

Wiesław PIWOWARSKI

Akademia Górniczo – Hutnicza, Kraków

Piotr BUGIEL

Wydział Matematyki i Fizyki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków

WERYFIKACJA RELACJI DLA POZIOMYCH PRZEMIESZCZEŃ POGÓRNICZYCH W TEORII S. KNOTHEGO

Streszczenie. W pracy postawiono hipotezę, że niestacjonarne pogórnice pole przemieszczeń poziomych można poprawnie opisać, korzystając z formuły (4.1) - model dyskretny, lub (4.2) - model ciągły. Celem weryfikacji hipotezy przeprowadzono identyfikację parametru B (model 4.1) na podstawie wyników pomiarów geodezyjnych. Wykazano, że optymalna wartość parametru B zapewnia dobrą zgodność opisu przemieszczeń poziomych z obserwacjami geodezyjnymi. Ponadto wstępna analiza przestrzennego rozkładu niestacjonarnego pola przemieszczeń poziomych wskazuje, że pole to nie wykazuje symetrii osiowej.

VERIFICATION OF THE RELATION CONCERNING POST – MINING HORIZONTAL DISLOCATIONS IN KNOTHE THEORY

Summary. The paper presents a hypothesis that a non-stationary post-mining field of horizontal dislocations can be adequately described in accordance with formula (4.1) – discrete model, or formula (4.2) – continuous model. In order to verify the hypothesis the identification of parameter B (model 4.1) has been carried out on the basis of geodetic survey results. It has been shown that the optimum value of parameter B guarantees correspondence between the description of horizontal dislocations and geodetic surveys. Moreover, preliminary analysis of the spacial arrangement of a non-stationary field of horizontal dislocations indicates that the field is not marked by axial symmetry.

1. Uwagi wstępne

Problematyka dotycząca opisu przemieszczeń jest zagadnieniem złożonym, zwłaszcza w odniesieniu do modelowania stanu nieustalonego. Przemieszczenia punktów powierzchni

terenu obserwuje się zarówno nad polem eksploatacji, jak i w strefie poza obszarem eksploatacji podziemnej.

Opis pola przemieszczeń pogórnich w stanie ustalonym (asymptotycznym) jako teorię ośrodka stochastycznego przedstawiono w pracy [4]. Natomiast w przypadku stanu nieustalonego problematykę powyższą podjęto w pracy [5]. Wprowadzone w [4] postulaty odnośnie do charakteru procesu zapewniają, że wyprowadzony układ równań różniczkowych - dla stanu ustalonego - pozwala wyznaczyć średnie wartości składowych wektora przemieszczeń. Przemieszczenia pionowe i poziome są ze sobą sprzężone. Dla ośrodka izotropowego o poziomym uwarstwieniu otrzymuje się układ trzech równań różniczkowych cząstkowych typu parabolicznego, które różnią się jedynie współczynnikami.

Rozwiązanie pełnego układu równań w przypadku dowolnego ośrodka stochastycznego podanego w [4] jest praktycznie niewykonalne. Wynika to z ograniczeń natury fizycznej - właściwe postawienie odpowiednich warunków brzegowych i określenie współczynników charakteryzujących górotwór.

Podstawowy opis procesu czasoprzestrzennego jest podany za pomocą równań różniczkowych. Istotna jest tu metodyka rozwiązania postawionego problemu. Można wyróżnić dwa sposoby podejścia:

- *podejście klasyczne,*
- *metodę elementów czasoprzestrzennych.*

W niniejszej pracy korzysta się z metody klasycznej opisu przemieszczeń w stanie nieustalonym. Niżej przedstawimy krótką charakterystykę tej metody.

Podejście klasyczne polega na poszukiwaniu rozwiązań w postaci iloczynu funkcji zmiennych przestrzennych i względem czasu. Wyjściowy układ równań różniczkowych cząstkowych zostaje przekształcony w układ równań różniczkowych zwyczajnych. Następnie stosuje się numeryczne procedury całkowania tego układu względem czasu.

