ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: GÓRNICTWO z. 246 Nr kol. 1480

Břetislav MIČULKA
Jindřic CIGÁNEK
VŠB – Technická Univerzita Ostrava

DYSKUSJA NA TEMAT PROJEKTOWANIA MIESZANEK DRUTOBETONOWYCH

Streszczenie. Artykuł przedstawia jedno z możliwicych teoretycznych rozwiązań problemu projektowania mieszanek drutobetonowych. Jego potwierdzenie w praktyce wymaga jednak dalszych badań eksperymentalnych.

THE DISCUSSION ON THE DESIGNING CONCRETE-WIRE MIXTURES THEORY

Summary. One of the possible theoretical solutions of designing concrete-wire mixtures has been presented in this paper. Its practical acknowledgement requires further experimental researches.

1. Úvod

Soudobý razantní útlum hornictví v mnoha případech evokuje potřebu výstavby bezpečnostních objektů (zátek, hrází apod.) vystavených hydrostatickým tlakům dosahujících hodnot až 13,5 MPa. Extrémní zatížení těchto objektů tak klade mimořádné nároky na kvalitu konstrukčního materiálu (zpravidla betonu), jehož povolené smykové pevnosti (cca 0,75 MPa) bývají výrazně překročeny. Mimořádně perspektivní v takových případech se proto jeví použití drátkobetonových směsí, jejichž tahová a smyková pevnost při použití dispersní výztuže několikanásobně vzroste.

Teorie navrhování drátkobetonových směsí je v současnosti v bouřlivém vývoji – zpravidla však pokulhává za experimentální praxí ověřování vlastností drátkobetonů, která je v každém případě rozhodující pro stanovení příslušných parametrů.

Uvedený diskusní příspěvek je jen jednou z možností teoretických řešení. Jeho ověření v praxi si však vyžádá ještě delší čas ověřovacího výzkumu.

Považujeme za nutné upozornit, že na stabilitě uváděných bezpečnostních objektů často závisí životy mnoha lidí. Výzkum vhodných materiálů pro tyto objekty proto bezesporu patří ke stěžejním úkolům geotechniky a stavební likvidace dolů – proto jej předkládáme k diskusi široké odborné veřejnosti.

Výchozím předpokladem použití řešení je rovnoměrné rozmístění výztužních drátků („homogenizace“ směsi) co do umístění i směru, což lze při vhodném promíchání směsi dobře předpokládat uvnitř tělesa, avšak nebude zcela dodrženo u hraničních ploch (zvláště co do směru). Dále se předpokládá dobrý styk drátků s betonem prakticky po celém povrchu, což vyžaduje existenci dostatečně jemnozrnné frakce a dobré zhutnění betonu pomocí vibrátoru (k minimalizaci pórů). Příliš velký podíl hrubého zrna (32 < mm) by byl rovněž na překážku rovnoměrného rozložení drátků (homogenizaci).

2. Schopnost drátků zachytit tahovou sílu

Budeme uvažovat (pro jednoduchost) válcový betonový nosník o poloměru R, v němž jsou náhodně rozptýleny drátky délky $d << R$ a poloměru $r << R$. Bylo by možno uvažovat stavební díl libovolného tvaru (kvádr apod.), naše volba později umožní jednoduše formulovat „hustotu“ drátkové armatury (pomocí objemového koeficientu).

Uvažujeme (hypotetickou trhlinu v rovině ρ kolmé k ose nosníku. Budeme zjišťovat, jako sílu jsou schopny zachytit drátky, které tuto rovinu protínají.

Drátek délky d se středem S je rovinou ρ rozdělen na části e, d-e. Můžeme volit označení tak, že $e < d - e$ (e je kratší část). Je-li v vzdálenost bodu S od roviny ρ a u je odklon drátku od osy nosníku, pak platí

$$e = \frac{d}{2} - \frac{v}{\cos u}, \text{ pokud } v \leq ½ \, d \cos u, \tag{1a}$$

nebo

$$e = 0 \quad \text{pro } v \geq ½ \cos u, \tag{1b}$$

Nás zajímá hlavně situace (1a), v situaci (1b) nedojde k protnutí roviny ρ. Stačí uvažovat pouze podmínku

$$v \leq \tfrac{1}{2} d, \tag{1c}$$

která dává drátku **možnost** protnout rovinu ρ.

