$$\varphi\left[(g_2,h,g_1) \curlywedge (\bar{g}_2,h,\bar{g}_1)\right] = \varphi(g_2,h,g_1)\,\varphi(\bar{g}_2,\bar{h},\bar{g}_1). \tag{2.13}$$

Zgodnie z określeniami działania grupowego $\curlywedge$ i odwzorowań Φ_1, Φ_2, φ mamy kolejno

$$\varphi\left[(g_2,h,g_1) \curlywedge (\bar{g}_2,\bar{h},\bar{g}_1)\right] = \varphi(g_2\bar{g}_2,\Phi_2(h,\bar{g}_2)\Phi_1(\bar{h},g_1),g_1\bar{g}_1) =$$

$$= g_2\bar{g}_2\bar{g}_2^{-1}h\bar{g}_2g_1\bar{h}g_1^{-1}g_1\bar{g}_1 = g_2h\bar{g}_2g_1\bar{h}\bar{g}_1,$$

a zatem na mocy (2.9) zachodzi równość (2.13), co kończy dowód twierdzenia.

Śledząc dowód powyższego twierdzenia można się łatwo przekonać, że zachodzi następujący wniosek.

<u>Wniosek 2.2</u>

Twierdzenie 2.2 pozostanie prawdziwe, jeżeli założenie (2.7) zastąpimy warunkiem

$$(G_2\ H)\cap G_1 = \{e\} \quad \wedge \quad G_2\cap H = \{e\}. \tag{2.14}$$

Z twierdzenia 2.2 wynika jako prosty wniosek znane z teorii grup następujące twierdzenie o produkcie półprostym grup.

<u>Wniosek 2.3</u>

Jeżeli H oraz G_1 są podgrupami grupy G, spełniającymi warunki

$$H \lhd G, \tag{2.15}$$

$$H\cap G_1 = \{e\} \quad (e \text{ - element neutralny grupy } G), \tag{2.16}$$

$$G = H\,G_1, \tag{2.17}$$

to G jest grupą izomorficzną z produktem półprostym grup $H_{\Phi_1} \curlywedge G_1$, przy czym odwzorowanie $\Phi_1 : H\times G_1 \to H$ określone jest wzorem $\Phi_1(h,g_1):=g_1hg_1^{-1}$.

Dowód:

Rzeczywiście, podgrupy H, G_1 wraz z podgrupą trywialną $G_2 = \{e\}$ spełniają założenia twierdzenia 2.2, więc G jest grupą izomorficzną z biproduktem półprostym $\{e\} \wedge {}_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \lambda G_1$, który z kolei, jak to już zaznaczono w ustępie 1, jest izomorficzny z produktem półprostym $H_{\Phi_1} \lambda G_1$, co dowodzi wniosku.

Podobnie, w oparciu o wniosek 2.2 można udowodnić następny wniosek.

Wniosek 2.4

Jeżeli G_2 oraz H są podgrupami grupy G, spełniającymi warunek (2.15) oraz

$$G_2 \cap H = \{e\} \tag{2.18}$$

$$G = G_2 \cdot H, \tag{2.19}$$

to G jest grupą izomorficzną z produktem półprostym $G_2 \wedge {}_{\Phi_2} H$, przy czym odwzorowanie $\Phi_2 : H \times G_2 \to H$ określone jest wzorem $\Phi_2(h, g_2) = g_2^{-1} h g_2$.

W oparciu o podane powyżej własności biproduktu półprostego grup można również wprowadzić pojęcie "wewnętrznego" biproduktu półprostego grup w sposób następujący.

Definicja 2.1

Grupę G, w której istnieją podgrupy G_2, H, G_1 o własnościach (2.6) - (2.9) nazywamy biproduktem półprostym podgrupy H przez G_2, G_1.