W podejściu klasycznym zakłada się ciągły rozkład funkcji u (np. przemieszczeń) w całym obszarze czasoprzestrzeni:

$$\Omega = \{(x, t): x \in V(t); 0 \leq t < \infty\},$$

w którym proces jest analizowany. Funkcja u zawiera w podobszarach czasoprzestrzennych jeszcze dodatkowe parametry:

$$u(x, t; t_k) = u(x, t_k) f(t_i),$$

gdzie:

$u(x, t_k)$ – wartości asymptotyczne w chwilach t_k ,

$f(t_i)$ – funkcja czasu.

Modelowanie ewolucji procesu w czasie sprowadza się do opisu tego procesu w wybranych chwilach czasu $t_0, t_1, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots$

2. Przemieszczenia górotworu w obszarze oddziaływania eksploatacji podziemnej

W wyniku eksploatacji podziemnej naruszony zostaje początkowy stan naprężeń w górotworze, powstała zaś pustka poeksploatacyjna nie przenosi naprężeń. Zakładając, że na ośrodek działa głównie siła grawitacyjna, wówczas na etapie tworzenia się niecki obniżeniowej wystarczy określać przemieszczenia (poziome i pionowe).

Powstałe pogórnice przemieszczenia poziome z reguły wyznacza się na podstawie specjalistycznych pomiarów - najczęściej geodezyjnych. Z kolei ze względów praktycznych szczególnie istotne jest prognozowanie procesu. Jednak dla celów prognozy pomiary nieliniowych charakterystyk zjawiska są w zasadzie mało przydatne. Powstaje więc konieczność modelowania procesu. W dziedzinie opisu ruchów górotworu prognozę procesu generalnie wyznacza się korzystając z pewnych przekształceń całkowych.

Zasadnicze własności całkowych teorii ruchów górotworu to:

- całkowanie po polu będącym rzutem rzeczywistego pola eksploatacji na płaszczyznę poziomą,
- obowiązująca zasada superpozycji,
- pokład oraz nadległe warstwy górotworu są poziome.

Istotne uogólnienie modelowania pola przemieszczeń pogórnicznych przedstawił J. Litwiniszyn [3], stosując do opisu procesu równanie różniczkowe paraboliczne z dodatkowymi założeniami:

- *ruchy poziome opisuje się* korzystając z empirycznego związku podanego przez S. G. Awierszyna [1], a mianowicie:

$$u = -B(z) \cdot \frac{\partial w}{\partial x}; \quad B - \text{współczynnik proporcjonalności } B > 0 \quad (2.1)$$

- postulat nieściśliwości górotworu

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.2)$$

gdzie:

u - przemieszczenie poziome wywołane eksploatacją podziemną,

w- przemieszczenie pionowe w obszarze oddziaływania eksploatacji podziemnej.

Wzór na funkcję $B(z)$ podany został przez W. Budryka [2], a mianowicie:

$$B(z) = \frac{H}{\operatorname{tg} \beta} \cdot \left(\frac{z}{H} \right)^{2 \operatorname{tg} \beta - 1}, \quad (2.3)$$

gdzie:

H - głębokość zalegania pokładu,

β - tzw. kąt rozproszenia wpływów głównych,

z - odległość pionowa pomiędzy stropem eksploatowanego pokładu a płaszczyzną poziomą we wnętrzu górotworu.

Porównanie wyników pomiaru stacjonarnego pola przemieszczeń poziomych punktów linii obserwacyjnych z teoretycznymi wielkościami przemieszczeń poziomych wskazuje, że istnieje tu pewna rozbieżność.

3. Sformułowanie problemu

Niech dane będą zbiory wyników pomiaru przemieszczeń: *poziomych* U^p i *pionowych* W punktów linii obserwacyjnej w ustalonej chwili t_j

$$U^p = \{u_1^p, u_2^p, \dots, u_{12}^p\}$$

$$W = \{w_1, w_2, \dots, w_{12}\}$$

gdzie:

$$u_i^p = u_i^p(x_i, t_j); \quad w_i = w_i(x_i, t_j),$$

1, 2, . . . , 12 - identyfikatory punktów pomiarowych,

p - atrybut oznaczający zbiór wielkości jako wyniki pomiaru,

x_i - współrzędne przestrzenne i -tego punktu obserwacyjnego,

t_j - horyzont czasu przyporządkowany realizacji ustalonego j -tego pomiaru.