Hodnoty u, v jsou podle výchozího předpokladu náhodné veličiny. K určení hodnoty v stačí jedna souřadnice polohy středu S, a sice ve směru osy nosníku, označme ji z (v rovině ρ. je $z = 0$).

Platí

$$v = |z|, \quad z \in \langle -\tfrac{1}{2} d, \tfrac{1}{2} d \rangle, \tag{2}$$

kde z má rovnoměrné rozdělení na uvedeném intervalu s hustotou pravděpodobnosti $1/d$. Pak velíčina v má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, \tfrac{1}{2} d\rangle$ s hustotou pravděpodobnosti $\varphi_2(v) = 2/d$.

K odvození rozdělení veličiny u použijeme označení podle obr. 2. Směr drátku je určen vektorem $\overrightarrow{SU}$, kde U je bod kulové plochy (jednotkového poloměru). Pak jev $u < u_0$ je charakterizován umístěním bodu U na vrchlíku V o výšce h. Tedy pravděpodobnost tohoto jevu je dána poměrem plochy vrchlíku V k ploše poloviny jednotkové kulové plochy. Potom distribuční funkce

$$\Phi_1(u_0) = P(u < u_0) = \frac{2\pi h}{2\pi} = h = 1 - \cos u_0, u_0 \in \langle 0, \tfrac{1}{2}\pi \rangle,$$

Hustota pravděpodobnosti veličiny u je

$$\varphi_1(u) = \Phi_1'(u) = \sin u, \quad u \in \langle 0, \tfrac{1}{2}\pi \rangle, \tag{3}$$

Protože u, v jsou nezávislé, sdružená hustota $\varphi(u, v)$ náhodného vektoru (u, v) je součinem marginálních hustot $\varphi_1(u)\ \varphi_2(v)$, tedy

$$\varphi(u,v) = \frac{2 \sin u}{d}, (u, v) \in \langle 0, \tfrac{1}{2}\pi \rangle \times \langle 0, \tfrac{1}{2} d \rangle, \tag{4}$$

Bude užitečné určit základní charakteristiky veličiny e, která je funkcí náhodného vektoru (u, v) podle (1a), (1b), a sice střední hodnotu $\bar{e} = E(e)$ a disperzi $\sigma_e^2 = D(e) = E[(e - \bar{e})^2] = E(\bar{e}) - [E(e)]^2$. To nám umožní popis chování náhodného vektoru (u, v) pomocí simultánní hustoty φ, popsané v (4).

Označme oblasti $A = \langle 0, \tfrac{1}{2}\pi \rangle \times \langle 0, \tfrac{1}{2} d \rangle$ (obdélník) a podoblast $\bar{A} = \{(u, v) \in A; 2v \leq d \cos u\}$. Oblast $\bar{A}$ vyjadřuje jev popsaný podmínkou $e > 0$ (protnutí roviny ρ), její doplněk

$A \setminus \overline{A}$ popisuje jev určený podmínkou *e* = *0* (drátek neprotne rovinu *ρ*). Vypočteme charakteristiky:

$$\bar{e} = E(e) = \iint_A E(u,v).\varphi(u,v)du\,dv = \iint_{\bar{A}} \left(\frac{2}{d} - \frac{v}{\cos u}\right) \frac{2\sin u}{d} du\,dv = \iint_{\bar{A}} \left(\sin - \frac{2}{d} v\,\mathrm{tg}u\right) du\,dv =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} du \int_0^{\frac{1}{2}d\cos u} \left(\sin u - \frac{2}{d} v\,\mathrm{tg}u\right) dv = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[v \sin u - \frac{1}{d} v^2\,\mathrm{tg}u\right]_{v=0}^{\frac{1}{2}d\cos u} du =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\tfrac{1}{2} d \sin u \cos u - \tfrac{1}{4} d \cos u \sin u\right) du =$$

$$= \frac{d}{8} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin 2u\,du = -\frac{d}{16} [\cos 2u]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{d}{16}.(-2) = \frac{d}{8} = \bar{e}$$