Przykład 2.1

Przez G, G_2, H oraz G_1 oznaczmy następujące podgrupy ogólnej grupy liniowej $GL(2,R)$:

$$G_2 := \left\{ [a_{ij}] \in GL(2,R) : \quad a_{12} = 0 \right\},$$

$$G := \left\{ [a_{ij}] \in GL(2,R) : \quad a_{12} = a_{21} = 0 \wedge a_{22} = 1 \right\},$$

$$H := \left\{ [a_{ij}] \in GL(2,R) : \quad a_{12} = 0 \wedge a_{11} = a_{22} = 1 \right\},$$

$$G_1 := \left\{ [a_{ij}] \in GL(2,R) : \quad a_{12} = a_{21} = 0 \wedge a_{11} = 1 \right\}.$$

Nietrudno przekonać się o tym, że grupa G jest biproduktem półprostym podgrupy H przez G_2, G_1.

3. BIPRODUKT PÓŁPROSTY DWÓCH GRUP

Niech $\Phi_i : H \times G \to H$, $i = 1, 2$ będą odwzorowaniami spełniającymi warunki (1.1) - (1.5) dla $G_1 = G_2 = G$. Rozważmy biprodukt półprosty $G \curlywedge_{\Phi_2} H_{\Phi_1} \lambda\, G$ oraz zbiór

$$\tilde{G} := \left\{(g,h,g) :\ h \in H \wedge g \in G\right\}.$$

Ponieważ $(\bar{g},\bar{h},\bar{g}) \curlywedge (g,h,g)^{-1} \in \tilde{G}$, więc $\tilde{G}$ jest podgrupą biproduktu półprostego $G \curlywedge H \lambda\, G$. Łatwo zauważyć, że iloczyn kartezjański $H \times G$ z działaniem określonym wzorem

$$(\bar{h},\bar{g})\ \lambda\ (h,g) := (\Phi_2(\bar{h},g) * \Phi_1(h,\bar{g}), \bar{g}g) \tag{3.1}$$

tworzy grupę i to izomorficzną z grupą $\tilde{G}$.

<u>Definicja 3.1</u>

Biproduktem półprostym grupy H przez G nazywamy iloczyn kartezjański $H \times G$ z działaniem określonym wzorem (3.1) i oznaczamy symbolem $H_{\Phi_1} \lambda_{\Phi_2} G$, lub krótko $H \lambda\, G$.

Biprodukt półprosty $H \lambda\, G$ jako grupa izomorficzna z podgrupą $\tilde{G}$ grupy $G \curlywedge H \lambda\, G$ posiada własności analogiczne do własności podgrupy $\bar{G}$. Na przykład, grupa $\hat{H} := H \lambda \{e\}$, gdzie e jest elementem neutralnym grupy G, jest podgrupą normalną biproduktu półprostego $H \lambda\, G$.

Podamy obecnie przykład grupy będącej biproduktem półprostym dwóch grup.

<u>Przykład 3.1</u>

Zgodnie z ogólną definicją grup różniczkowych, podaną w pracy [2], grupą różniczkową L_2^n rzędu 2 w przestrzeni n-wymiarowej nazywamy grupę, której elementami są uporządkowane zbiory liczb rzeczywistych postaci

$$(A^i_{k_1k_2},\ A^i_k), \quad i,k,k_1,k_2 = 1,2,\dots,n, \tag{3.2}$$

spełniające warunki $\det(A^i_k) \neq 0$, $A^i_{k_1k_2} = A^i_{k_2k_1}$, zaś działania grupowe określone jest wzorem

$$(B^i_{k_1k_2},\ B^i_k) \cdot (A^i_{k_1k_2},\ A^i_k) = (C^i_{k_1k_2},\ C^i_k), \tag{3.3}$$

gdzie

$$C^i_k = B^i_l A^l_k, \quad C^i_{k_1k_2} = B^i_{l_1l_2} A^{l_1}_{k_1} A^{l_2}_{k_2} + B^i_l A^l_{k_1k_2}.$$

Niech teraz G będzie ogólną grupą liniową $GL(n,R)$, natomiast H - grupą, której elementami są ciągi $(A^i_{k_1k_2})$ spełniające warunek $A^i_{k_1k_2} = A^i_{k_2k_1}$ dla $i,k_1,k_2 = 1,2,\dots,n$, z dodawaniem jako działaniem grupowym:

$$(B^i_{k_1k_2}) + (A^i_{k_1k_2}) = (B^i_{k_1k_2} + A^i_{k_1k_2}).$$

Niech wreszcie $\Phi_i : H \times G \longrightarrow H$, $i = 1, 2$ będą odwzorowaniami określonymi wzorami

$$\Phi_1(A^i_{k_1k_2}, A^i_k) := A^i_l A^l_{k_1k_2}, \quad \Phi_2(A^i_{k_1k_2}, A^i_k) := A^i_{l_1l_2} A^{l_1}_{k_1} A^{l_2}_{k_2}.$$