Przyjęto, że zbiór U^p można przybliżyć za pomocą ilorazu różnicowego (z dokładnością do stałego czynnika), obliczonego dla dwóch kolejnych punktów pomiarowych linii obserwacyjnej, czyli:

$$\Psi(w(x_{i+1}; t_j), w(x_i; t_j)) = -B \cdot \frac{w(x_{i+1}, t_j) - w(x_i, t_j)}{x_{i+1} - x_i}, \quad (3.1)$$

gdzie:

B - parametr.

Przemieszczenia poziome $u(x_i; t_j)$ w kierunku linii pomiarowej wyznaczono stosując sekwencyjne sumowanie zmian długości poszczególnych odcinków linii, przy czym początkowy punkt linii obserwacyjnej w każdym pomiarze porównywany był z tzw. punktem stałym. Wprawdzie uzyskane w wyniku zastosowania tej procedury przemieszczenia poziome nie stanowią bezwzględnie ścisłych wartości przemieszczeń poszczególnych punktów - nie uwzględnia się tu wpływu składowej poprzecznej względem linii - ponieważ linia pomiarowa z grubsza jest tu osią symetrii pola eksploatacyjnego. Wyniki przedstawiają więc akceptowalne pole przemieszczeń różniące się w sposób nieistotny od wartości ścisłych.

Rozważania dotyczyć będą miary różnic bezwzględnych pomiędzy elementami zbiorów U^p oraz U^w , gdzie U^w jest zbiorem przemieszczeń poziomych wyznaczonych na podstawie zależności (3.1), a zbiór W - to wyniki pomiaru obniżen odpowiednich punktów obserwacyjnych.

Zakładamy, że zbiór wyników pomiaru przemieszczeń poziomych U^p jest zadany, natomiast zbiór U^w wyznaczany będzie w oparciu o transformację Ψ .

Przedmiotem analizy jest ocena różnic pomiędzy wynikami zbiorów U^p i U^w według (3.1):

$$d = \{u_1^p - u_1^w, u_2^p - u_2^w, \dots, u_{11}^p - u_{11}^w\}, \quad (3.2)$$

gdzie:

$U^p = \{u_1^p, u_2^p, \dots, u_n^p\} = U^p(x_i; t_j)$ - ciąg wyników pomiaru dla konkretnej sytuacji górnictwo-geologicznej i określonej chwili czasu t_j .

Rozważano dwie koncepcje wyznaczania składowej poziomej przemieszczeń. Pierwsza za pomocą *ilorazu różnicowego*, druga jako *pochodna* funkcji aproksymującej wyniki pomiarów przemieszczeń pionowych.

4. Przemieszczenia poziome wyliczone za pomocą ilorazu różnicowego i pochodnej

Analizę przeprowadzono dla następujących warunków prowadzonej eksploatacji: wybieranie złoża prowadzono systemem ścianowym z zawałem stropu; średnia grubość pokładu 2.2 [m]; głębokość zalegania złoża około 570 [m].

Zgodnie ze sformułowaniem problemu rozważania dotyczyć będą matematycznego modelowania nieustalonego procesu przemieszczeń poziomych. Przy czym zaadaptowano i rozszerzono formalne zdefiniowanie teorii S. Knothe'go [2] dotyczącej składowej poziomej przemieszczeń.

Weryfikacji ilościowej podlega równanie (3.1), stąd też celem wyeliminowania nieadekwatności opisu przemieszczeń pionowych $w(x, t_i)$ podstawiono tu wyniki pomiaru obniżeń punktów linii obserwacyjnej dotyczącej i -tej chwili czasu. Równanie (3.1) przystosowano do opisu dyskretnego:

$$U^w(x_i, t_j) = -B \cdot \frac{w^p(x_{i+1}; t_j) - w^p(x_i; t_j)}{\Delta x_i} \quad (4.1)$$

$w^p(x_i, t_j)$ - przemieszczenie pionowe punktu o współrzędnej x_i w chwili t_j (wynik pomiaru).