Pro výpočet disperze nejprve připravíme

$$E(e^2) = \iint_A e^2(u,v)\varphi(u,v)du\,dv = \iint_{\bar{A}} \left(\frac{d}{2} - \frac{v}{\cos u}\right)^2 . \frac{2}{d} \sin u\,du\,dv =$$

$$= \frac{d}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} du \int_0^{\frac{1}{2}d\cos u} \left(\tfrac{1}{4} d^2 \sin u - dv\,\mathrm{tg}u + v^2 \frac{\sin u}{\cos^2 u}\right) dv =$$

$$= \frac{2}{d} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\tfrac{1}{8} d^3 \sin u \cos u - \tfrac{1}{8} d^3 \sin u \cos u + \tfrac{1}{24} d^3 \sin u \cos u\right) du =$$

$$= \frac{d^2}{24} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2u\,du = -\frac{d^2}{48} [\cos 2u]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{d^2}{24} = E(e^2).$$

Nakonec disperze

$$\sigma_e^2 = D(e) = E(e^2) - [E(e)]^2 = \frac{d^2}{12} - \frac{d^2}{64} = \frac{13}{192} d^2 = \sigma_e^2 \tag{5}$$

a směrodatná odchylka $\sigma_e = \sqrt{D(e)} = \dfrac{\sqrt{13}}{8\sqrt{3}} d \cong 0{,}2602\,d$.

Je třeba zdůraznit, že byly uvažovány všechny drátky, jež mohou protnout rovinu *ρ* (*v* ≤ *½d*). Jestli drátek skutečně rovinu *ρ* protne či nikoliv, rozlišují podmínky v (1a), (1b) a graficky jsou popsány v obr. 3 oblastmi $\overline{A}$, $A \setminus \overline{A}$. Bude tedy užitečné určit, jaká je pravděpodobnost jevu $\overline{A}$:

$$P(\overline{A}) = P(v \le \tfrac{1}{2} d \sin u) = P(e > 0) = \iint_A \varphi(u,v)\,du\,dv = \frac{2}{d}\iint_A \sin u\,du\,dv =$$

$$= \frac{2}{d}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin u\,du \int_0^{\frac{1}{2}d\sin u} dv = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 u\,du = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854. \qquad (6)$$

Představme si nyní, že na drátek působí v bodě Q roviny ρ tahová síly F v ose nosníku. Rozložíme si ji na složku F_0 ve směru osy drátku a složku F_n v normálové rovině (kolmo na osu drátků). Platí

$$F_0 = F \cos u, \qquad F_n = F \sin u, \qquad (7)$$

Mezní síla F_{oh} ve směru F_0, kterou může drátek zachytit, je závislá na koeficientu soudržnosti τ [N.cm^{-2}] mezi kovem a betonem a na styčném povrchu, tedy

$$F_{oh} = 2\,\pi r\,.\,e\,.\,\tau \qquad [\mathrm{N}], \qquad (8)$$

a je rovněž náhodnou veličinou jako e.

Mezní síla F_{nh} ve směru F_n, kterou může drátek vydržet, je závislá na střihové pevnosti σ [N.cm^{-2}] kovového materiálu a průřezu jehličky, tedy

$$F_{nh} = 2\,\pi r^2 \cdot \sigma \qquad [\mathrm{N}], \qquad (9)$$

tato je ovšem konstantní.

Drátek splní svůj úkol pouze tehdy, když žádná z obou složek nepřekročí mezní hodnotu, tj.

$$F_o < F_{oh} \quad \mathrm{i} \quad F_n < F_{nh}, \qquad (10)$$

V případě $F_o > F_{oh}$ dojde k vytržení kratší části drátku z podkladu, v případě $F_n > F_{nh}$ dojde k ustřižení jehličky. V obou těchto situacích se uvažovaný drátek nebude podílet na sumě zachycených sil.