Bezpośrednim rachunkiem można łatwo sprawdzić, że odwzorowania te spełniają postulaty (1.1) - (1.5). Można więc utworzyć biprodukt półprosty $H \curlywedge G$, który zgodnie z definicją 3.1 jest grupą, której elementami są pary (3.2) z działaniem grupowym określonym wzorem (3.3). Wynika stąd, że grupa różniczkowa L^n_2 jest określonym powyżej biproduktem półprostym.

Udowodnimy jeszcze twierdzenie o biprodukcie półprostym dwóch grup, które jest odpowiednikiem twierdzenia 2.2.

Twierdzenie 3.1

Jeżeli H, G_o są podgrupami grupy G i jeśli istnieje taka grupa K, że G jest jej podgrupą oraz istnieją takie monomorfizmy $\varphi_i : G_o \longrightarrow K$, $i = 1, 2$, że podgrupy H, $G_i = \varphi_i(G_o)$, $i = 1, 2$ grupy K spełniają warunki

$$H \lhd K \tag{3.4}$$

$$G_2 \cap (H\, G_1) = \{e\}, \tag{3.5}$$

$$\bigwedge_{g\in G} \bigvee_{h\in H} \bigvee_{g_o\in G_o} g = \varphi_2(g_o) h \varphi_1(g_o), \tag{3.6}$$

$$\bigwedge_{g_1\in G_1} \bigwedge_{g_2\in G_2} g_1 g_2 = g_2 g_1, \tag{3.7}$$

to G jest grupą izomorficzną z biproduktem półprostym $H_{\Phi_1}\lambda_{\Phi_2}G_o$, przy czym odwzorowania $\Phi_1 : H\times G_o \longrightarrow H$ określone są wzorami

$$\begin{aligned}\Phi_1(h,g_o) &= \varphi_1(g_o)h\varphi_1(g_o^{-1}),\\ \Phi_2(h,g_o) &= \varphi_2(g_o^{-1})h\varphi_2(g_o).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Dowód:

Zauważmy przede wszystkim, że zarówno odwzorowania $\Psi_1 : H\times G_1 \longrightarrow H$ określone wzorami $\Psi_1(h,g_1) := g_1hg_1^{-1}$, $\Psi_2(h,g_2) := g_2^{-1}hg_2$ jak i odwzorowania $\Phi_1 : H\times G_o \longrightarrow H$ określone wzorami (3.8) spełniają warunki (1.1) - (1.5). Można więc utworzyć biprodukty półproste $G_2\lambda_{\Psi_2}H_{\Psi_1}\lambda G_1$ oraz $H_{\Phi_1}\lambda_{\Phi_2}G_o$. Nie trudno przekonać się o tym, że zbiór

$$\tilde{G} := \left\{(\varphi_2(g_o),h,\varphi_1(g_o)) : h\in H \wedge g_o \in G_o\right\}$$

tworzy podgrupę biproduktu półprostego $G_2\lambda_{\Psi_2}H_{\Psi_1}\lambda G_1$. Udowodnimy najpierw że odwzorowania $\varphi : \tilde{G} \longrightarrow G$ określone wzorem

$$\varphi(\varphi_2(g_o),h,\varphi_1(g_o)) := \varphi_2(g_o)h\varphi_1(g_o)$$

jest izomorfizmem. Na mocy (3.6) odwzorowanie to jest surjekcją. Aby dowieść różnowartościowości φ załóżmy, że zachodzi równość

$$\varphi(\varphi_2(g_o),h,\varphi_1(g_o)) = \varphi(\varphi_2(\bar{g}_o),\bar{h},\varphi_1(\bar{g}_o)).$$