Wartości przemieszczeń poziomych uzyskanych w wyniku pomiarów długości odcinków linii obserwacyjnej oznaczono $U^p(x_i; t_j)$, a wartości numeryczne uzyskane poprzez przekształcenie proporcjonalne do ilorazu różnicowego $\frac{\Delta w^p(x_i; t_j)}{\Delta x_i}$ oznaczone jako $U^w(x_i; t_j)$.

W końcu wartości numeryczne przemieszczeń poziomych uzyskanych za pomocą procedury wygładzającej przemieszczenia pionowe oznaczono jako:

$$U_c^w(x_i; t_j) = \frac{d}{dx} w_{wygl}(x; t_j) \Big|_{x=x_i}, \quad (4.2)$$

gdzie:

w_{wygl} - wartości przemieszczeń pionowych wyznaczone na podstawie procedury wygładzającej.

Jakościowa ocena rozkładu przemieszczeń $U^p(x_i; t_j)$ oraz $U^w(x_i; t_j)$ wskazuje, że formuła $B \frac{\Delta w^p(x_i; t_j)}{\Delta x_i}$ prowadzi do rezultatów różniących się od rozkładu uzyskanego w wyniku pomiaru zmian długości odcinków linii $U^p(x_i; t_j)$. Różnice występują w zasadzie dla wszystkich charakterystycznych parametrów zmiennej, tj. lokalizacji miejsc zerowych, wartości ekstremów i rozkładu przemieszczeń poziomych. Przy czym bezwzględne wartości odchyłek pomiędzy opisem teoretycznym (3.1) a wynikami pomiaru są *niewielkie* w obszarze wartości dużych w stosunku do odchyłek, co jest szczególnie korzystne. W otoczeniu krawędzi pola górniczego występują odchyłki stosunkowo duże względem wartości mierzonych.

Tabela 1

Nr punktu	$W^p(x_i; t_{10})$ [mm]	$U^p(x_i; t_{10})$ [mm]	$U_c^w(x_i; t_{10})$ [mm]	$\Delta U_c(x_i; t_{10}) = U^p(\cdot) - U_c^w(\cdot)$	$U_d^w(x_i; t_{10})$ [mm]	$\Delta U_d(x_i; t_{10})$
10	-15.4	20.7	4.7	16.0	18.9	1.8
11	-20.6	19.0	13.6	5.4	-1.8	20.8
12	-20.2	26.6	22.6	4.0	35.1	-8.5
13	-26.9	19.3	20.9	-1.6	20.7	-1.4
14	-34.8	26.7	19.2	7.5	-3.6	30.3
15	-34.2	25.2	20.2	5.0	6.3	18.9
16	-35.7	37.7	34.0	3.7	39.6	-1.9
17	-46.7	40.3	53.1	-12.8	69.3	-29.3
18	-62.5					7.0
19	-73.9					3.0
20	-88.3					0.2
21	-108.9					-8.2
22	-132.7					32.6
23	-147.3					-0.5
24	-177.5					8.4
25	-207.8					-27.9
26	-239.9					5.1
27	-258.8					50.4
28	-292.0					-8.8
29	-307.2					-60.6
30	-336.2					0.7
31	-346.5					-25.2
32	-358.9					-52.6
33	-373.7					37.0
34	-383.3					-13.0
35	-379.8					-16.3
36	-372.1					-44.1
37	-371.5					16.7
38	-356.2					-26.8
39	-344.9					18.5
40	-322.5					-40.6
41	-301.4					3.8
42	-268.3					-58.2
43	-248.4					-23.2
44	-220.6					31.5
45	-195.5					-1.4
46	-173.3					30.1
47	-145.9					-71.5
48	-130.6					-55.6
49	-113.1					-34.1
50	-91.9					-61.9
51	-68.0					-62.0
52	-57.0					-46.1
53	-48.2					-52.6
54	-38.1					-94.8
55	-37.5					-81.8
56	-34.7					-39.2
57	-23.8					-99.2
58	-26.7					-76.6