Použitím vztahů (7), (8), (9) v podmínkách (10) dostaneme

$$F \cos u < 2\,\pi r\,.\,e\,.\,\tau, \qquad F \sin u < 2\,\pi r^2\,.\,\sigma, \qquad (10a)$$

po úpravě

$$F < \frac{2\pi r e \tau}{\cos u} = F_1, \qquad F < \frac{\pi r^2 \sigma}{\sin u} = F_2, \qquad (10b)$$

tedy

$$F < F_h = \min\{F_1, F_2\}, \qquad (11)$$

F_h je mezní tah, který je drátek podle svého umístění a nasměrování schopen úspěšně zachytit.

Pro další úvahy bude důležité zjistit, kdy nastane $F_1 < F_2$ a kdy $F_2 < F_1$.

Skutečnost $F_1 \leq F_2$ popisuje jev A_1:

$$F_h = F_1 = \frac{2\pi r\tau}{\cos u}\left(\frac{d}{2} - \frac{v}{\cos u}\right), \tag{12a}$$

Skutečnost $F_2 \leq F_1$ popisuje jev A_2:

$$F_h = F_2 = \frac{\pi r^2 \sigma}{\sin u}, \tag{12b}$$

Jsou to tedy náhodné jevy. Označíme-li jejich pravděpodobnosti $p_1 = P(A_1)$, $p_2 = P(A_2)$, pak $p_1 + p_2 = p(\overline{A}) = \frac{1}{4}\pi$, neboť $A_1 + A_2 = \overline{A}$ a jejich průnik ($F_1 = F_2$) má nulovou pravděpodobnost ($A_1 + A_2$ nastane, když $e > 0$, tedy $(u, v) \in \overline{A}$).

Pokusme se určit p_1 a p_2.

A_1 nastane, když $F_1 < F_2$, tj.

$$2\,\pi\, r\, e\, \tau \sec u < \pi\, r^2 \sigma \operatorname{cosec} u \tag{13}$$

$$2\, e\, \tau \sin u < \pi\, \sigma \cos u$$

$$0 < e \operatorname{tg} u < \frac{r\sigma}{2\tau} \tag{14}$$

a podle (1a) dostaneme tento popis jevu A_1:

$$A_1: \quad 0 \leq \left(\frac{d}{2} - \frac{v}{\cos u}\right)\operatorname{tg} u < \frac{r\sigma}{2\tau}, \tag{15}$$

Je zřejmé, že veličina
$$x = \left(\frac{d}{2} - \frac{v}{\cos u}\right)\operatorname{tg} u, \tag{16}$$

je funkcí náhodného vektoru *(u, v)* a je tedy určena frekvenční funkcí $\varphi(u, v)$ podle (4).

Avšak náhodné jevy A_1, A_2 jsou kromě náhodné veličiny x závislé na konstantách d, r, σ, τ a totéž platí o jejich pravděpodobnostech

$$p_1 = P(A_1) = P\left(0 < x < \frac{r\sigma}{2\tau}\right),$$

$$p_2 = P(A_2) = P\left(x > \frac{r\sigma}{2\tau}\right).$$

Víme pouze, že

$p_1 + p_2 = P(A_1) + P(A_2) = P(\bar{A}) = \frac{\pi}{4}$.

Přitom *d, r* si volíme, kdežto σ, τ závisí na vlastnostech materiálu drátků, jejich povrchové úpravě, na zrnitosti či pórovitosti betonu, které je třeba zjistit buď ze stavebních tabulek nebo experimentálně.

Situaci, při níž jest $F_1 < F_2$ (jev A_1), resp. $F_1 = F_2$, resp. $F_1 > F_2$ (jev A_2), názorně ukazuje obr. 5a, resp. 5b, resp. 5c.