Wówczas zgodnie z określeniem odwzorowania φ mamy

$$\varphi_2(g_o)h\varphi_1(g_o) = \varphi_2(\bar{g}_o)\bar{h}\varphi_1(\bar{g}_o),$$

czyli

$$\varphi_2(\bar{g}_o^{-1})\varphi_2(g_o) = \bar{h}\varphi_1(\bar{g}_o)\varphi_1(g_o^{-1})h^{-1}. \tag{3.10}$$

Na mocy (3.4) iloczyn występujący po prawej stronie równości (3.10) jest elementem grupy $H\cdot G_1$. Zatem z równości (3.10) i założenia (3.5) wynika, że

$$\varphi_2(\bar{g}_o^{-1})\varphi_2(g_o) = e, \quad \bar{h}\varphi_1(\bar{g}_o)\varphi_1(g_o^{-1})h^{-1} = e,$$

Stąd i z injektywności φ_2 wynika, że $g_o = \bar{g}_o$ oraz $h = \bar{h}$. Udowodniliśmy więc, że równość (3.9) pociąga za sobą równość

$$(\varphi_2(g_o), h, \varphi_1(g_o)) = (\varphi_2(\bar{g}_o), \bar{h}, \varphi_1(\bar{g}_o)),$$

co dowodzi różnowartościowości φ. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2.2 można pokazać, że φ jest również homomorfizmem. W ten sposób stwierdzamy, że grupy G oraz $\tilde{G}$ są izomorficzne. Aby zakończyć dowód twierdzenia wystarczy jeszcze udowodnić, że izomorficzne są również grupy $\tilde{G}$ oraz $H_{\Phi_1} \lambda_{\Phi_2} G_o$. Pokażemy że odwzorowanie $\psi : \tilde{G} \to H_{\Phi_1} \lambda_{\Phi_2} G_o$ określone wzorem

$$\psi(\varphi_2(g_o), h, \varphi_1(g_o)) := (h, g_o)$$

jest szukanym izomorfizmem. Ponieważ, jak łatwo zauważyć, ψ jest bijekcją, wystarczy więc pokazać, że ψ jest homomorfizmem. Dowodzimy tego w sposób następujący:

$$\psi((\varphi_2(g_o), h, \varphi_1(g_o)) \lambda (\varphi_2(\bar{g}_o), \bar{h}, \varphi_1(\bar{g}_o))) =$$

$$= \psi(\varphi_2(g_o\bar{g}_o), \Psi_2(h, \varphi_2(\bar{g}_o))\Psi_1(\bar{h}, \varphi_1(g_o)), \varphi_1(g_o\bar{g}_o)) =$$

$$= \psi(\varphi_2(g_o\bar{g}_o), \varphi_2(\bar{g}_o^{-1})h\varphi_2(\bar{g}_o)\varphi_1(g_o)\bar{h}\varphi_1(g_o^{-1}), \varphi_1(g_o\bar{g}_o)) =$$

$$= (\varphi_2(\bar{g}_o^{-1})h\varphi_2(\bar{g}_o)\varphi_1(g_o)\bar{h}\varphi_1(g_o^{-1}), g_o\bar{g}_o) =$$

$$= (\Phi_2(h, \bar{g}_o)\Phi_1(\bar{h}, g_o), g_o\bar{g}_o) = (h, g_o)\lambda(\bar{h}, \bar{g}_o) =$$

$$= \psi(\varphi_2(g_o), h, \varphi_1(g_o))\lambda \psi(\varphi_2(\bar{g}_o), \bar{h}, \varphi_1(\bar{g}_o)).$$

W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

Zastosowaniom biproduktu półprostego dwóch grup w geometrii zostaną poświęcone oddzielne prace.

LITERATURA

[1] . Hall Jr.: The theory of groups, New York 1959.

[2] Kucharzewski M.: Elementy teorii obiektów geometrycznych, Katowice 1969 (skrypt).

Recenzent: doc. dr hab. Stefan Węgrzynowski

Wpłynęło, 2.06.1983 r.

ПОЛУПРЯМОЕ БИПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРУПП

Р е з ю м е

В работе дано определение и основные особственности одной группы, которая является обобщением полупрямого произведения групп.

SEMI-DIRECT BIPRODUCT OF GROUPS

S u m m a r y

In this paper a definition and basic properties of a certain group, which is a generalization of the semi-direct product of groups are given.