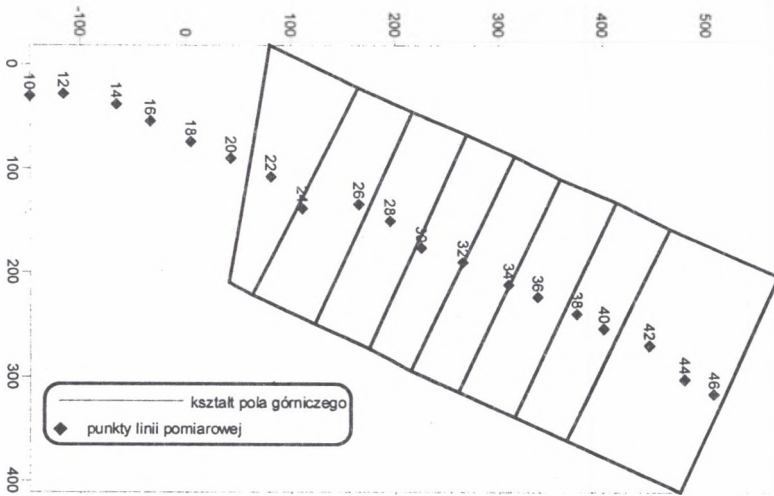
gdzie: $U_c^w(x_i; t_{10})$ – przemieszczenie poziome wyliczone z pochodnej gładkiej aproksymacji funkcji $W^p(x_i; t_{10})$,

$\Delta U_c(x_i; t_{10}) = U^p(\cdot) - U_c^w(\cdot)$ – różnica pomiędzy wynikami pomiaru a obliczonymi przemieszczeniami z gładkiej aproksymacji $W^p(x_i; t_{10})$.

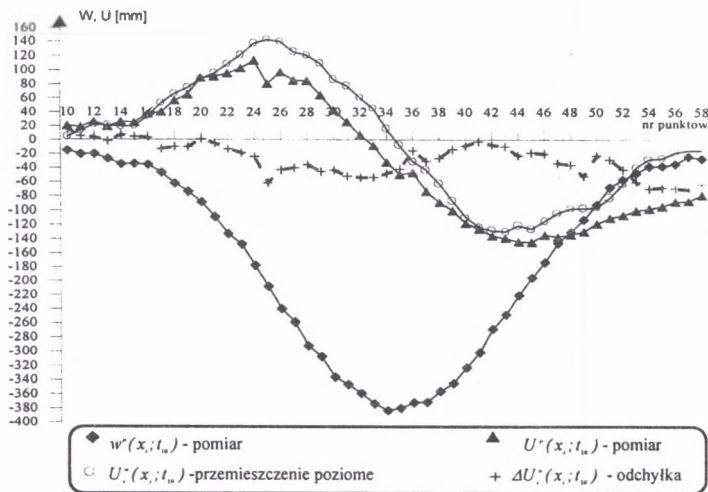
$U_d^w(x_i; t_{10})$ – przemieszczenie poziome uzyskane jako iloraz różnicowy z funkcji $W^p(x_i; t_{10})$,

$\Delta U_d(x_i; t_{10})$ – różnica pomiędzy wynikami pomiaru a odwzorowaniem $U_d^w(x_i; t_{10})$.

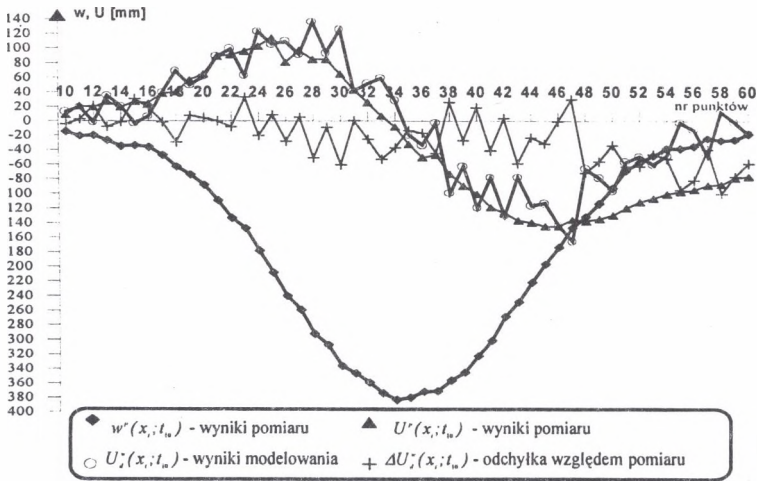
Szkic rozwoju eksploatacji podziemnej w kolejnych chwilach czasu t_j zamieszczono na rys 1. Chwila czasu (16.10.1996 – pomiar 10) i odpowiadający rozkład $U^p(x_i; t_j)$ ilustruje rys. 2.