Jevy A_1, A_2 jsou částí oboru A náhodného vektoru *(u, v)*, jak již bylo výše řečeno. Hranice mezi nimi je určena podmínkou

$$F_1 = F_2, \tag{17}$$

Prozkoumáme-li ji podrobněji použitím (12a), (12b):

$$\frac{2\pi r\tau}{\cos u}\left(\frac{d}{2}-\frac{v}{\cos u}\right) = \frac{\pi r^2\sigma}{\sin u}$$

$$\frac{d}{2}-\frac{v}{\cos u} = \frac{r\sigma}{2\tau}.\mathrm{cotg}\,u$$

Při označení (pro stručnost) $\kappa = \frac{r\sigma}{d\tau}$ (bezrozměrný koeficient!) dostaneme hranici $F_1 = F_2$ popsánu rovnicí

$$v = \tfrac{1}{2} d \cos u\,(1 - \kappa\,\mathrm{cotg}\,u), \tag{17a}$$

(viz obr. 6). Veličina *v* je kladná, když cotg u < $\frac{1}{\kappa}$, čili tg u > κ, u > artg κ = u_0. Tedy funkce (17a) je definována pro:

$$u \in \langle u_0, \frac{\pi}{2}\rangle,\quad u_0 = \mathrm{arctg}\,\kappa,\quad \kappa = \frac{r\sigma}{d\tau}, \tag{17b}$$

Pro $u = u_0$ i $u = \frac{\pi}{2}$ je $v = 0$ (body K, M v obr. 6).

Derivace funkce (17a) je

$$\frac{dv}{du} = \frac{d}{2}\left[-\sin u+\kappa\left(2\cos u+\frac{\cos^3 u}{\sin^2 u}\right)\right] = \frac{d}{2}.\kappa\sin u\left(\mathrm{cotg}^3 u+2\,\mathrm{cotg}\,u-\frac{1}{\kappa}\right).$$

Funkce $h(u) = \mathrm{cotg}^3 u + 2\,\mathrm{cotg}\,u - \frac{1}{\kappa}$, (18) je zřejmě klesající na $\langle u_0, \frac{1}{2}\pi\rangle$, dále

$$h(u_0) = \frac{1}{\kappa^3} + \frac{2}{\kappa} - \frac{1}{\kappa} = \frac{1+\kappa^2}{\kappa^3} > 0, \qquad h\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = -\frac{1}{\kappa} > 0,$$

tedy v intervalu $\langle u_0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ má $\frac{dv}{du}$ právě jeden kořen u_l, pro něž platí

$$\cotg^3 u_l + 2 \cotg u_l = \frac{1}{\kappa}.$$

Kořen u_l nelze exaktně určit (rovnice je kubická pro cotg u). Proto funkce (17a) roste na intervalu $<u_0, u_l>$ $\left(\frac{dv}{du} > 0\right)$ a klesá na intervalu $\langle u_l, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Hodnota $v(u_l)$ je absolutní maximum (bod L na obr. 6).

Na oboru $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2$ náhodného vektoru (u, v) je tedy definován mezní tah F_h, který snese 1 drátek bez vytržení nebo přetržení, a sice

$$F_h(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{když } (u,v) \in A_0, \quad (19a) \\ \dfrac{2\pi r\tau}{\cos u}\left(\dfrac{d}{2} - \dfrac{v}{v}\cos u\right), & \text{když } (u,v) \in A_1, \quad (19b) \\ \dfrac{\pi r^2 \sigma}{\sin u}, & \text{když } (u,v) \in A_2, \quad (19c) \end{cases}$$

Zopakujeme určení oblastí A, A_0, A_1, A_2:

$$A = \{(u,v) \in <0, \tfrac{1}{2}\pi> \times <0, \tfrac{1}{2}d>\},$$

$$A_0 = \left\{(u,v) \in A;\ \frac{d}{2} - \frac{v}{\cos u} \geq 0\right\},$$

$$A_1 = \left\{(u,v) \in A;\ 0 \leq \frac{d}{2} - \frac{v}{\cos u} < \frac{d}{2\kappa}\cotg u\right\},$$

$$A_2 = \left\{(u,v) \in A;\ \frac{d}{2\kappa} \geq \frac{d}{2} - \frac{v}{\cos u}\right\}.$$

Je zřejmé, že F_h je nerostoucí vzhledem k v (konstantní v A_0, klesající v A_1, konstantní v A_2). To znamená, že absolutní maximum hodnoty F_h je třeba hledat pro $v = 0$.