Rys.1. Stan rozwoju eksploatacji zgodnie z daną pomiaru nr 10 oraz usytuowanie linii pomiarowe
Fig. 1. The exploitation development according to measurement number 10 and plan showing location of observation stations



Rys.2. Wykresy przemieszczeń pionowych, poziomych i odchyłki – pomiar nr 10
Fig. 2. The graphs of the horizontal and vertical displacement and deviations – measurement number 10



Rys.3. Rozkłady przemieszczeń poziomych: $U^p(x;t_{10})$ (pomiar), $w^p(x;t_{10})$ (pomiar) $U_d^w(x;t_{10})$ (model) oraz $\Delta U_d^w(x;t_{10})$ - odchyłki względem wyników pomiaru

Fig. 3. The distributions of horizontal displacements: $U^p(x;t_{10})$ (measurement), $w^p(x;t_{10})$ (measurement), $U_d^w(x;t_{10})$ (model), $\Delta U_d^w(x;t_{10})$ - deviations in relation to results of measurements

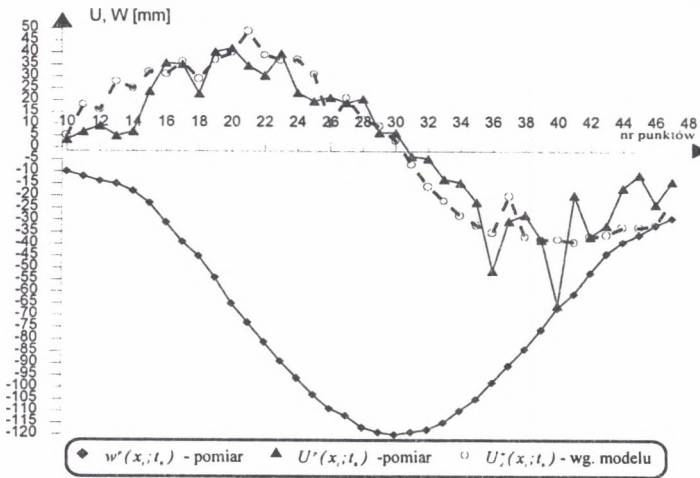
Tabela 2

Nr pom. \ Nr punktu	$U^p(x_p;t_j) = 0$	$U_c^w(x_p;t_j) = 0$	$w(x_p;t_j) = \max$	$D(x_p, \hat{x}_p;t_j)$
5	brak	27	27	nieokreślony
6	31	29	29	2
7	28	30	30	-2
8	30	31	31	-1
9	30	31	31	-1
10	32	35	35	-3
11	38	39	39	-1
12	43	45	45	-2
13	42	45	45	-3

W tabeli 2 podano: punkty zerowania się przemieszczeń poziomych uzyskanych z pomiaru $U^p(x_p;t_j) = 0$, oraz za pomocą procedury wygładzającej $U_c^w(x_p;t_j) = 0$ (wzór 4.2)

punkty $w(x_p; t_j) = \max$, w których obniżenie jest maksymalne, jak również ekscenter $D(x_p, \hat{x}_p; t_j)$ przemieszczeń poziomych w stosownych punktach.

Na obecnym etapie badań trudno wyjaśnić powód niezgodności występowania miejsc zerowania się przemieszczeń poziomych wynikających: z pomiarów, procedury wygładzającej, jak również ilorazu różnicowego.



Rys.4. Rozkłady przemieszczeń pionowych $w^p(x_i; t_g)$ oraz poziomych $U^p(x_i; t_g)$ i $U_{ij}^w(x_i; t_g)$.
POMIAR Nr 8

Fig. 4. The distributions of vertical displacements $w^p(x_i; t_g)$ and horizontal displacements $U^p(x_i; t_g)$ and $U_{ij}^w(x_i; t_g)$

MEASUREMENT NUMBER 8

5. Konkluzja

Zakładając relację pomiędzy przemieszczeniami poziomymi a pionowymi, zgodnie z teorią S. Knothego [2], porównano dwa sposoby wyznaczania tych przemieszczeń na podstawie wyników pomiaru obniżen punktów usytuowanych wzdłuż linii pomiarowej.

Pierwszy sposób związany z wyliczeniem stosownego ilorazu różnicowego jest dobrze znany z literatury. Drugi sposób, użyty w pracy, polega na wyznaczaniu pochodnej z gładkiej aproksymacji $w^p(x; t)$. Uzyskane rezultaty przemieszczeń poziomych według obydwu metod są zamieszczone w tabeli 1. W tabeli tej podano również wartości odchyłek pomiędzy wynikami pomiaru a wynikami obliczeń numerycznych.

Wyniki ilościowe podane w tabeli 1 wskazują na lepsze przybliżenie relacji według teorii S. Knothego w odniesieniu do wyników pomiarów według drugiego sposobu wyznaczania przemieszczeń poziomych. Potwierdzają również ten fakt obliczone odchyłki.

Analizując przemieszczenia poziome jako odpowiednie rozkłady przestrzenne wyników pomiaru i opisu teoretycznego, stwierdzono, że miejsca zerowania się przemieszczeń poziomych z pomiarów są przesunięte względem punktu zerowania się przemieszczeń wyznaczonych za pomocą procedury wygładzającej.

Pracę zrealizowano w ramach **badania własnych** zarejestrowanych pod symbolem 10.10.150.495

LITERATURA

1. Awierszyn S. G.: Sawizhenie gornych porod pri podziemnykh razrabotkakh. Ugletiechizad, 1947.
2. Knothe S.: Równanie profilu ostatecznie wykształconej niecki osiadania. Archiwum Górnictwa i Hutnictwa, t. 1, z. 1, PWN, Warszawa 1953.
3. Litwiniszyn J.: Równanie różniczkowe przemieszczeń górotworu. Archiwum Górnictwa i Hutnictwa, t. 1, z. 1, PWN, Warszawa 1953.
4. Litwiniszyn J.: Application of the equation of stochastic processes to mechanics of loose bodies. Archiwum Mechaniki Stosowanej, t.8, Warszawa 1956.
5. Piwowarski W., Bugiel P.: Próba opisu kinetyki pogórnicznych przemieszczeń pionowych jako procesu losowego. Złożono do druku 2000 r.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jan Zych

Abstract

The paper makes an assumption that there exists a relation similar to that in the Knothe steady state theory for the determination of horizontal dislocations in the non - steady state. In order to test this assumption some numerical experiments are performed which concern quantitative verification of the connection between the derivative in the selected direction of the function of vertical subsidences and the results of measurement of horizontal dislocations in the non - steady state.

The function of vertical subsidences is determined by the plane - defined by the selected direction – and by the vertical line. The values of this function for a discrete set of points and at a fixed instant of time are obtained by means of surveying. On the other hand the derivative of that function is approximated by an adequate difference quotient. The described empirical procedure of the modelling of dislocations eliminates the differences between theoretical description and the survey results (as far as the subsidence is concerned). Also the distribution of the dislocations constitute the results of surveying of the displacement of the points of the measured line.

The parameter B of vertical influence occurring in the discussed relation is subjected to the identification for a few horizons of time in order to decide whether it depends on time. To obtain the optimal value of the parameter B , the square of the euclidean distance is minimized between the results of dislocation survey and adequate values which are calculated by using the measured subsidence.

An attempt is also made to check the axis symmetry with respect to the vertical line through the point with zero value of displacement.