$$F_h(u,0) = \begin{cases} \dfrac{\pi r d\tau}{\cos u}, & u \in \langle 0, u_0 \rangle \quad (20a) \\ \dfrac{\pi r^2\sigma}{\sin u}, & u \in \langle u_0, \dfrac{\pi}{2} \rangle \quad (20b) \end{cases}$$

Funkce v (20a) je rostoucí, v (20b) je klesající, tedy absolutní maximum je

$$F_h \max = F_h(u_0, 0) = \frac{\pi r d \tau}{\cos u_0} = \frac{\pi r^2 \sigma}{\sin u_0}, \tag{21}$$

Náhodný vektor *(u, v)* má hodnotu (u_0, 0) (bod k v obr. 6), když střed drátku je v rovině ρ a tahová síla F_n je úhlopříčkou obdélníka o stranách F_0, F_n (obr. 5b).

Ještě upravíme vztah (21). Jelikož tg $u_0 = \kappa$, pak $\cos u_0 = \dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 u_0 + 1} = \dfrac{1}{\sqrt{\kappa^2+1}}$ a dále

$$F_h \max = \pi r d \tau \sqrt{\left(\frac{r\sigma}{d\tau}\right)^2 + 1} = \pi r \sqrt{r^2\sigma^2 + d^2\tau^2}, \tag{21a}$$

F_h je smíšená náhodná veličina s oborem $\langle 0, \pi r\sqrt{r^2\sigma^2+d^2\tau^2}\rangle$ a distribuční funkcí Φ nespojitou v bodě 0, spojitou na intervalu $(0, \pi r\sqrt{r^2\sigma^2+d^2\tau^2}\rangle$. Φ je určena vztahem

$$\Phi(F) = P(F_h < F) = 1 - P(F_h \geq F) = 1 - P(A_F)$$

$$\Phi(F) = 1 - \iint_{A_F} \varphi(u, v)\,du\,dv, \tag{22}$$

Přitom oblast A_F je ohraničená čarou $F_h = F$ (vrstevnice funkce F_h o kótě F), která má tvar

$$\frac{2\pi r \tau}{\cos u}\left(\frac{d}{2} - \frac{v}{\cos u}\right) = F, \qquad (u, v) \in A_1, \tag{23a}$$

která na hranici mezi A_1, A_2 spojitě přechází v úsečku

$$u = \arcsin \frac{\pi r_2 \sigma}{F}, \qquad (u, v) \in A_2, \tag{23b}$$

Rovnici (23a) lze psát ve tvaru

$$v = \cos u \left(\frac{d}{2} - \frac{F}{2\pi r \tau}\cos u\right), \quad u \in \langle u_{1F}, u_{2F}\rangle, \tag{23c}$$

$$\text{kde} \quad u_{1F} = \begin{cases} 0 & \text{pro } F \leq \pi r d\tau \\ \arccos \dfrac{\pi r d \tau}{F} & \text{pro } F \leq \pi r d \tau \end{cases} \tag{24}$$

$$u_{2F} = \arcsin \frac{\pi r^2 \sigma}{F}, \tag{25}$$

Potom oblast A_F (kde platí $F_h > F$) je popsána podmínkami

$$\left.\begin{aligned} & u_{1F} \leq u \leq u_{2F} \\ & 0 \leq v \leq \cos u\left(\frac{d}{2} - \frac{F}{2\pi r \tau}\cos u\right) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Jest $\Phi(0) = P(F_h < 0) = 0$

$\Phi(0+) = P(F_h \leq 0) = P(F_h = 0) = P(A) = 1 - \frac{\pi}{4}$

Tedy Φ není spojitá pro F = 0, na intervalu $<0, F_h \max>$ spojitě roste od $1 - \frac{\pi}{4}$ do 1

Kvantilová funkce Q veličiny F_h, inverzní k Φ, má vlastnosti

pro $p \in <0, 1 - \frac{\pi}{4}>$ jest $F_p = Q(p) = 0$,

$p \in <1 - \frac{\pi}{4}, 1>$ jest $F_p = Q(p) \in (0, F_h \max>$

určeno rovnicí $\Phi(F_p) = p$ (viz obr. 7b)

Obrázek 6a ukazuje pokrytí oblastí A_1, A_2 vrstevnicemi

$F_h = F$ (= konst.)

podle vztahů (23a), (23b).

Křivka (23a) začíná na hranici HJK (a sice na úsečce HK pro $F \leq \pi r d \tau$, na úsečce JK pro $F \geq \pi r d \tau$) a končí na oblouku KLM (hranici mezi A_1, A_2), pak spojitě pokračuje úsečkou (23b) v oblasti A_2.

Nejvyšší hodnota $F_n = F_h \max$ je v bodě K (u_0, 0).

Šrafovaná oblast je ukázkou oblasti A_F, v níž platí $F_h \geq F$ a je popsána nerovnostmi (26). Je ohraničena vrstevnicí o kótě F a okrajem oblasti A.

3. Hustota drátěné armatury a celkový odhad tahové pevnosti

Hustotu drátěné výztuže nejlépe vyjádříme objemovým koeficientem

$$\gamma = \frac{V_D}{V}, \tag{27}$$

kde V je objem stavebního prvku a V_D je objem drátků v něm použitých. V odstavci 6.2. bylo řečeno, že budeme uvažovat pouze ty drátky, jejichž střed S má od hypotet. roviny ρ vzdálenost $v \leq \frac{1}{2}d$. Označíme-li $\bar{n}$ průměrný počet drátků v tomto válci výšky d, pak jest

$$V = \pi R^2 d, \qquad V_D = \bar{n} \pi r^2 d,$$

tedy

$$\gamma = \bar{n}\left(\frac{r}{R}\right)^2, \tag{28}$$

a nakonec

$$\bar{n} = \gamma \left(\frac{R}{r} \right)^2 , \tag{29}$$

Uvažujeme nyní ideální případ, kdy počet drátků ve vrstvě výšky *d* je roven průměrné hodnotě $\bar{n}$ a jejich průsečíky s rovinou ρ jsou rovnoměrně rozmístěny po celém průřezu nosníku a tedy i tahová síla na nosník působící je na ně rozložena rovnoměrně. Hodnotu tahové síly, působící na 1 drátek, označme *F* (pochopitelně předpokládáme že $F \in \langle 0, F_h \max \rangle$. Pak nás bude zajímat, zda pro něj bude tato síla únosná, resp. kolik drátků tento tah vydrží. Na to nám odpoví vztah (22):

$$P(F \leq F_h) = 1 - P(F_h < F) = 1 - \Phi(F) = \iint_{A_F} \varphi(u, v)\,du\,dv, \tag{30}$$

Průměrnou absolutní četnost drátků, které tah snesou, dostaneme, když pravděpodobnost (29) násobíme $\bar{n}$ a po násobení hodnotou *F* dostaneme celkovou zachycenou sílu

$$S(F) = \gamma \left(\frac{R}{r} \right)^2 (1 - \Phi(F)).F, \tag{31}$$

Tuto sílu je třeba srovnat s plochou průřezu πR^2, tedy nosník unese plošný tah

$$\sigma(F) = \frac{S(F)}{\pi R^2} = \frac{\gamma}{\pi r^2}[1 - \Phi(F)]F, \qquad [\mathrm{N.cm^{-2}}], \tag{32}$$

Z (32) je vidět, že $\sigma(F)$ závisí na volbě zatížení *F* jednoho drátku. Ovšem při rostoucím *F* klesá pravděpodobnost $1 - \Phi(F)$, že odolá 1 drátek, tedy klesá i počet drátků, u kterých se tak stane.

Přitom

$$\sigma(0) = 0, \qquad \sigma(F_{max}) = 0, \tag{33}$$

protože $\Phi(F_{h\,max}) = 1$. Navíc $\sigma(F)$ je nezáporná spojitá funkce $\langle 0, F_h \max \rangle$, tedy má na něm i své absolutní maximum

$$\sigma(\bar{F}) = \max \sigma(F), \tag{34}$$

Toto je odhad maximálního plošného zatížení tahem, ovšem za ideálních nesplnitelných předpokladů. Proto je takový odhad třeba snížit koeficientem menším než 1, zohledňujícím odchylky od rovnoměrného rozptýlení drátků v různých rovinách průřezu nosníku, odchylky od průměrného počtu $\bar{n}$ ve smyslu zásady, že pevnost řetězu určuje jeho nejslabší článek.

Praktické určení maxima funkce $\sigma(F)$ vyžaduje znalost distribuční funkce $\Phi(F)$ určené v (22). Tu však je možno tabelovat pouze numerickými integracemi, podmíněnými volbou hodnot parametrů d, r, σ, τ. Pak je třeba zvolit rostoucí posloupnost $\{\Phi(F_K)\}_1^m$ a nakonec $\{\sigma(F_K)\}_1^m$ nám dává tabelaci funkce σ(F).

Přehled použitých označení

R [cm] – poloměr nosníku

r [cm] – poloměr drátků

d [cm] – délka drátků

ρ – rovina hypotetické poruchy

S – střed drátku

v – vzdálenost S od ρ

e – kratší část drátku rozděleného rovinou ρ

u – odchylka osy drátku od osy nosníku

z – souřadnice ve směru osy nosníku

V – kulový vrchlík

Φ_1 – distribuční funkce veličiny u

φ_1 – frekvenční funkce veličiny u

φ_2 – distribuční funkce veličiny v

φ – simultánní frekvenční funkce náhodného vektoru (u, v)

A – obor náhodného vektoru (u, v)

$\bar{A} \subset A$ – podobor, v němž je $e \geq 0$

$\bar{e} = E(e)$ – střední hodnota veličiny e

$\sigma_e^2 = D(e)$ – disperze veličiny e

F – tahová síla v ose nosníku

F_o – osová složka síly F

F_n – normálová složka síly F

$\tau[N.cm^{-2}]$ – koeficient soudržnosti betonu s kovem

$\sigma[N.cm^{-2}]$ – koeficient střihové pevnosti kovu

F_{oh} – horní mez složky F_o (pevnosti v tahu)

F_{nh} – horní mez složky F_n (pevnosti ve střihu)

F_h – horní mez síly F

F_1 – horní mez síly F zajišťující $F_o < F_{oh}$

F_2 – horní mez síly F zajišťující $F_n < F_{nh}$

$A_0 \subset A$ – podoblast, v níž je $F_n = 0$

$A_1 \subset A$ – podoblast, v níž je $F_k = F_1$

$A_2 \subset A$ – podoblast, v níž je $F_h = F_2$

$\kappa = \frac{r\sigma}{d\tau}$ – bezrozměrný koeficient

$A_F \subset A$ – podoblast, v níž je $F_h \geq F_1$

u_{1F}, u_{2F} – meze určené vztahy (24), (25)

Φ – distribuční funkce veličiny F_h

Q – kvantilová funkce veličiny F_h

γ – objemový koeficient vyplnění nosníku drátky

$\bar{n}$ – průměrný počet drátků ve vrstvě síly d

SF) – plošné zatížení tahovou silou

σ(F) – odhad maxima funkce S(F)

Recenzent: Prof.zw.dr hab.inż. Mirosłwa Chudek

Abstract

One of the possible theoretical solutions of designing concrete-wire mixtures has been presented in this paper. Its practical acknowledgement requires further experimental researches.

In the presented solution, a starting point is that of uniform arrangement of small wires in the mixture (so called „homogenization" of mixture). It can be assumed inside the structural component with proper mixture preparation. It is not possible to fullfill this assumption in practice completely (especialy taking into account the direction of mixture arrangement) close to the outer surfaces if component. Other assumption takes into acconut a good contact of wires

with concrete at their whole surface, but it require adequate fine fraction and good density of concrete obtained by using vibrators.

For simplification purposes, concrete carrier of cylinder-shape with radius R has been taken into considerations, in which the wires with length $d<<R$ and radius $r<<R$ were arranged randomly. The wires resistance to the tension force was theoretically examined, as well as the influnce of mixture density on the total tensile strenght.